

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Decodificação de Sinais DTMF Via Transformada
Aritmética de Fourier**

Juliano Bandeira Lima

Juliano Bandeira Lima

**Decodificação de Sinais DTMF Via Transformada
Aritmética de Fourier**

Recife

2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DECODIFICAÇÃO DE SINAIS DTMF
VIA TRANSFORMADA ARITMÉTICA DE FOURIER

por

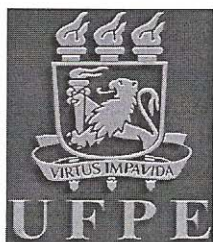
JULIANO BANDEIRA LIMA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da
Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para a obtenção do grau de
Mestre em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: RICARDO M. CAMPELLO DE SOUZA, Ph.D.

Recife, Junho de 2004.

© Juliano Bandeira Lima, 2004



Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO DE

JULIANO BANDEIRA LIMA

TÍTULO

“DECODIFICAÇÃO DE SINAIS DTMF VIA
TRANSFORMADA ARITMÉTICA DE FOURIER”

A comissão examinadora composta pelos professores: RICARDO MENEZES CAMPELLO DE SOUZA, DES/UFPE, HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA, DES/UFPE e FRANCISCO MADEIRO BERNARDINO JÚNIOR, DEI/UNICAP, sob a presidência do primeiro, consideram o candidato **Juliano Bandeira Lima APROVADO**.

Recife, 09 de julho de 2004.


JOAQUIM FERREIRA MARTINS FILHO
Coordenador do PPGE


RICARDO MENEZES CAMPELLO
DE SOUZA
Orientador e Membro Titular Interno


FRANCISCO MADEIRO BERNARDINO
JÚNIOR
Membro Titular Externo


HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA
Membro Titular Interno

Aos meus amados pais – Beto e Elza,

e ao meu estimado irmão – Renato.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por todos os dons que Ele me concedeu e que, hoje, posso colocar a serviço das outras pessoas. Agradeço aos meus pais que, durante toda a minha vida, sempre me apoiaram incondicionalmente, e a todos que me ofertaram incentivo, força, consolo e carinho.

Agradeço também:

- Ao Prof. Dr. Ricardo Menezes Campello de Souza, pela orientação cuidadosa e estimulante, pela experiência que me foi transmitida e pela confiança em mim depositada.
- Ao Prof. Dr. Hélio Magalhães de Oliveira, pela contagiante vibração que torna ainda mais prazerosa a aquisição do conhecimento, a pesquisa e as descobertas.
- Aos demais professores e colegas do curso de Engenharia, que contribuíram na minha formação profissional e pessoal.

JULIANO BANDEIRA LIMA

Universidade Federal de Pernambuco

15 de Junho de 2004

Resumo da Dissertação apresentada à UFPE como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

DECODIFICAÇÃO DE SINAIS DTMF VIA TRANSFORMADA ARITMÉTICA DE FOURIER

Juliano Bandeira Lima

Junho/2004

Orientador: Ricardo M. Campello de Souza, Ph.D.

Área de Concentração: Comunicações.

Palavras-chave: Série de Fourier, Transformada Discreta de Fourier, Transformada Aritmética de Fourier, algoritmos rápidos, DTMF.

Número de Páginas: xv + 94.

A sinalização DTMF (*Dual-Tone Multifrequency*) tem diversas aplicações importantes, sendo usada em muitos sistemas de Telecomunicações, tais como telefonia a teclado, correio de voz, comércio eletrônico e sistemas bancários interativos. Com a demanda crescente por taxas de transmissão cada vez mais elevadas nesse contexto, a velocidade de decodificação dos sinais DTMF torna-se um parâmetro importante no projeto desses sistemas. Uma vez que a decodificação é realizada via multiplexação temporal em um processador digital de sinais, um menor tempo de decodificação implica capacidade de processar simultaneamente um maior número de canais. Esta dissertação propõe um novo método, baseado na Transformada Aritmética de Fourier, para a decodificação dos sinais DTMF. O método proposto é mais eficiente, em termos de complexidade computacional, do que as técnicas usualmente utilizadas nesse cenário. São enfatizadas as vantagens computacionais que esta nova técnica oferece sobre outros algoritmos que calculam a Transformada Discreta de Fourier. Resultados de simulações são apresentados e algumas implementações são sugeridas. Uma breve análise do desempenho do método proposto, na presença de quantizadores, é feita.

Abstract of Dissertation presented to UFPE as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

DTMF DECODING VIA ARITHMETIC FOURIER TRANSFORM

Juliano Bandeira Lima

June/2004

Supervisor: Ricardo M. Campello de Souza, Ph.D.

Area of Concentration: Communications.

Keywords: Fourier Series, Discrete Fourier Transform, Arithmetic Fourier Transform, fast algorithms, DTMF.

Number of Pages: xv + 94.

Dual-Tone Multifrequency (DTMF) signalling has manifold applications and has been used in a broad range of modern Telecommunication systems, such as, for instance, telephony, voice mail, e-commerce, and interactive home banking. Due to the ever increasing demand for higher transmission rates in this scenario, the fast decoding of a DTMF signal becomes a highly important requirement for such systems. A smaller decoding time results in a capacity of simultaneously processing a larger number of channels. In this dissertation, a new method for the decoding of DTMF signals is proposed. The approach, which applies the Arithmetic Fourier Transform, is more efficient, in terms of computational complexity, than existing techniques, thus allowing a faster DTMF decoding. Theoretical aspects and features that determine the accuracy and the complexity of the proposed technique are discussed. The robustness of this method in the presence of quantizers is also examined. Simulation results are presented and a few implementations are suggested.

Sumário

Lista de Tabelas	ix
Lista de Figuras	xi
Prefácio	xii
Capítulo 1 A Representação em Série de Fourier de Sinais Periódicos e a Transformada Discreta de Fourier	1
1.1 Representação em Série de Fourier de Sinais Periódicos em Tempo Contínuo . . .	2
1.2 A Transformada Discreta de Fourier	4
1.3 A DFT e os Coeficientes da Série	6
1.4 Algoritmos Rápidos: Cooley-Tukey e Goertzel	8
1.4.1 A Transformada Rápida de Fourier de Cooley-Tukey	9
1.4.1 O Algoritmo de Goertzel	10
Capítulo 2 A Transformada Aritmética de Fourier	12
2.1 Preliminares Matemáticos	13
2.2 Tufts-Sadasiv	14
2.3 Reed-Tufts	16
2.4 Reed-Shih (AFT Simplificada)	19
2.5 Exemplos e Comentários	21
Capítulo 3 O Sistema DTMF e os Parâmetros da AFT	24
3.1 O Sistema DTMF	24
3.2 A Frequência de Amostragem	27
3.3 O Comprimento da Transformada	28
3.4 A Interpolação	32

Capítulo 4 A Aplicação da AFT	34
4.1 A Decodificação DTMF: $N = 114$	35
4.1.1 $N = 114$, Interpolação de Primeira Ordem	36
4.1.2 $N = 114$, Interpolação de Ordem Zero	40
4.2 O Arredondamento na AFT	47
4.3 Comentários e Outros Resultados	51
Capítulo 5 Implementações e Complexidade Computacional	53
5.1 O Número de Operações	53
5.2 $N = 114$, Interpolação de Primeira Ordem	55
5.3 $N = 114$, Interpolação de Ordem Zero	57
5.4 AFT Arredondada	58
5.5 AFT <i>versus</i> Outros Algoritmos	60
Capítulo 6 Efeitos da Quantização na Decodificação DTMF	62
6.1 A Quantização	62
6.2 A AFT e os Sinais DTMF Quantizados	64
Capítulo 7 Conclusões	70
Apêndice A Demonstração dos Teoremas 2.6 e 2.7	73
A.1 Teorema 2.6	73
A.2 Teorema 2.7	75
Apêndice B Listagem de Programas	77
Apêndice C Jean Joseph Baptiste Fourier	84
Apêndice D Notação	87
Apêndice E Artigos	89
Bibliografia	90

Lista de Tabelas

1.1	Resumo das Propriedades da DFT.....	5
2.1	Amostras exigidas para o cálculo das médias de Bruns.....	22
3.1	Freqüências DTMF e índices j correspondentes	31
4.1	Índices dos coeficientes harmônicos correspondentes às freqüências DTMF ($N = 114, F_s = 8$ kHz)	35
4.2	Somas de Bruns associadas ao n -ésimo coeficiente harmônico ($N = 114, F_s = 8$ kHz)	36
4.3	Descrição das amostras necessárias ao cálculo das somas de Bruns ($N = 114, F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem).....	37
4.4	Descrição das amostras necessárias ao cálculo das somas de Bruns ($N = 114, F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem).....	38
4.5	Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF ($N = 114, F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem).....	39
4.6	Descrição das amostras necessárias ao cálculo das somas de Bruns ($N = 114, F_s = 8$ kHz, interpolação de ordem zero)	41
4.7	Descrição das amostras necessárias ao cálculo das somas de Bruns ($N = 114, F_s = 8$ kHz, interpolação de ordem zero)	43
4.8	Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF ($N = 114, F_s = 8$ kHz, interpolação de ordem zero)	46
4.9	Índices dos coeficientes harmônicos associados a $2n$ -ésima soma de Bruns ($N = 114, F_s = 8$ kHz)	48
4.10	Somas de Bruns associadas ao n -ésimo coeficiente harmônico usando arredondamento ($N = 114, F_s = 8$ kHz)	49
4.11	Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF, usando arredondamento ($N = 114, F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem)	49

4.12	Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF, usando arredondamento ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de ordem zero)	50
4.13	Valor médio do erro percentual de estimativa para cada frequência DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolações de ordem um e zero).	52
5.1	Complexidade computacional da <i>AFT Simplificada</i> na decodificação de sinais DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz)	54
5.2	Descrição das amostras necessárias ao cálculo de $B_{20}(0)$ e $B_{24}(0)$ ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem).	54
5.3	Número otimizado de adições necessárias ao cálculo de cada soma de Bruns na decodificação de sinais DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem)	56
5.4	Complexidade computacional da <i>AFT Simplificada</i> , usando arredondamento, na decodificação de sinais DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz)	60
5.5	Comparativo entre a complexidade computacional da FFT de Cooley-Tukey de base 2 ($N = 128$), do algoritmo de Goertzel ($N = 114$) e da AFT ($N = 114$) na decodificação de sinais DTMF ($F_s = 8$ kHz)	61
6.1	Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem, 256 níveis de quantização)	65
6.2	Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de ordem zero, 256 níveis de quantização)	66
6.3	Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF, usando arredondamento ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem, 256 níveis de quantização)	67
6.4	Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF, usando arredondamento ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de ordem zero, 256 níveis de quantização)	68
6.5	Valor médio do erro percentual de estimativa para cada frequência DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolações de ordem um e zero, 256 níveis de quantização)	69

Lista de Figuras

3.1	Teclado DTMF	26
3.2	Sinal $x_1(t)$ correspondente ao dígito “1” do sistema DTMF	27
3.3	Diagrama simplificado da parte transmissora de um sistema PCM	28
3.4	Seqüência $x_1[i]$ correspondente ao dígito “1” do sistema DTMF	29
3.5	Diferenças entre as freqüências DTMF e as freqüências amostradas pela DFT	31
5.1	Diagrama otimizado para o cálculo de $B_{20}(0)$ e $B_{24}(0)$ ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem)	55
5.2	Diagrama otimizado para o cálculo de $B_{120}(0)$ ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem)	57
5.3	Diagrama simplificado para o cálculo dos coeficientes a_n ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação ordem zero)	58
5.4	Diagrama otimizado para o cálculo dos coeficientes a_n e b_n , usando arredondamento ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem)	59
6.1	Quantizador uniforme com 8 níveis	63
6.2	Modelo de ruído aditivo para o erro de quantização	64
C.1	Jean Baptiste Joseph Fourier	84
E.1	Frontispício dos artigos redigidos aceitos	89

Prefácio

Motivação

Falar em “Análise de Fourier”, hoje, significa bem mais que estudar a propagação do calor ao longo de um corpo ou o movimento de vibração de uma corda... Quase dois séculos depois da publicação de “*Théorie Analytique de la Chaleur*” pela Academia de Ciências de Paris, a representação em série trigonométrica de uma função originou inúmeros outros trabalhos, proporcionou a criação de transformadas em tempo contínuo e discreto e fez expandir para diversos campos o que possuía raízes na Física e na Matemática. Para a Transformada Discreta de Fourier (DFT), uma das mais famosas ferramentas que esse desenvolvimento possibilitou, existe, particularmente, uma lista de incontáveis aplicações que auxiliam a Engenharia, a Biomedicina, a Química e muitas outras áreas do conhecimento.

Quando se entra no contexto de Processamento Digital de Sinais, a DFT funciona como uma porta que permite, através da relação tempo-freqüência, o acesso a soluções para problemas cada vez mais específicos. Entretanto, tornar efetivas tais soluções é algo que envolve um número de fatores que não engloba apenas a pura realizabilidade matemática. Problemas que precisam ser solucionados devem, também, ser solucionados da melhor forma possível. É por este motivo que aplicar a DFT implica uso de algoritmos rápidos e de implementações que tornem eficientes as soluções que se propõe.

No início do século XX, o matemático H. Bruns inaugurou uma das vertentes relacionadas à eficiência computacional na análise espectral de sinais. O procedimento que, posteriormente, recebeu o nome de Transformada Aritmética de Fourier é, na verdade, um algoritmo rápido que, baseado na função de Möbius, calcula os coeficientes da série de Fourier de um sinal e, conseqüentemente, sua Transformada Discreta. No fim da década de 80, a idéia de Bruns foi retomada e refinada, originando uma ferramenta, sob diversos aspectos, com melhor desempenho que algoritmos mais usuais.

Embora a AFT ofereça vantagens sobre outros métodos, a teoria desenvolvida ao longo dos anos ainda encontra-se pouco explorada. O que se tem feito, recentemente, são propostas acerca de como implementá-la, usando processadores paralelos de fibra ótica [1], por exemplo, e estudos que mostram que a mesma pode ser empregada na compressão de imagens [2] e em aplicações onde, antes, utilizava-se a DFT e outras Transformadas Discretas. É em meio a este quadro que, nessa dissertação, propomos a Transformada Aritmética de Fourier como ferramenta na decodificação de sinais DTMF.

De maneira sucinta, podemos descrever o DTMF – *Dual-tone Multifrequency* – como um sistema que associa cada dígito do teclado telefônico a um sinal senoidal que contém duas frequências, uma alta e uma baixa. Esses sinais, por estarem dentro da faixa de frequência de voz, são enviados ao longo da própria linha telefônica e decodificados por processos que, normalmente, empregam Transformadas Rápidas ou algoritmos como o de Goertzel [3, 4, 5]. Além de encaminhar a conexão entre dois usuários, os sinais DTMF podem ser usados em operações que exigem controle à distância, como o acesso a um correio de voz ou ao sistema de automação de uma casa.

Simplificar, oferecer alternativas, diminuir o custo e tornar mais rápida a decodificação do mundialmente difundido DTMF são estímulos para nossa proposta. Adaptar a teoria da Transformada Aritmética de Fourier às peculiaridades desse sistema, apresentar e interpretar resultados é, basicamente, o objetivo desse trabalho.

Organização

Esta dissertação encontra-se dividida em sete capítulos e cinco apêndices cujas descrições resumidas são apresentadas a seguir.

Em alguns pontos do nosso desenvolvimento, a análise de dados que precisamos realizar tornou necessária a exposição de tabelas extensas. A composição da maioria dessas tabelas foi facilitada por programas que implementaram procedimentos de busca ou de contagem. A listagem dos programas relevantes bem como as demonstrações mais longas foram colocadas nos apêndices.

Capítulo 1 Neste capítulo, é introduzida a teoria da análise de Fourier. Além da representação em série e da Transformada Discreta de Fourier, desenvolvemos relações que conectam essas duas ferramentas matemáticas. Por fim, apresentamos os algoritmos de Cooley-Tukey e de Goertzel, usados no cálculo da DFT.

Capítulo 2 Este capítulo contém a teoria da Transformada Aritmética de Fourier. Um breve histórico, a partir do qual podemos acompanhar o refinamento desta técnica, é apresentado. Descrevemos os algoritmos de Tufts-Sadasiv, Reed-Tufts e Reed-Shih (*AFT Simplificada*) e fazemos importantes comentários acerca de cada um deles. Finalizamos exibindo um exemplo e enfatizando algumas particularidades da AFT.

Capítulo 3 Apresentamos as origens e características do sistema DTMF e os princípios para a decodificação de seus sinais. Introduzimos critérios para a escolha de parâmetros como frequência de amostragem, comprimento da transformada e tipo de interpolação, necessários para adaptarmos a teoria da AFT a aplicações envolvendo sinais discretos no tempo.

Capítulo 4 Utilizando a *AFT Simplificada* e as idéias desenvolvidas no Capítulo 3, definimos um conjunto de parâmetros para decodificarmos os sinais DTMF. Descrevemos os detalhes da detecção propriamente dita e apresentamos resultados de simulações. Por fim, sugerimos uma forma de arredondar o cálculo da AFT e comparamos os resultados dessa aproximação aos que obtivemos anteriormente.

Capítulo 5 Neste capítulo, são apresentadas diversas implementações para a decodificação DTMF via AFT. A complexidade computacional de cada uma delas é estudada e comparada aos algoritmos de Cooley-Tukey e de Goertzel, quando empregados na mesma aplicação.

Capítulo 6 Introduzimos o conceito de quantização e realizamos uma breve análise do comportamento da AFT na detecção de sinais DTMF corrompidos por ruído. Os resultados de algumas simulações são apresentados.

Capítulo 7 De forma conclusiva, fazemos um retrospecto acerca dos resultados e êxitos obtidos. Apontamos perspectivas para direcionar trabalhos futuros

Apêndice A Demonstração dos Teoremas 2.6 e 2.7, relacionados a *AFT Simplificada*, cujas provas são mais longas e tediosas.

Apêndice B Listagens dos programas que utilizamos em algumas de nossas simulações.

Apêndice C Este apêndice contém uma breve biografia e um resumo das contribuições do físico e matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier.

Apêndice D Para uniformização da notação, uma lista de símbolos e acrônimos é exibida nesse apêndice.

Apêndice E Enumeração dos trabalhos resultantes diretamente dessa dissertação.

Capítulo 1

A Representação em Série de Fourier de Sinais Periódicos e a Transformada Discreta de Fourier

O desenvolvimento da análise de Fourier é uma longa história que envolve um grande número de estudos individuais e investigações de diversos fenômenos físicos. A utilização de *somas trigonométricas* – somas de senos e cossenos harmonicamente relacionados ou exponenciais complexas periódicas – para descrever fenômenos periódicos remonta à Antigüidade, quando os Babilônicos empregavam idéias deste tipo para prever eventos astronômicos [6]. Ao mundo moderno, esse tema foi apresentado em 1748, quando L. Euler examinou o movimento de vibração de uma corda [7]. Seguiram-se ao estudo feito por Euler diversas críticas focalizando as limitações das séries trigonométricas para representar determinados sinais.

Meio século depois, em 1807, Jean Baptiste Joseph Fourier concluiu um trabalho cuja motivação física era o fenômeno da propagação e difusão do calor [8]. Fourier tinha encontrado séries de senóides harmonicamente relacionadas que representavam a distribuição da temperatura através de um corpo. Além disso, segundo Fourier, qualquer sinal periódico poderia ser representado por uma série.

Nos anos que se seguiram, foram realizados outros estudos com o intuito de refinar os argumentos matemáticos inicialmente propostos. Então, de maneira gradativa, a análise de Fourier e, posteriormente, as Transformadas de Fourier, foram sendo introduzidas em inúmeras disciplinas e aplicações nos campos da Matemática, Ciências e Engenharia. Em paralelo a esse desenvolvimento, surgiram também os fundamentos dos sinais no tempo discreto e, conseqüentemente, as ferramentas para a análise de Fourier dos mesmos.

Neste capítulo, apresentaremos a teoria da representação em série de Fourier de sinais periódicos no tempo contínuo e da Transformada Discreta de Fourier (DFT). A conexão que existe entre essas duas ferramentas é o *ponto de partida* para o entendimento da proposta dessa dissertação. Na última seção, descreveremos dois algoritmos cuja eficiência no cálculo da DFT merece destaque.

1.1 Representação em Série de Fourier de Sinais Periódicos em Tempo Contínuo

Consideremos um sinal periódico $v(t)$ com período T positivo, isto é,

$$v(t) = v(t + T), \text{ para todo } t. \quad (1.1)$$

O período fundamental de $v(t)$ é o menor múltiplo de T para o qual a Equação 1.1 é satisfeita. Consideremos também, o sinal senoidal básico dado por

$$v_s(t) = \cos \omega_0 t, \quad (1.2)$$

e a exponencial complexa periódica dada por

$$v_e(t) = e^{j\omega_0 t}, \quad (1.3)$$

ambos com frequência fundamental ω_0 e período $T = 2\pi / \omega_0$. Ao sinal definido pela Equação 1.3 podemos associar um conjunto de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas,

$$\phi_k(t) \triangleq e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.4)$$

Cada um dos sinais pertencentes a esse conjunto possui uma frequência fundamental que corresponde a ω_0 e, portanto, é periódico com período T . Conseqüentemente, uma combinação linear dessas exponenciais que possua a forma

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad (1.5)$$

possui, também, periodicidade T . Na Equação 1.5, as componentes para $k = +N$ e $k = -N$ são chamadas de N -ésimos harmônicos. O primeiro harmônico corresponde à frequência fundamental. A convergência da série constitui um dos problemas fundamentais da Análise de Fourier [9], porém sua abordagem foge ao escopo deste trabalho.

A representação de um sinal periódico sob a forma apresentada na Equação 1.5 é chamada de representação em série de Fourier. De modo particular, supondo que $v(t)$ é real, mostra-se que a mesma equação pode ser escrita, alternativamente, da seguinte maneira [10]:

$$v(t) = v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k \omega_0 t) - B_k \sin(k \omega_0 t)], \quad (1.6)$$

em que A_k e B_k , como mostra a relação abaixo, determinam a expressão de v_k segundo a notação cartesiana:

$$v_k = A_k + j B_k. \quad (1.7)$$

De fato, como na Equação 1.6, Fourier empregou originalmente senos e cossenos para definir a expansão em série de um sinal.

Agora, precisamos de um procedimento para determinar os coeficientes v_k . Multiplicando cada um dos lados da Equação 1.5 por $e^{-jn\omega_0 t}$ e integrando-os de 0 a $T = 2\pi / \omega_0$, obtemos

$$\int_0^T v(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (1.8)$$

No segundo termo da expressão acima, podemos inverter a ordem da integral e do somatório e escrever

$$\int_0^T v(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right]. \quad (1.9)$$

Utilizando a fórmula de Euler, a integral entre colchetes na Equação 1.9 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t dt + j \int_0^T \sin(k-n)\omega_0 t dt. \quad (1.10)$$

Se $k \neq n$, $\cos(k-n)\omega_0 t$ e $\sin(k-n)\omega_0 t$ representarão senoidais cujo período corresponde a frações de T , mais precisamente $T / |k-n|$. Isto significa que o resultado da integração dessas funções de 0 a T será zero. Para $k = n$, o integrando do lado esquerdo da Equação 1.10 será 1 e, por conseguinte, o valor da integral será T . Em resumo, temos

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

O resultado a que chegamos reduz o lado direito da Equação 1.9 a $T v_n$. Portanto,

$$v_n = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (1.11)$$

Para uniformizar a notação, trocamos o índice n por k na Equação 1.11 e, assim, chegamos a uma expressão para os coeficientes v_k da representação em série de Fourier do sinal $v(t)$:

$$v_k = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (1.12)$$

Para obtermos, também, os coeficientes da série de Fourier segundo a notação trigonométrica, reescrevemos a Equação 1.6 da seguinte forma:

$$v(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \text{sen}(k\omega_0 t)], \quad (1.13)$$

onde $a_0 = v_0$, $a_k = 2A_k$ e $b_k = -2B_k$. Utilizando a Equação 1.7 e, na Equação 1.12, expressando a exponencial complexa em termos de senos e cossenos, chegamos às seguintes relações:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt, \quad (1.14)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad (1.15)$$

e

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \text{sen}(k\omega_0 t) dt. \quad (1.16)$$

É importante dizermos que, para o desenvolvimento das seções e do capítulo subsequentes, será empregada esta última notação. Como veremos, os resultados finais da teoria da Transformada Aritmética de Fourier serão obtidos em função dos coeficientes a_k e b_k (Equação 1.13).

1.2 A Transformada Discreta de Fourier

A partir do trabalho apresentado por Fourier em 1807, pode-se chegar à definição da Transformada de Fourier para uma função no tempo contínuo.

Definição 1.1 *A Transformada de Fourier de uma função $f(t)$ é dada por*

$$F(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.17)$$

se a integral imprópria existe.

$F(\omega)$ é uma função complexa de ω . Sob as seguintes condições de suficiência [11],

- As descontinuidades de f são finitas;
- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$,

a Transformada de Fourier de f converge, $\forall \omega \in (-\infty, \infty)$, para um número. A questão da existência ou não da transformada pode ser posta de lado quando tratamos de sinais que representam uma descrição de uma quantidade física. A realizabilidade física de um sinal é uma condição de suficiência para a existência de sua Transformada de Fourier [9].

A transformada inversa de Fourier é dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} dt.$$

A Transformada Discreta de Fourier é definida de maneira análoga à definição feita no tempo contínuo.

Definição 1.2 *Seja N inteiro positivo e \mathbf{v} um vetor N -dimensional de elementos reais ou complexos. A transformada discreta de Fourier de \mathbf{v} é um vetor \mathbf{V} de igual dimensão cujos elementos são dados por*

$$V[k] \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} v[i] \exp\left(-j \frac{2\pi ki}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.18)$$

Pode-se demonstrar que a Transformada Discreta de Fourier inversa é dada por [12]

$$v[i] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V[k] \exp\left(j \frac{2\pi ki}{N}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.19)$$

Assim, \mathbf{v} e \mathbf{V} formam um par transformado denotado por $\mathbf{v} \xleftrightarrow{DFT} \mathbf{V}$.

A Tabela 1.1 apresenta algumas propriedades da Transformada Discreta de Fourier que são utilizadas ao longo dessa dissertação.

Tabela 1.1: Resumo das propriedades da DFT.

Vetor N -dimensional	DFT (comprimento N)	Propriedades de simetria (válidas para $v[i]$ real)
$v[i], w[i]$	$V[k], W[k]$	$\begin{cases} V[k] = V^* [(-k) \bmod N] \\ \Re\{V[k]\} = \Re\{V[(-k) \bmod N]\} \\ \Im\{V[k]\} = -\Im\{V[(-k) \bmod N]\} \end{cases}$
$a.v[i] + b.w[i]$	$a.V[k] + b.W[k]$	
$v[(n-m) \bmod N]$	$e^{-j\frac{2\pi km}{N}} V[k]$	

1.3 A DFT e os Coeficientes da Série

No início deste capítulo, mencionamos a importância da conexão existente entre os coeficientes da representação em série de Fourier de um sinal e a DFT de uma versão discreta do mesmo. Nesta seção, demonstraremos de que forma se chega à relação que envolve essas duas ferramentas.

Começemos reescrevendo a Equação 1.13, que corresponde à expansão em série de Fourier de um sinal $v(t)$ com período T ,

$$v(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k \omega_0 t) + b_k \text{sen}(k \omega_0 t)]. \quad (1.20)$$

Considerando que apenas os $N / 2$ primeiros termos da série acima são significativos (supondo que N é par), podemos truncá-la, omitindo os harmônicos cuja ausência não altera significativamente a representação. Dessa forma, temos:

$$v(t) \cong a_0 + \sum_{k=1}^{N/2} [a_k \cos(k \omega_0 t) + b_k \text{sen}(k \omega_0 t)]. \quad (1.21)$$

Se amostrarmos equispadamente N pontos ao longo de um período de $v(t)$, originaremos uma seqüência $v[i]$. O equivalente discreto da Equação 1.21 pode, então, ser escrito da seguinte maneira:

$$v[i] = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2} a_k \cos\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) + \sum_{k=1}^{N/2} b_k \text{sen}\left(\frac{2\pi k i}{N}\right),$$

$$v[i] = a_0 + a_{N/2} (-1)^i + \sum_{k=1}^{(N-2)/2} a_k \cos\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) + \sum_{k=1}^{(N-2)/2} b_k \text{sen}\left(\frac{2\pi k i}{N}\right). \quad (1.22)$$

Agora, se escrevermos $V[k]$, na Equação 1.18, sob a forma cartesiana, isto é,

$$V[k] = \Re\{V[k]\} + j \Im\{V[k]\}, \quad (1.23)$$

em que $\Re\{V[k]\}$ e $\Im\{V[k]\}$ são reais, podemos expressar a Equação 1.19 de uma maneira diferente. Desse modo, é possível encontrar uma relação entre $V[k]$ e os coeficientes da expansão em série de Fourier do mesmo $v[i]$.

Para facilitar o desenvolvimento, faremos $\Re\{V[k]\} \triangleq R_k$ e $\Im\{V[k]\} \triangleq I_k$. Substituindo a Equação 1.23 na Equação 1.19 e escrevendo o termo exponencial sob a forma trigonométrica, temos

$$v[i] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (R_k + j.I_k) \left(\cos\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) + j.\text{sen}\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) \right),$$

$$v[i] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ R_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) + j.R_k \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) + j.I_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) - I_k \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) \right\}. \quad (1.24)$$

Se observarmos as propriedades de simetria que envolvem $V[k]$, podemos simplificar a expressão acima. Sabemos que $V[k] = V^*[(-k) \bmod N]$, conseqüentemente, $R_k = R_{(-k) \bmod N}$ e $I_k = -I_{(-k) \bmod N}$. Observando, também, as relações trigonométricas $\text{sen}(\alpha) = -\text{sen}(-\alpha)$ e $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, após algumas manipulações, reescrevemos a Equação 1.24 da seguinte maneira:

$$v[i] = \frac{V[0]}{N} + \frac{V[N/2](-1)^i}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{(N-2)/2} R_k \cos\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) - \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{(N-2)/2} I_k \text{sen}\left(\frac{2\pi k i}{N}\right). \quad (1.25)$$

Comparando as Equações 1.22 e 1.25, ambas referentes a $v[i]$, validamos as seguintes correspondências:

$$a_0 = \frac{V[0]}{N} \quad \text{e} \quad a_{N/2} = \frac{V[N/2]}{N},$$

$$a_k = \frac{2.\Re\{V[k]\}}{N} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{2.\Im\{V[k]\}}{N}, \quad \text{para } 1 \leq k \leq \frac{(N-2)}{2}. \quad (1.26)$$

Se N for ímpar, procedemos de maneira análoga e consideramos que apenas os $(N-1)/2$ primeiros termos da série de Fourier de $v(t)$ são significativos. Dessa forma, podemos escrever:

$$v(t) \cong a_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \text{sen}(k\omega_0 t)]. \quad (1.27)$$

O equivalente discreto da Equação 1.27 pode, então, ser escrito da seguinte maneira:

$$v[i] = a_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} a_k \cos\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} b_k \text{sen}\left(\frac{2\pi k i}{N}\right). \quad (1.28)$$

Observando as propriedades de simetria que envolvem $V[k]$ e as relações trigonométricas as quais nos referimos, podemos reescrever a Equação 1.24, para N ímpar. Obtemos

$$v[i] = \frac{V[0]}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{(N-1)/2} R_k \cos\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) - \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{(N-1)/2} I_k \text{sen}\left(\frac{2\pi k i}{N}\right). \quad (1.29)$$

Finalmente, comparando as Equações 1.28 e 1.29, ambas referentes a $v[i]$, validamos as seguintes correspondências:

$$a_0 = \frac{V[0]}{N},$$

$$a_k = \frac{2\Re\{V[k]\}}{N} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{2\Im\{V[k]\}}{N}, \quad \text{para } 1 \leq k \leq \frac{(N-1)}{2}. \quad (1.30)$$

Os conjuntos de relações 1.26 e 1.30 nos mostram que, a partir de uma seqüência $V[k]$ com N pontos, correspondente à DFT de uma seqüência $v[i]$ real de mesmo comprimento, somos capazes de calcular os $N/2$ (ou $(N-1)/2$, se N for ímpar) primeiros coeficientes da série de Fourier de $v(t)$ e vice-versa. $v(t)$ é a versão contínua de $v[i]$. Assim, podemos obter os coeficientes a_k e b_k através de algoritmos rápidos com aspectos vantajosos de eficiência computacional e, então, avaliar o espectro de $v[i]$ ou obter com facilidade as componentes de $V[k]$.

1.4 Algoritmos Rápidos: Cooley-Tookey e Goertzel

Na seção 1.2, definimos uma das mais importantes ferramentas em Processamento Digital de Sinais, a Transformada Discreta de Fourier, entretanto, nada foi discutido acerca do seu cálculo ou da sua implementação. Esta seção é dedicada à apresentação de alguns algoritmos¹ que calculam a DFT de modo eficiente, ou seja, com complexidade computacional reduzida em relação ao método direto. Particularmente, serão descritos os algoritmos de Cooley-Tukey e de Goertzel. O primeiro, que surgiu em 1965 [13], representou um marcante impulso no desenvolvimento das transformadas rápidas. Este trabalho originou o aparecimento de inúmeros outros métodos, variações e implementações nas mais diversas arquiteturas.

O algoritmo de Goertzel, apesar de não ser considerado uma transformada rápida, proporciona uma vantagem computacional quando se deseja obter apenas algumas componentes de uma DFT. Como dissemos de modo introdutório, a aplicação tratada nessa dissertação possui a mesma particularidade e é por este motivo que o algoritmo também será aqui apresentado.

¹Em [14], são apresentados 10 algoritmos criados no século XX e que merecem destaque.

1.4.1 A Transformada Rápida de Fourier de Cooley-Tukey

A Transformada Discreta de Fourier de um vetor \mathbf{v} escrito sob a forma da Equação 1.18 requer um número de multiplicações e adições da ordem de N^2 . No entanto, se N for um número composto, pode-se modificar a DFT original, convertendo-a numa espécie de transformada bidimensional. É nesse princípio que se baseia a Transformada Rápida de Fourier (FFT) de Cooley-Tukey.

Para desenvolvermos o algoritmo é necessário que se faça dois mapeamentos de acordo com a fatoração de N , um de entrada e outro de saída. Supondo que $N = N'N''$, redefinimos os índices dos vetores de entrada e de saída, respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} i &= i' + N' i'', & i' &= 0, \dots, N' - 1 \\ & & i'' &= 0, \dots, N'' - 1. \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} k &= N'' k' + k'', & k' &= 0, \dots, N' - 1 \\ & & k'' &= 0, \dots, N'' - 1. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Substituindo as Equações 1.31 e 1.32 na Equação 1.18, temos

$$V[N'' k' + k''] = \sum_{i''=0}^{N''-1} \sum_{i'=0}^{N'-1} W_N^{(i'+N'i'')(N''k'+k'')} v[i' + N' i''], \quad (1.33)$$

onde $W_N = \exp(-j 2\pi/N)$. Expandindo o produto no expoente e fazendo $W_N^{N'} = \gamma$ e $W_N^{N''} = \beta$, após algumas manipulações, reescrevemos a Equação 1.33 em termos das variáveis bidimensionais [15]:

$$V[k', k''] = \sum_{i'=0}^{N'-1} \beta^{i'k'} \left[W_N^{i'k''} \sum_{i''=0}^{N''-1} \gamma^{i''k''} v[i', i''] \right]. \quad (1.34)$$

O número de multiplicações e adições complexas necessárias para realizar este algoritmo são, respectivamente,

$$\begin{aligned} M_C(N) &= N(N'+N''+1), \\ A_C(N) &= N(N'+N''-2). \end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga, se N for uma potência de 2, pode-se iterar o procedimento e derivar um outro algoritmo conhecido como Cooley-Tukey de base 2. Mostra-se que a complexidade multiplicativa e aditiva desse algoritmo são dadas, respectivamente, por [15]

$$M_C(N) = \frac{N}{2} \log_2 N, \quad (1.35)$$

$$A_C(N) = N \log_2 N. \quad (1.36)$$

Considerando que realizar uma multiplicação complexa é o mesmo que realizar três multiplicações e três adições reais, podemos reescrever as Equações 1.35 e 1.36, também, em termos de operações reais:

$$M_R(N) = \frac{3N}{2} \log_2 N, \quad (1.37)$$

$$A_R(N) = \frac{7N}{2} \log_2 N. \quad (1.38)$$

Para ilustrar a eficiência do algoritmo de Cooley-Tukey de base 2, basta compararmos o número de multiplicações complexas necessárias ao cálculo de uma DFT de comprimento 64, por exemplo. Pelo método direto, precisaríamos efetuar 4096 operações, enquanto que, usando a transformada rápida, efetuaríamos apenas 264.

1.4.2 O Algoritmo de Goertzel

Em muitas aplicações, deseja-se obter apenas algumas componentes da Transformada Discreta de Fourier de uma seqüência $v[i]$ com N pontos. É possível mostrarmos que, quando este número é menor que $\log_2 N$, o uso do algoritmo de Goertzel torna-se vantajoso diante de Transformadas Rápidas que calculam a DFT completa, como as que foram apresentadas na seção anterior [12].

A redução da complexidade computacional proporcionada por este algoritmo baseia-se na periodicidade da seqüência $W_N^{kn} = \exp(-j2\pi kn/N)$. Como $W_N^{-kN} = 1$, podemos multiplicar o lado direito da Equação 1.18 por este fator sem que a mesma seja alterada. Obtemos

$$V[k] = \sum_{r=0}^{N-1} v[r] W_N^{-k(N-r)}. \quad (1.39)$$

Em seguida, definimos a seqüência

$$y_k[i] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} v[r] W_N^{-k(i-r)} u[i-r]. \quad (1.40)$$

Das Equações 1.39 e 1.40, segue que

$$V[k] = y_k[i] \Big|_{i=N}. \quad (1.41)$$

A Equação 1.40 pode ser interpretada como uma convolução discreta entre a seqüência $v[i]$ e a seqüência $W_N^{-ki} u[i]$. Conseqüentemente, $y_k[i]$ pode ser visto como a saída de um sistema linear invariante no tempo com resposta ao impulso $W_N^{-ki} u[i]$, quando a entrada é $v[i]$. Em particular, $V[k]$ é a saída quando $i = N$.

Para uma entrada real, a implementação do sistema ao qual nos referimos requer $2N + 1$ adições reais e $N + 1$ multiplicações reais. Para o algoritmo de Goertzel, essa é a complexidade computacional associada ao cálculo de uma componente específica [15]. A obtenção de M componentes envolve um número de multiplicações e adições reais dados, respectivamente, por

$$M_R(N) = M(N + 1), \quad (1.42)$$

$$A_R(N) = M(2N + 1). \quad (1.43)$$

Capítulo 2

A Transformada Aritmética de Fourier

Um fator importante para avaliar um algoritmo rápido é a sua complexidade aritmética, isto é, o número de operações necessárias para realizá-lo. Em 1903, o matemático H. Bruns¹ desenvolveu um método para o cálculo dos coeficientes da série de Fourier de sinais periódicos usando a fórmula de inversão de Möbius² [16]. Posteriormente, numa monografia de 1947 [17], Aurel Wintner utilizou esta mesma técnica, denominando-a Transformada Aritmética de Fourier (AFT). Como a teoria é baseada na função de Möbius, tem-se multiplicações apenas por $\{-1, 0, 1\}$ e possíveis fatores de escalonamento.

Em 1988, Donald W. Tufts e G. Sadasiv – independentemente – redescobriram um método muito parecido com o que Bruns havia proposto. O algoritmo de Tufts-Sadasiv [18], entretanto, limitava-se a calcular apenas os coeficientes de sinais periódicos pares. Tal limitação foi removida em 1990 por Irving S. Reed, D. W. Tufts *et al.* [19], que possibilitaram o uso da transformada aritmética para o cálculo dos coeficientes da série de Fourier de funções periódicas pares e ímpares.

I. S. Reed, M. T-, Shih *et al.*, em 1992, refinaram o algoritmo anterior e propuseram a *AFT Simplificada*, que envolve um cálculo mais simétrico dos coeficientes a_n e b_n [20]. Surpreendentemente, o resultado deste trabalho ficou idêntico ao procedimento original criado por Bruns.

Cada um dos algoritmos que mencionamos³ representa o aperfeiçoamento da versão anterior. Neste capítulo, descreveremos esta evolução e apresentaremos exemplos e comentários sobre a AFT.

¹ERNST HEINRICH BRUNS (1848-1919) nasceu em Berlim. Foi aluno de Doutorado de Weierstrass e Kummer. Era interessado em Astronomia, Matemática e Geodésia. Trabalhou no “problema dos três corpos”. Morreu em Leipzig, Alemanha.

²AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790-1868) nasceu em Schulpforta, Saxônia (atualmente, Alemanha). Foi aluno de Gauss e Pfaff (professor de Gauss). Seus estudos se concentraram em Geometria Projetiva, Ocultação de Planetas (Möbius, assim como Gauss, era astrônomo) e Topologia. É famosa a fita que leva seu nome. Morreu em Leipzig.

³Além dos algoritmos apresentados nessa dissertação, outros algoritmos aritméticos baseados na função de Möbius têm sido introduzidos [21, 22].

2.1 Preliminares Matemáticos

Antes de iniciarmos o desenvolvimento teórico da AFT, apresentaremos algumas ferramentas matemáticas que, posteriormente, serão necessárias para o entendimento do mesmo.

Começemos pelo lema fundamental em que se baseia todo o algoritmo.

Lema 2.1 Para k, k' e m inteiros, temos que

$$\sum_{m=0}^{k-1} \cos\left(2\pi m \frac{k'}{k}\right) = \begin{cases} k, & \text{se } k \mid k' \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.1)$$

e

$$\sum_{m=0}^{k-1} \text{sen}\left(2\pi m \frac{k'}{k}\right) = 0. \quad (2.2)$$

Demonstração: Tomemos a expressão $\sum_{m=0}^{k-1} \left[e^{2\pi j \frac{k'}{k}} \right]^m$. Observemos que, se $k \mid k'$,

$$\sum_{m=0}^{k-1} \left[e^{2\pi j \frac{k'}{k}} \right]^m = \sum_{m=0}^{k-1} 1 = k.$$

Caso contrário, temos que

$$\sum_{m=0}^{k-1} \left[e^{2\pi j \frac{k'}{k}} \right]^m = \frac{1 - e^{j2\pi k'}}{1 - e^{j2\pi \frac{k'}{k}}} = 0.$$

Assim,

$$\sum_{m=0}^{k-1} e^{2\pi j m \frac{k'}{k}} = \begin{cases} k, & \text{se } k \mid k' \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tomando-se a parte real e imaginária, finaliza-se a demonstração. ■

Definição 2.1 (Função de Möbius) A função de Möbius, $\mu(n)$, é definida por:

$$\mu(n) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ (-1)^r & \text{se } n = \prod_{i=1}^r p_i, p_i \text{ primos distintos,} \\ 0 & \text{se } p^2 \mid n \text{ para algum primo } p. \end{cases} \quad (2.3)$$

Teorema 2.1

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n > 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Demonstração: Vide [23]. ■

Teorema 2.2 (Fórmula de Inversão de Möbius para Séries Finitas) *Seja n inteiro e positivo e f_n uma seqüência não-nula para $1 \leq n \leq N$ e nula para $n > N$. Se*

$$g_n = \sum_{k=1}^{\lfloor N/n \rfloor} f_{kn}, \quad (2.5)$$

então

$$f_n = \sum_{m=1}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(m) g_{mn}. \quad (2.6)$$

Demonstração: Vide [24]. ■

2.2 Tufts-Sadasiv

Assumamos, sem perda de generalidade, que $v(t)$ é uma função real, par, com período unitário e média nula ($V_0 = 0$), cuja série de Fourier é expressa por

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t), \quad (2.7)$$

onde $v_k(t)$ é representado por

$$v_k(t) = V_k \cdot \cos(2\pi kt) \quad (2.8)$$

e V_k é a magnitude do k -ésimo harmônico.

Consideremos significativos apenas os N primeiros harmônicos, de modo que podemos fazer com que as componentes em que $i > N$ sejam nulas (hipótese de sinal banda limitada), isto é, $v_k(t) = 0$ para $k > N$. Dessa maneira, na Equação 2.7, basta que façamos o somatório até N .

Definição 2.2 *A k -ésima soma parcial é dada por*

$$S_n(t) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} v\left(t - \frac{m}{n}\right), \quad (2.9)$$

para $n = 1, 2, \dots, N$. ■

Substituindo o resultado das Equações 2.7 e 2.8 em 2.9, temos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
S_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} v\left(t - \frac{m}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos\left(2\pi k t - 2\pi k \frac{m}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \sum_{m=0}^{n-1} \left[\cos(2\pi k t) \cos\left(2\pi k \frac{m}{n}\right) - \operatorname{sen}(2\pi k t) \operatorname{sen}\left(2\pi k \frac{m}{n}\right) \right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \cos(2\pi k t) \cdot \begin{cases} n & \text{se } n \mid k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \sum_{n \mid k} v_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_{mn}(t), \quad n = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dessa forma, conseguimos expressar a n -ésima soma parcial em função dos harmônicos de $v(t)$ e não mais em função de suas amostras. Como consideramos que $v_n(t) = 0$, $n > N$, apenas os $\lfloor N/n \rfloor$ primeiros termos da Equação 2.10 serão possivelmente diferentes de zero.

O objetivo, agora, é inverter a Equação 2.10 e expressar os harmônicos em função das somas parciais que, por sua vez, são obtidas através das amostras no tempo do sinal $v(t)$.

Teorema 2.3 *Os harmônicos de $v(t)$ podem ser obtidos pela seguinte fórmula de inversão:*

$$v_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) S_{mk}(t), \quad \forall k = 1, \dots, N. \tag{2.11}$$

Demonstração: Começemos utilizando a Equação 2.10 em 2.11. Daí vem que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) S_{mk}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) \sum_{n=1}^{\infty} v_{kmn}(t). \tag{2.12}$$

Finalmente, observemos que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) \sum_{n=1}^{\infty} v_{kmn}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(m) v_{kmn}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j(t) \left(\sum_{\substack{m \mid j \\ k}} \mu(m) \right). \tag{2.13}$$

Pelo Teorema 2.1, o somatório interno será diferente de zero apenas se $j / k = 1$. Ou seja, ao somatório externo, restará apenas o termo $v_k(t)$. Dessa maneira, o teorema fica provado. ■

Sobre esse algoritmo podemos observar o seguinte [18]:

- Essa versão inicial da AFT sofre de uma forte restrição: apenas sinais pares podem ser tratados pelo algoritmo;
- Todo cálculo é feito utilizando apenas adições (exceto por multiplicações que se devem a escalonamentos necessários à obtenção das somas parciais);
- O algoritmo é adequado para processamento paralelo, pois as somas parciais podem ser computadas independentemente;
- A teoria é inteiramente baseada na série de Fourier, ao invés de considerar a transformada discreta propriamente dita (DFT).

2.3 Reed-Tufts

Este algoritmo, que representa uma generalização daquele proposto por Tufts-Sadasiv, foi apresentado por Reed⁴ *et al.* em 1990 [19]. A limitação de admitir o tratamento apenas de sinais pares, presente no procedimento anterior, foi removida. Dessa maneira, esse novo algoritmo permite que qualquer função periódica tenha seus coeficientes de Fourier calculados.

Consideremos uma função $v(t)$ real com período T cuja série de Fourier é finita com N termos (hipótese de sinal banda limitada) e dada por

$$v(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right), \quad (2.14)$$

em que a_0 é a média de $v(t)$. Observemos que a equação acima pode ser escrita a partir da Equação 1.12. Basta trocarmos o índice k por n e expressarmos a frequência fundamental em função do período do sinal. Em 2.14, os coeficientes pares e ímpares da série de Fourier são a_n e b_n , respectivamente.

⁴IRVING S. REED (1923-) nasceu em Seattle, EUA. Identificou a estrutura algébrica dos códigos de Muller. Na década de '50, desenvolveu processadores digitais para uso em radares. E, em 1958, projetou o computador inteiramente transistorizado, o CG-24 [25]. Em 1960, publicou com Gustave Solomon o artigo "Polynomial Codes over Certain Finite Fields", introduzindo os códigos Reed-Solomon. É professor emérito da Universidade do Sul da Califórnia.

Denotemos por $\bar{v}(t)$ o sinal $v(t)$ subtraído de sua média a_0 . Daí, temos que

$$\bar{v}(t) = v(t) - a_0 \quad (2.15)$$

$$= \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right). \quad (2.16)$$

Um atraso de αT em $\bar{v}(t)$ nos leva à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \bar{v}(t - \alpha T) &= \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(2\pi n \left(\frac{t}{T} + \alpha\right)\right) + \sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen}\left(2\pi n \left(\frac{t}{T} + \alpha\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^N c_n(\alpha) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + \sum_{n=1}^N d_n(\alpha) \operatorname{sen}\left(2\pi n \frac{t}{T}\right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que $-1 < \alpha < 1$ e

$$c_n(\alpha) = a_n \cos(2\pi n \alpha) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n \alpha), \quad (2.18)$$

$$d_n(\alpha) = -a_n \operatorname{sen}(2\pi n \alpha) + b_n \cos(2\pi n \alpha). \quad (2.19)$$

Definição 2.3 A n -ésima soma parcial será dada por

$$S_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \bar{v}\left(\frac{m}{n}T - \alpha T\right), \quad (2.20)$$

em que $-1 < \alpha < 1$.

Agora, vamos mostrar que é possível definir os coeficientes a_n e b_n em função de $c_n(\alpha)$. Entretanto, encontraremos antes uma expressão para a quantidade $c_n(\alpha)$ em termos das somas parciais.

Teorema 2.4 Os coeficientes $c_n(\alpha)$ são calculados através da fórmula de inversão de Möbius para séries finitas e são expressos por

$$c_n(\alpha) = \sum_{l=1}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) S_{ln}(\alpha). \quad (2.21)$$

Demonstração: Substituindo o resultado da Equação 2.17 na Equação 2.20, temos o seguinte resultado:

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^N c_k(\alpha) \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi k m}{n}\right) + \sum_{k=1}^N d_k(\alpha) \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k m}{n}\right). \quad (2.22)$$

Uma aplicação direta do Lema 2.1 nos leva a

$$S_n(\alpha) = \sum_{l=1}^{\lfloor N/n \rfloor} c_{ln}(\alpha). \quad (2.23)$$

Temos o teorema provado após o uso da fórmula de inversão de Möbius para séries finitas enunciado no Teorema 2.2. ■

Estamos agora em condição de enunciar o seguinte resultado:

Teorema 2.5 *Os coeficientes a_n e b_n da série de Fourier para $n = 2^k(2m+1)$ são computados por⁵*

$$a_n = c_n(0), \quad (2.24)$$

$$b_n = (-1)^m c_n\left(\frac{1}{2^{k+2}}\right) \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.25)$$

em que k e m são determinados pela fatoração de $n = 2^k(2m+1)$.

Demonstração: Observando a Equação 2.18, obtemos diretamente que, para $\alpha = 0$, $a_n = c_n(0)$.

Para $\alpha = \frac{1}{2^{k+2}}$ e $n = 2^k(2m+1)$, temos dois subcasos a considerar: quando m for par e quando for ímpar.

- Para $m = 2q$, temos que $n = 2^k(4q+1)$. Assim,

$$2\pi n\alpha = 2\pi \frac{2^k(4q+1)}{2^{k+2}} = 2\pi q + \frac{\pi}{2}. \quad (2.26)$$

Dessa forma, substituindo esse valor em 2.18, temos que

$$\begin{aligned} c_n\left(\frac{1}{2^{k+2}}\right) &= a_n \cos\left(2\pi q + \frac{\pi}{2}\right) + b_n \sin\left(2\pi q + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= b_n. \end{aligned} \quad (2.27)$$

- Para $m = 2q + 1$, temos que $n = 2^k(4q+3)$. Dessa maneira,

$$2\pi n\alpha = 2\pi \frac{2^k(4q+3)}{2^{k+2}} = 2\pi q + \frac{3\pi}{2}. \quad (2.28)$$

⁵Mostra-se que qualquer inteiro pode ser fatorado assim [19].

Recorrendo novamente à Equação 2.18, chegamos à seguinte expressão

$$\begin{aligned} c_n \left(\frac{1}{2^{k+2}} \right) &= a_n \cos \left(2\pi q + \frac{3\pi}{2} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(2\pi q + \frac{3\pi}{2} \right) \\ &= -b_n. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Unindo o resultado desses subcasos, deriva-se facilmente que

$$b_n = (-1)^m c_n \left(\frac{1}{2^{k+2}} \right). \quad (2.30)$$

■

Utilizando esse algoritmo, o cálculo de todos os coeficientes a_n e b_n até o N -ésimo harmônico requer um número de multiplicações e adições reais dados, respectivamente, por

$$M_R(N) = 3N, \quad (2.31)$$

$$A_R(N) = \frac{3}{2} N^2. \quad (2.32)$$

2.4 Reed-Shih (AFT Simplificada)

Este algoritmo, que foi apresentado no ano de 1992 em [20] por Reed *et al.*, é uma evolução do algoritmo proposto por Reed-Tufts. Neste método, as somas parciais são redefinidas de acordo com as somas propostas originalmente por H. Bruns [16] em 1903.

Definição 2.4 (Somas de Bruns) *A $2n$ -ésima soma alternante de Bruns, $B_{2n}(\alpha)$, é definida por*

$$B_{2n}(\alpha) \triangleq \frac{1}{2n} \sum_{m=0}^{2n-1} (-1)^m v \left(m \frac{T}{2n} + \alpha T \right). \quad (2.33)$$

Observando a definição de c_n e fazendo uso do Teorema 2.4 e da Definição 2.3, chegamos ao seguinte resultado.

Teorema 2.6 *Os coeficientes $c_n(\alpha)$ são dados pela fórmula de inversão de Möbius para séries finitas, da seguinte forma*

$$c_n(\alpha) = \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) B_{2nl}(\alpha). \quad (2.34)$$

Demonstração: Vide Apêndice A. ■

Neste ponto, já temos todo o ferramental matemático para avaliar os coeficientes da série de Fourier de $v(t)$. A Equação 2.33 nos fornece a relação entre as amostras desse sinal e as somas de Bruns; a relação entre os coeficientes c_n e as somas de Bruns é dada em 2.34. Resta-nos, portanto, encontrar uma expressão que relacione os coeficientes de Fourier (a_n e b_n) com os coeficientes c_n . Se observarmos a Equação 2.18, podemos distinguir duas condições:

- $a_n = c_n(0)$.
- $b_n = c_n(1/4n)$.

Agora, utilizando estas condições de partida e o Teorema 2.6, podemos enunciar o teorema que segue.

Teorema 2.7 (Reed-Shih) *Os coeficientes de Fourier a_n e b_n são avaliados por*

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt, \quad (2.35)$$

$$a_n = \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) B_{2nl}(0), \quad (2.36)$$

$$b_n = \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) (-1)^{\frac{l-1}{2}} B_{2nl}\left(\frac{1}{4nl}\right), \quad (2.37)$$

para $n = 1, \dots, N$.

Demonstração: Vide apêndice A. ■

Utilizando esse algoritmo, o cálculo de todos os coeficientes a_n e b_n até o N -ésimo harmônico requer um número de multiplicações e adições reais dados, respectivamente, por

$$M_R(N) = 2N, \quad (2.38)$$

$$A_R(N) = 2N^2. \quad (2.39)$$

O algoritmo proposto por Reed-Shih apresenta as seguintes características:

- A AFT Simplificada é mais “balanceada” que a versão anterior proposta por Reed-Tufts, uma vez que apresenta esforços computacionais similares para o cálculo dos coeficientes a_n e b_n (ambos utilizam a soma de Bruns);
- Como as somas de Bruns podem ser calculadas independentemente, o algoritmo sugere naturalmente uma implementação utilizando processamento paralelo;
- Possui complexidade aritmética ligeiramente menor que a de seu antecessor.

2.5 Exemplo e Comentários

Tomemos um sinal $v(t)$ com período $T = 1$ s. Construiremos um pequeno exemplo em que se deseja calcular os coeficientes de Fourier até o quinto harmônico, utilizando o algoritmo de Reed-Shih.

De acordo com a teoria desenvolvida na Seção 2.4, os coeficientes a_n e b_n da série de Fourier de $v(t)$, na forma matricial, serão expressos por

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ B_8(0) \\ B_{10}(0) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

e

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2(1/4) \\ B_4(1/8) \\ B_6(1/12) \\ B_8(1/16) \\ B_{10}(1/20) \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Observemos que a_n e b_n são obtidos de $B_n(\cdot)$ através de matrizes similares. Isso se deve à simetria do algoritmo que, do ponto de vista implementacional, permite uma arquitetura mais simples.

Observando mais atentamente a definição de $B_n(\alpha)$, podemos compor a Tabela 2.1, que relaciona as médias de Bruns, $B_n(\alpha)$, com as amostras de $v(t)$ necessárias ao seu cálculo. A partir da tabela, verificamos que são requeridas 40 amostras⁶ bem determinadas do sinal para que avaliemos seus coeficientes harmônicos com exatidão.

Podemos, então, levantar alguns questionamentos sobre o algoritmo [26]:

- O intervalo entre as amostras necessárias para o cálculo exato dos coeficientes de Fourier não é constante. Basta observar o tempo entre as amostras;

⁶Para o exemplo em questão, se estivéssemos usando a DFT, precisaríamos apenas de 5 amostras! De forma geral, é essa diferença que determina a desvantagem da AFT no que diz respeito à complexidade aditiva do algoritmo [27, 28].

- Para capturar todas as amostras necessárias ao cálculo das somas de Bruns, é preciso um amostrador de frequência muito elevada. No exemplo aqui ilustrado, deveríamos ter um relógio de 125 Hz para obter todas as amostras exigidas pelo algoritmo para avaliar o espectro de um sinal de 1 Hz!

Tabela 2.1: Amostras exigidas para o cálculo das médias de Bruns.

Médias de Bruns	Instantes das amostras (s)
$B_2(0)$	$0, \frac{1}{2}$
$B_4(0)$	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$
$B_6(0)$	$0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$
$B_8(0)$	$0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$
$B_{10}(0)$	$0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}$
$B_2(1/4)$	$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$
$B_4(1/8)$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$
$B_6(1/12)$	$\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}, \frac{11}{12}$
$B_8(1/16)$	$\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}$
$B_{10}(1/20)$	$\frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{1}{4}, \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{19}{20}$

À primeira vista, tais considerações podem parecer perturbadoras a ponto de comprometer a praticidade desse algoritmo, pois, normalmente, tem-se apenas amostras discretizadas a uma taxa bem menor que a exigida pelo mesmo para o cálculo exato dos coeficientes a_n e b_n .

Uma solução *empírica* para esse problema é a de realizar uma aproximação da amostra necessária empregando a amostra disponível mais próxima. Vamos considerar que o sinal $v(t)$ do exemplo tivesse sido amostrado por um relógio de período $T_0 = 1/10$ s. Dessa forma, teríamos disponíveis apenas as seguintes amostras:

$$v(0), v\left(\frac{1}{10}\right), v\left(\frac{1}{5}\right), v\left(\frac{3}{10}\right), v\left(\frac{2}{5}\right), v\left(\frac{1}{2}\right), v\left(\frac{3}{5}\right), v\left(\frac{7}{10}\right), v\left(\frac{4}{5}\right), v\left(\frac{9}{10}\right).$$

Para obtermos a_2 , por exemplo, precisamos calcular $B_4(0)$ e, conseqüentemente, devemos conhecer o valor da amostra $v(1/4)$ (vide Tabela 2.1), que é um valor não disponível segundo a amostragem de 10 Hz realizada. Procedendo a um arredondamento para a amostra mais próxima, utilizaríamos $v(3/10)$ ao invés de $v(1/4)$. Esse procedimento é conhecido como *interpolação de ordem zero*.

A validade desse arredondamento está intimamente associada à taxa de amostragem, T_0 , do sinal. Quanto maior a precisão exigida, maior o número de amostras no mesmo intervalo de tempo e, portanto, maior a frequência de amostragem. Obviamente que uma outra forma de se obter erros menores e validar o cálculo é utilizar uma interpolação de ordem maior, como a interpolação de 1ª ordem. Uma análise detalhada do erro de aproximação é encontrada em [19, 24].

Capítulo 3

O Sistema DTMF e os Parâmetros da AFT

Como vimos no primeiro capítulo deste trabalho, existe uma relação direta entre os coeficientes da série de Fourier de um sinal e as componentes da DFT de uma versão discreta do mesmo. De maneira geral, podemos afirmar que é essa conexão que nos permite utilizar a Transformada Aritmética de Fourier em aplicações onde, normalmente, usa-se a DFT calculada a partir de algoritmos rápidos mais tradicionais, como o de Cooley-Tukey.

Particularmente, estamos interessados em aplicar a AFT na decodificação de sinais DTMF – *Dual-Tone Multifrequency* – os quais correspondem à soma de duas senóides [29]. Isto significa que precisamos realizar a análise espectral de um conjunto de sinais cujas características são previamente conhecidas. Nesse procedimento será empregada a *AFT Simplificada*, proposta em [20] e apresentada na Seção 2.4 dessa dissertação. Em relação ao cálculo convencional da DFT, o uso desse algoritmo representa uma significativa diminuição na complexidade computacional do processo de detecção que desejamos executar.

Nesse capítulo, descreveremos o funcionamento do sistema de sinalização DTMF, a fim de proporcionar a familiarização com suas peculiaridades e representações. Será introduzida uma discussão acerca de alguns parâmetros necessários à utilização da AFT na aplicação mencionada, como a frequência de amostragem, o comprimento da transformada e o tipo de interpolação usada.

3.1 O Sistema DTMF

O DTMF, também conhecido como *Touch Tone*, é um sistema de sinalização usado em telefonia que envia, ao longo da própria linha, sinais na faixa de frequência de voz [30]. O

DTMF é uma espécie de FSK – *Frequency Shift Keying* – onde cada sinal é diferenciado pelo seu conteúdo freqüencial. Atualmente, pelo menos no Ocidente, baseia-se no DTMF a configuração da maioria das centrais telefônicas.

Antes do DTMF, a cada número telefônico discado associava-se uma série de *clicks* (interrupções) que eram enviados ao longo da linha, a discagem por pulso. Os *clicks* significavam efetivamente o estabelecimento e a quebra da conexão entre dois pontos. Esse sistema, no entanto, mostrava-se ineficiente quando se desejava realizar chamadas a longas distâncias (DDD e DDI), sendo necessária a intervenção de um operador. Além disso, comparada ao DTMF, a discagem por pulso é muito lenta, não acompanhando a evolução dos equipamentos utilizados nos sistemas telefônicos e limitando melhoras nos custos e no atendimento.

O DTMF foi desenvolvido no *Bell Labs* com o objetivo de proporcionar que sinais de discagem conectassem assinantes muito distantes. Potencialmente, isso poderia ser feito através de enlaces sem fio, utilizando, por exemplo, microondas ou satélites. Codificadores e decodificadores foram adicionados às centrais telefônicas, convertendo os sinais decádicos em tons DTMF que, enviados pela linha, chegavam a uma central distante. Nesta última, os tons eram decodificados, podendo ser convertidos novamente para *clicks*. O uso da rede existente da maneira descrita foi chamado de sinalização *in-band*.

Nos anos 50, o desenvolvimento do DTMF fortaleceu a idéia de que o futuro dos sistemas telefônicos basear-se-ia na comutação eletrônica. O *crossbar*, comutador eletromecânico em uso naquela época [31], seria substituído. Com isso, a discagem por pulso seria abandonada por completo e a sinalização DTMF estendida até os usuários. Vários testes foram realizados na década de 60, quando o DTMF tornou-se conhecido por *Touch Tone*.

Com o sistema *Touch Tone* foi também introduzido um teclado cujo *layout* precisou ser padronizado. Após o teste de 18 *layouts* diferentes, chegou-se ao modelo com o qual temos familiaridade nos dias de hoje, com o “1” no canto superior-esquerdo e o “0” na parte inferior, no centro. O *layout* das máquinas de calcular, com o “1” no canto esquerdo-inferior, também foi testado, mas pouca gente usava-as naquele tempo. A idéia de ordem numérica que as pessoas têm pressupunha o “1” no início do teclado, acima e do lado esquerdo, causando erros de digitação e aumentando o número de chamadas telefônicas equivocadas. Com o advento e a popularização dos computadores, a situação se inverteu e, atualmente, é o teclado telefônico que possui o *layout* “destoante”.

Visualizando a integração entre a telefonia e os computadores e observando o interesse que as empresas tinham nessa possibilidade, os engenheiros adicionaram as teclas libra (#) e estrela (*), bem como o grupo de teclas para seleção de menus, A, B, C e D. Hoje, a libra e a estrela ainda são muito utilizadas – enquanto que as letras, suprimidas da maioria dos telefones, são empregadas com mais freqüência em aplicações como o rádio amador [32]. Os militares norte-americanos também usam as teclas A, B, C e D na Autovon – *Automatic Voice Network* – um sistema de comunicação desenvolvido para suportar ataques nucleares. Nesse caso, as letras são digitadas antes de se realizar cada chamada, tendo a função de estabelecer a prioridade da mesma.

O teclado DTMF, apresentado na Figura 3.1, possui a disposição de uma matriz 4×4 onde cada linha representa uma freqüência baixa e cada coluna representa uma freqüência alta. A tecla “1”, por exemplo, gera uma senóide contendo as freqüências de 697 e 1209 Hz, cuja expressão analítica é dada por $x_1(t) = \text{sen}(2.\pi.697.t) + \text{sen}(2.\pi.1209.t)$ (Figura 3.2). A associação de cada dígito a duas freqüências é o motivo pelo qual o sistema é chamado de *multifrequency*. Num sistema real, é na central de comutação que o tom é decodificado a fim de se determinar que tecla foi pressionada.

697 Hz	1	2	3	A
770 Hz	4	5	6	B
852 Hz	7	8	9	C
941 Hz	*	0	#	D
	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz	1633 Hz

Figura 3.1: Teclado DTMF.

É interessante dizermos, ainda, que as freqüências foram projetadas com uma razão de 21/19 visando evitar harmônicos e freqüências que podem ocorrer naturalmente em voz, simulando dois tons enviados. Atualmente, a ITU – *International Telecommunication Union* – é uma das organizações que fornece recomendações para o uso do DTMF. São padronizados [29] parâmetros como variação aceitável de uma freqüência, duração mínima de um tom e pausa mínima entre dois tons.

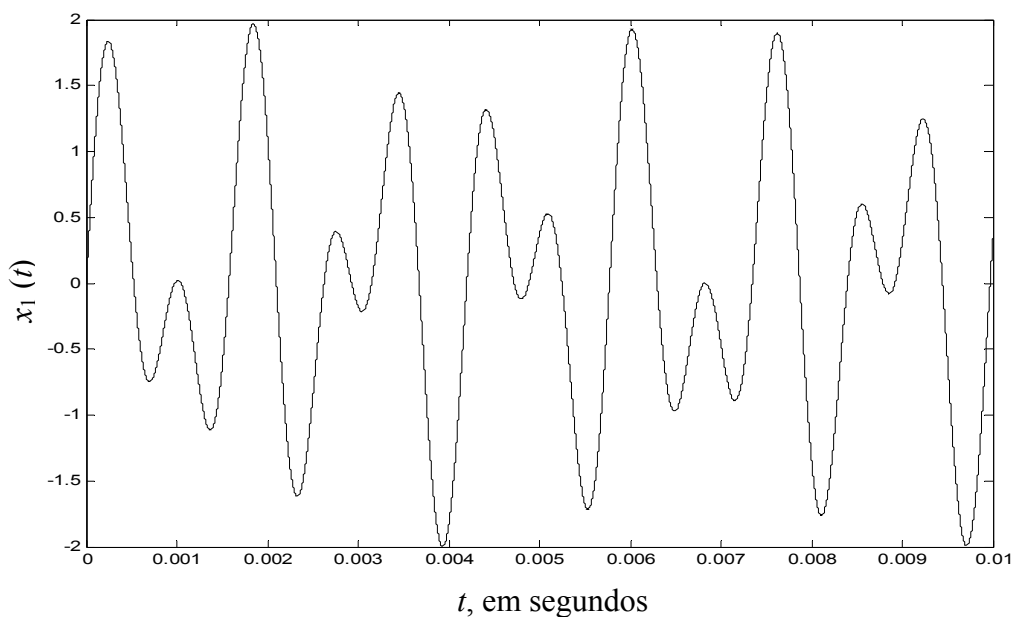


Figura 3.2: Sinal $x_1(t)$ correspondente ao dígito “1” do sistema DTMF.

3.2 A Frequência de Amostragem

Quando falamos em sinais DTMF, é importante sabermos que, para realizarmos sua decodificação, não dispomos mais de versões contínuas dos mesmos (como na Figura 3.2). Atualmente, a maioria dos sistemas telefônicos é digital e, antes de transmitir qualquer sinal analógico de voz, cada um deles o processa através de blocos com funções bem definidas. O sistema PCM – *Pulse Code Modulation* – por exemplo, largamente utilizado no Brasil, submete os sinais analógicos de voz à filtragem, amostragem, quantização, compressão e codificação. Convertidos em bits, eles podem, então, ser enviados ao longo do meio de transmissão [33]. Um diagrama simplificado da parte transmissora do sistema MUX-PCM é apresentado na Figura 3.3. A recepção pode ser entendida através do mesmo diagrama implementado de maneira inversa, ou seja, utilizando demultiplexação, decodificação, etc.

Nesse trabalho, não estamos interessados em abordar os detalhes do sistema aqui exemplificado ou de outros sistemas comumente empregados em telefonia. Isso envolveria uma série de fatores relacionados a diversos componentes da Figura 3.3. Nossa atenção será focalizada no sinal discreto obtido logo após o amostrador. Ou seja, os sinais DTMF que dispomos correspondem a suas versões analógicas discretizadas no tempo, segundo a frequência de amostragem que o sistema impõe.

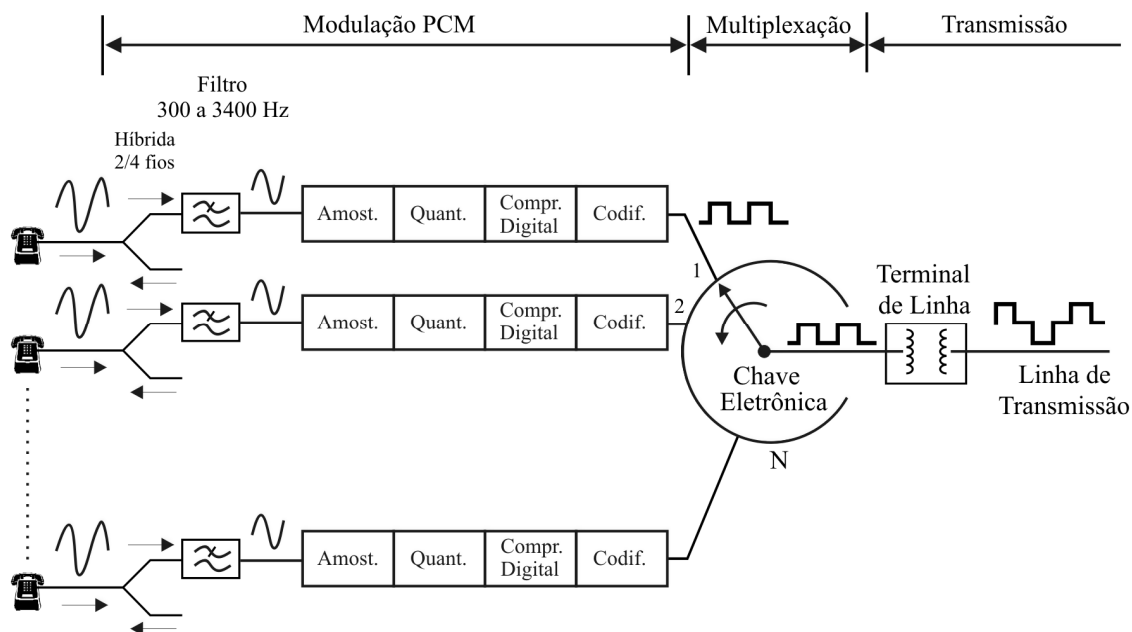


Figura 3.3: Diagrama simplificado da parte transmissora de um sistema PCM com multiplexação no tempo, onde o amostrador trabalha com taxa 8 kHz e a quantização usa 256 níveis, com codificação em 8 bits/amostra. Um compressor digital [33] é incluído.

A frequência máxima presente num tom DTMF é 1633 Hz, portanto, de acordo com o Teorema de Shannon [34], seria suficiente amostrar qualquer sinal pertencente a esse sistema empregando uma taxa próxima a 3300 Hz. Todavia, para que busquemos desde já uma conformação entre a proposta dessa dissertação e os sistemas reais já existentes, optaremos por amostrar os sinais DTMF à frequência de 8000 Hz. Esta é a taxa usada pelo amostrador do PCM [33].

Recordando a teoria desenvolvida no capítulo anterior e, particularmente, observando o exemplo apresentado na Seção 2.5, vê-se que seria necessário um amostrador com frequência bem mais elevada que a frequência de Nyquist do sinal analisado, para que pudéssemos obter todas as amostras que o algoritmo da *AFT Simplificada* exige. Entretanto, mostra-se que, discretizar um sinal pelo menos à sua taxa de Nyquist garante resultados satisfatórios quando empregamos interpolação linear para estimar os valores das amostras em instantes de tempo fracionários [19].

3.3 O Comprimento da Transformada

Após a amostragem dos sinais DTMF analógicos à taxa de 8000 Hz, definida na seção anterior, o que possuímos são seqüências para serem tratadas pela Transformada

Aritmética de Fourier. A seqüência apresentada na Figura 3.4, por exemplo, corresponde ao dígito “1”. Agora, precisamos estabelecer o número de amostras necessário para que seja possível extrair o conteúdo freqüencial desejado de cada sinal.

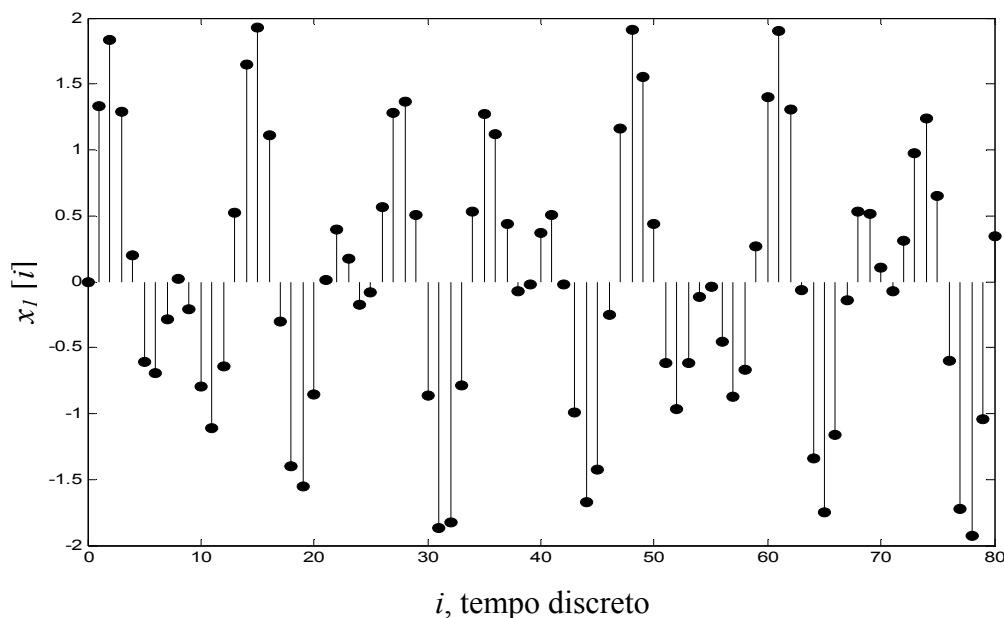


Figura 3.4: Seqüência $x_1[i]$ correspondente ao dígito “1” do sistema DTMF.

Considerar N pontos sucessivos numa das seqüências as quais nos referimos significa possibilitar o cálculo de uma DFT de N pontos da mesma. No contexto da AFT, dizemos que é possível calcular até o N -ésimo coeficiente harmônico. Contudo, como são apenas oito as freqüências que precisam ser detectadas, há necessidade de obtermos, também, apenas oito desses N coeficientes.

De acordo com a teoria desenvolvida, sabemos que existe uma relação entre o n -ésimo coeficiente da série de Fourier de um sinal e a componente de índice n da DFT de sua versão discreta. Portanto, para que saibamos que coeficientes precisam ser calculados, basta que utilizemos a expressão [12]

$$n = \frac{f N}{F_s}, \quad (3.1)$$

onde f é a freqüência espectral em Hertz associada à n -ésima componente de uma DFT de N pontos e F_s é a taxa empregada na amostragem do sinal contínuo original. Neste ponto, conhecemos F_s e as freqüências físicas que desejamos detectar, entretanto, precisamos definir um critério que indique que valores de N seriam mais adequados para este conjunto específico de parâmetros.

A partir da Equação 3.1, podemos derivar uma outra expressão que nos fornece o valor mínimo de N para o qual é garantida a distinção entre duas frequências adjacentes que estejam presentes no sinal analisado. Se Δf_{\min} for a diferença mínima entre duas dessas frequências, precisaríamos ter

$$N \geq \frac{F_s}{\Delta f_{\min}}. \quad (3.2)$$

Para o DTMF, teríamos $\Delta f_{\min} = 770 - 697 = 73$ e $N \geq 110$. Entretanto, não é apenas a esta condição que está atrelada a escolha do comprimento da transformada. Sabemos que, por conta da complexidade computacional exigida, não se deve aumentar livremente o valor deste parâmetro.

Observando a Equação 3.1, verificamos que, para uma dada frequência física que faz parte do sistema DTMF, não encontraremos necessariamente um valor inteiro para n . Ou seja, se este último não for inteiro, precisará ser arredondado para o inteiro mais próximo, \tilde{n} . Conseqüentemente, estar-se-á identificando, também, uma frequência aproximada, \tilde{f} , obtida pela substituição de \tilde{n} em 3.1. A Figura 3.5 mostra de que forma varia o módulo da diferença entre f e \tilde{f} , chamado aqui de Δf , para N igual a 128.

Nosso objetivo é, então, encontrar valores de N para os quais as frequências DTMF coincidam, o máximo possível, com as frequências amostradas pela DFT de mesmo comprimento. Para isso, definiremos, para cada frequência DTMF apresentada na Tabela 3.1, um parâmetro chamado de erro relativo,

$$E_{Rj} \triangleq \frac{|f_j - \tilde{f}_j|}{f_j}, \quad (3.3)$$

em que \tilde{f}_j é a frequência aproximada que mencionamos, com respeito a f_j .

Tabela 3.1: Frequências DTMF e índices j correspondentes.

j	1	2	3	4	5	6	7	8
f_j (Hz)	697	770	852	941	1209	1336	1477	1633

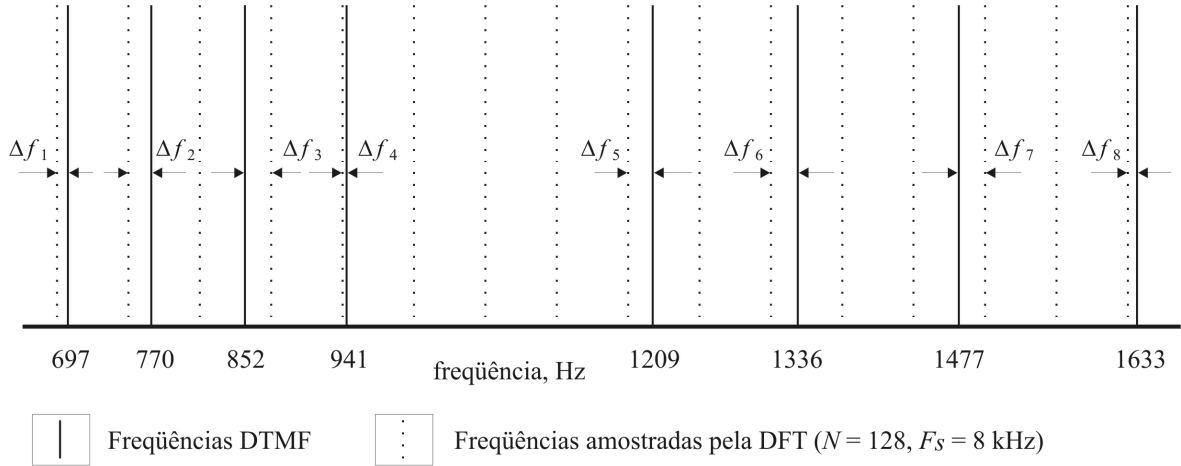


Figura 3.5: Diferenças entre as frequências DTMF e as frequências amostradas pela DFT.

Estamos interessados em minimizar um conjunto de oito erros relativos em função do mesmo N . Logo, precisamos calcular, primeiro, o erro relativo médio através da equação

$$\bar{E}_R = \frac{\sum_{j=1}^8 E_{Rj}}{8}. \quad (3.4)$$

Conhecendo E_R para cada frequência DTMF e \bar{E}_R , obtemos o erro médio quadrático, RMSE (*Root Mean Square Error*), dado pela seguinte equação:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 (\bar{E}_R - E_{Rj})^2}. \quad (3.5)$$

De maneira geral, podemos afirmar que, quanto menores o erro médio relativo e o erro médio quadrático, menores serão as diferenças Δf e mais representativa será a detecção de cada tom senoidal. Esse é um fato que independe de estarmos usando a DFT ou a AFT, todavia, minimizar \bar{E}_R e $RMSE$ significa, ainda, proporcionar maior destaque às frequências DTMF na análise espectral que será realizada. Diante disso, podemos esperar que a susceptibilidade aos erros inseridos pelas interpolações na decodificação via AFT seja, também, diminuída.

Para que esta situação seja exposta com clareza, consideremos mais uma vez o sinal que representa o dígito “1”. Apenas os coeficientes associados a 697 e 1209 Hz são fortes, os demais possuem pouca relevância. A detecção propriamente dita consiste em calcularmos os oito coeficientes associados às frequências DTMF e verificarmos os dois

mais significativos, um correspondente à linha e outro à coluna (Figura 3.1). Para o exemplo em questão, o algoritmo da AFT pode, eventualmente, corromper o coeficiente associado a 697 Hz, fornecendo-nos um valor absoluto menor que seu valor exato. O efeito contrário pode acontecer com o coeficiente associado a 770 Hz, que teria seu valor aumentado. Escolher, portanto, um comprimento N que determine uma maior diferença entre esses dois coeficientes diminui a possibilidade dos mesmos serem confundidos, quando calculados com erro.

3.4 A Interpolação

Sempre que mencionamos o uso da Transformada Aritmética de Fourier, destacamos a necessidade de realizarmos interpolações a fim de obtermos as amostras em tempos fracionários que este algoritmo requer. O tipo de interpolação constitui mais um fator que precisa ser escolhido em função, principalmente, da precisão com a qual os coeficientes harmônicos serão computados. De modo particular, a imprecisão no cálculo das componentes DTMF depende da interpolação usada.

Devido ao número de parâmetros envolvidos e à especificidade de cada sinal ou aplicação, analisar de forma exata que influência uma aproximação teria no resultado final do emprego da AFT é uma tarefa inviável. Reed e Tufts, realizando uma abordagem estocástica, obtiveram uma fórmula para o erro aproximado no cálculo dos coeficientes da série de Fourier de um sinal aleatório, quando se usa interpolação de ordem zero e de primeira ordem [19]. Entretanto, devido às dificuldades expostas, para o escopo dessa dissertação, é suficiente concentrarmo-nos numa conclusão já comentada nesse capítulo: interpolações lineares de baixa ordem fornecem bons resultados na estimativa das amostras em tempos não inteiros (desde que o sinal original tenha sido amostrado pelo menos à sua taxa de Nyquist). Essa informação é de grande importância porque, quanto maior a ordem da interpolação que usamos, maior a complexidade de um *hardware* que a implemente. Em outras palavras, podemos dizer que a introdução de uma perda aceitável na precisão do algoritmo pode proporcionar mais simplicidade e, conseqüentemente, um menor custo na sua implementação. Se utilizarmos interpolação de ordem zero, por exemplo, amostras em tempos fracionários distintos serão aproximadas para um mesmo valor em tempo inteiro. Isso diminui a quantidade de dados processados e, portanto, o número de operações aritméticas que devem ser realizadas.

É por estes motivos que, nesse trabalho, não serão consideradas interpolações com ordens maiores que um. Detalhes acerca da influência do tipo de interpolação usado sobre a complexidade computacional da AFT serão apresentados adiante.

Capítulo 4

A Aplicação da AFT

Nos capítulos iniciais desta dissertação, preocupamo-nos em fornecer todo o ferramental matemático necessário ao desenvolvimento efetivo da aplicação que propusemos. Por último, foram apresentadas e analisadas algumas variáveis importantes para aliarmos o conhecimento teórico mencionado ao que desejamos realizar. Essa abordagem, feita no Capítulo 3, mostrou-nos de maneira mais clara como são inúmeros os fatores que influenciam no resultado da decodificação de sinais DTMF via Transformada Aritmética de Fourier.

De maneira geral, podemos afirmar que qualquer incremento ou melhora que se faça num sistema, normalmente, demanda aumento do custo ou da complexidade do mesmo. Todavia, para a aplicação em questão, o uso da AFT sugere simplificação no cálculo sem que se perca na eficácia. É por isto que, apesar de termos fixado a frequência de amostragem em 8000 Hz e sugerido de que forma se deve escolher o comprimento da transformada e o tipo de interpolação, é imprescindível a compreensão do compromisso entre ganho e perda na variação desses parâmetros.

Com esse objetivo, neste capítulo, apresentaremos a aplicação propriamente dita da AFT na decodificação DTMF. Adotando os critérios desenvolvidos, selecionaremos um valor para N e, usando interpolação de ordens um e zero, empregaremos o algoritmo de Reed e Shih [20]. Baseados na fórmula de inversão de Möbius para séries finitas, introduziremos, ainda, um método de arredondamento da AFT, que propõe o cálculo de apenas algumas somas de Bruns. Os resultados desses procedimentos serão mostrados e discutidos no que diz respeito à eficácia e à precisão. Para isso, tomaremos como referência os valores exatos das componentes, calculados através da DFT.

Posteriormente, serão discutidas implementações específicas para cada caso, o que nos permitirá confirmar a baixa complexidade computacional que os mesmos requerem. Esse, sem dúvida, é o aspecto de maior importância prática nesse trabalho, merecendo, pois, destaque e detalhamento em sua exposição e análise.

4.1 A Decodificação DTMF: $N = 114$

De acordo com a discussão prévia, percebemos que o comprimento da transformada, N , e o tipo de interpolação constituem aspectos decisivos na aplicação da AFT. Com o intuito de escolher este primeiro parâmetro, realizamos um procedimento de busca com base nas Equações 3.1 a 3.5. O que se fez foi calcular o erro relativo médio e o erro médio quadrático para uma faixa de valores de N cujo máximo correspondia a 128. Este limite foi fixado para que se pudesse limitar, também, a complexidade computacional da *AFT Simplificada* e dos algoritmos de Cooley-Tukey e de Goertzel, aos quais, posteriormente, compararemos o método aqui proposto.

Ao fim deste processo, encontramos $\bar{E}_R = 0,0101$ e $RMSE = 0,0089$, para $N = 114$. O fato destes valores serem pequenos, quando comparados a seus correspondentes para outros comprimentos, fez-nos fixar em 114 o número de pontos da transformada que implementaremos. Com $F_s = 8000$ Hz, um tom DTMF discreto, a partir do qual desejamos obter os coeficientes harmônicos, é determinado pela seguinte expressão:

$$x[i] = \sin\left(\frac{2\pi f_L i}{F_s}\right) + \sin\left(\frac{2\pi f_H i}{F_s}\right), \quad 0 \leq i \leq 113, \quad (4.1)$$

onde f_L e f_H representam, respectivamente, as frequências baixa e alta, associadas a cada dígito segundo a Figura 3.1.

O que precisamos conhecer, agora, são os índices dos coeficientes que calcularemos para $N = 114$. Isso é feito através da Equação 3.1, onde, substituindo cada frequência DTMF, encontramos um dado n . O que a Tabela 4.1 apresenta são os valores inteiros mais próximos dos n (que correspondem aos \tilde{n} mencionados no Capítulo 3).

Tabela 4.1: Índices dos coeficientes harmônicos correspondentes às frequências DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ KHz).

n	10	11	12	13	17	19	21	23
f (Hz)	697	770	852	941	1209	1336	1477	1633

O próximo passo é determinar que somas de Bruns são necessárias ao cálculo de cada um desses coeficientes. A partir das Equações 2.36 e 2.37, podemos, então, compor a Tabela 4.2, que associa cada coeficiente às somas definidas pelo algoritmo de Reed-Shih.

É importante notarmos que cada soma parcial é, também, uma função de α , parâmetro que vale zero, para os a_n , e $1/4n$, para os b_n (Teoremas 2.6 e 2.7). Assim, como a Tabela 4.2 discrimina 28 índices distintos para a soma $B_{2n}(\cdot)$, necessitamos de 56 somas distintas para obter todos os coeficientes que desejamos.

Tabela 4.2: Somas de Bruns associadas ao n -ésimo coeficiente harmônico ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz).

n	$B_{2n}(\cdot)$, Somas de Bruns
10	$B_{20}, B_{60}, B_{100}, B_{140}, B_{220}$
11	$B_{22}, B_{66}, B_{110}, B_{154}$
12	$B_{24}, B_{72}, B_{120}, B_{168}$
13	$B_{26}, B_{78}, B_{130}, B_{182}$
17	B_{34}, B_{102}, B_{170}
19	B_{38}, B_{114}, B_{190}
21	B_{42}, B_{126}, B_{210}
23	B_{46}, B_{138}

4.1.1 $N = 114$, Interpolação de Primeira Ordem

Todo o esforço computacional (expresso pela complexidade multiplicativa) na decodificação dos sinais DTMF via AFT acontece na obtenção das somas da Tabela 4.2. É neste momento que devemos definir de que forma “encontraremos” as amostras em instantes de tempo fracionários do sinal. Inicialmente, consideraremos a interpolação linear de primeira ordem, que efetua uma média ponderada entre as amostras em instantes de tempo inteiros adjacentes à que desejamos estimar.

Recorrendo à Equação 2.33, podemos compor uma outra tabela que contém os instantes de tempo fracionários para os quais precisamos realizar essa estimativa. Entretanto, para simplificar a notação, percebamos que, na $2n$ -ésima soma parcial, são requeridas $2n$ amostras equispaçadas ao longo dos 114 pontos dos quais dispomos. No caso de $B_{2n}(0)$, essa amostragem parte do tempo igual a zero e, no caso de $B_{2n}(1/4n)$, parte do tempo igual a $114(1/4n)$. Conseqüentemente, se precisarmos da amostra no tempo $114(c/d)$, c e d inteiros, para uma dada soma parcial, precisaremos também, para esta mesma soma, de todas as outras amostras nos tempos $114D$, onde D corresponde às frações irredutíveis com denominador igual a d . O número de frações irredutíveis com este denominador é dado por sua função de Euler, $\phi(d)$ [23].

Nas Tabelas 4.3 e 4.4, utilizamos esse fato para descrever que amostras são necessárias ao cálculo de uma soma parcial. Nessa tabela, ao lado de cada soma, escrevemos apenas os valores de d (com exceção do zero, que representa o próprio instante de tempo igual a zero).

Tabela 4.3: Descrição das amostras necessárias ao cálculo das somas de Bruns.

Os tempos fracionários, com exceção do zero*, possuem a forma $N(c/d)$, onde c/d é uma fração irredutível ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem).

$B_{2n}(0)$, Soma de Bruns	d , denominadores
B_{20}	0* 2 4 5 10 20
B_{22}	0 2 11 22
B_{24}	0 2 3 4 6 8 12 24
B_{26}	0 2 13 26
B_{34}	0 2 17 34
B_{38}	0 2 19 38
B_{42}	0 2 3 6 7 14 21 42
B_{46}	0 2 23 46
B_{60}	0 2 3 4 5 6 10 12 15 20 30 60
B_{66}	0 2 3 6 11 22 33 66
B_{72}	0 2 3 4 6 8 9 12 18 24 36 72
B_{78}	0 2 3 6 13 26 39 78
B_{100}	0 2 4 5 10 20 25 50 100
B_{102}	0 2 3 6 17 34 51 102
B_{110}	0 2 5 10 11 22 55 110
B_{114}	0 2 3 6 19 38 57 114
B_{120}	0 2 3 4 5 6 8 10 12 15 20 24 30 40 60 120
B_{126}	0 2 3 6 7 9 14 18 21 42 63 126
B_{130}	0 2 5 10 13 26 65 130
B_{138}	0 2 3 6 23 46 69 138
B_{140}	0 2 4 5 7 10 14 20 28 35 70 140
B_{154}	0 2 7 11 14 22 77 154
B_{168}	0 2 3 4 6 7 8 12 14 21 24 28 42 56 84 168
B_{170}	0 2 5 10 17 34 85 170
B_{182}	0 2 7 13 14 26 91 182
B_{190}	0 2 5 10 19 38 95 190
B_{210}	0 2 3 5 6 7 10 14 15 21 30 35 42 70 105 210
B_{220}	0 2 4 5 10 11 20 22 44 55 110 220

Tabela 4.4: Descrição das amostras necessárias ao cálculo das somas de Bruns.

Os tempos fracionários possuem a forma $N(c/d)$, onde c/d é uma fração irredutível

($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem).

$B_{2n}(1/4n)$, Soma de Bruns	d , denominadores
B_{20}	8 40
B_{22}	4 44
B_{24}	16 48
B_{26}	4 52
B_{34}	4 68
B_{38}	4 76
B_{42}	4 12 28 84
B_{46}	4 92
B_{60}	8 24 40 120
B_{66}	4 12 44 132
B_{72}	16 48 144
B_{78}	4 12 52 156
B_{100}	8 40 200
B_{102}	4 12 68 204
B_{110}	4 20 44 220
B_{114}	4 12 76 228
B_{120}	16 48 80 240
B_{126}	4 12 28 36 84 252
B_{130}	4 20 52 260
B_{138}	4 12 92 276
B_{140}	8 40 56 280
B_{154}	4 28 44 308
B_{168}	16 48 112 336
B_{170}	4 20 68 340
B_{182}	4 28 52 364
B_{190}	4 20 76 380
B_{210}	4 12 20 28 60 84 140 420
B_{220}	8 40 88 440

Aqui, cada soma parcial, dada pela Definição 2.4, foi calculada por meio de um programa que permite selecionarmos o sinal DTMF a ser processado, através de sua expressão analítica (vide Apêndice B). Uma vez que conhecemos o valor dessas somas,

podemos, então, substituí-las nas Equações 2.36 e 2.37, obter os coeficientes harmônicos (a_n e b_n) e realizar a decodificação do sinal que foi introduzido. É importante dizermos que a detecção propriamente dita é feita observando-se o módulo de cada coeficiente, dado por

$$V_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} . \quad (4.2)$$

Além disso, definimos uma espécie de erro percentual de estimativa, $E_E \%$. Este parâmetro mede a diferença entre a magnitude da componente da DFT estimada a partir do respectivo coeficiente obtido pela AFT, $|\tilde{V}[k]|$, (Equações 1.28 e 1.29) e o valor exato da mesma, $|V[k]|$, calculado previamente através de um algoritmo convencional. O erro percentual de estimativa é obtido através de

$$E_E \% = \frac{\left| |\tilde{V}[k]| - |V[k]| \right|}{|V[k]|} \times 100 \quad (4.3)$$

Para cada um dos 16 tons possíveis do DTMF (1 Volt), a Tabela 4.5 apresenta os valores¹ de V_n e $E_E \%$ correspondentes aos coeficientes de índices mostrados na Tabela 4.1. Os números em negrito estão associados às frequências cuja presença deve ser mais forte para que determinado dígito seja decodificado corretamente. Comparando estes números com os demais valores de V_n para um mesmo dígito, constatamos a eficácia do algoritmo utilizado, já que a decodificação sempre se dá de maneira acertada (na ausência de ruído).

Tabela 4.5: Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem).

n	$f(\text{Hz})$	1		2		3		A	
		V_n	$E_E \%$	V_n	$E_E \%$	V_n	$E_E \%$	V_n	$E_E \%$
10	697	0.9807	2.7288	0.9741	2.3693	0.9735	2.4298	0.9734	2.7284
11	770	0.0806	5.5227	0.0745	8.2627	0.0672	2.0751	0.0680	7.5006
12	852	0.0621	1.1975	0.0373	4.3587	0.0374	3.3831	0.0460	0.9127
13	941	0.0601	4.5827	0.0230	21.2365	0.0284	1.0501	0.0351	6.7763
17	1209	0.8543	7.1425	0.0302	4.0248	0.0207	5.4833	0.0390	6.4082
19	1336	0.1075	7.4159	0.9070	9.8308	0.0282	9.4830	0.0540	6.5060
21	1477	0.0483	11.3079	0.0108	12.9020	0.8956	10.7179	0.0948	10.5316
23	1633	0.0331	7.6725	0.0009	76.5307	0.0154	15.8347	0.7699	12.9160

¹Nas tabelas que apresentam os módulos dos coeficientes harmônicos e os erros percentuais de estimativa para cada sinal e frequência DTMF, usaremos (.) para indicar decimal.

Tabela 4.5: Continuação

		4		5		6		B	
n	$f(\text{Hz})$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0256	23.1116	0.0231	3.8563	0.0238	1.3844	0.0254	12.9293
11	770	0.9854	3.3027	0.9804	2.3022	0.9730	3.0206	0.9736	3.4307
12	852	0.0562	1.7716	0.0302	5.9881	0.0303	4.8186	0.0396	0.6602
13	941	0.0525	4.5345	0.0137	30.9573	0.0190	1.2861	0.0270	7.4209
17	1209	0.8496	7.1404	0.0245	5.9751	0.0150	6.2336	0.0342	6.0244
19	1336	0.1112	7.6384	0.9023	9.8541	0.0235	10.3497	0.0504	5.6922
21	1477	0.0516	11.4388	0.0149	10.7531	0.8915	10.7451	0.0916	10.3532
23	1633	0.0368	6.3129	0.0051	31.5498	0.0196	11.0400	0.7664	12.9812

		7		8		9		C	
n	$f(\text{Hz})$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0754	4.2656	0.0564	5.5412	0.0557	6.3723	0.0628	7.7402
11	770	0.1319	5.4193	0.1184	1.8793	0.1110	4.2192	0.1183	5.8348
12	852	0.9577	3.6483	0.9284	3.7958	0.9284	3.7579	0.9407	3.5681
13	941	0.1197	2.8813	0.1590	0.8521	0.1547	3.9518	0.1445	2.8002
17	1209	0.8149	7.1234	0.0162	19.4941	0.0231	8.5438	0.0097	29.5879
19	1336	0.1368	8.1005	0.8776	9.9643	0.0099	23.5155	0.0269	4.8077
21	1477	0.0723	11.3571	0.0358	9.3874	0.8714	10.8628	0.0718	9.3058
23	1633	0.0572	3.6464	0.0256	5.8437	0.0398	3.6601	0.7467	13.2548

		*		0		#		D	
n	$f(\text{Hz})$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.1119	0.7850	0.0900	3.9648	0.0896	3.9606	0.1008	3.1697
11	770	0.1487	3.1063	0.1298	0.6451	0.1264	2.9461	0.1394	1.9271
12	852	0.2377	4.3004	0.2121	3.8016	0.2118	3.7340	0.2249	3.5380
13	941	0.7534	4.0697	0.7182	4.2545	0.7187	4.1208	0.7328	4.1085
17	1209	0.7801	7.1350	0.0719	9.0772	0.0744	8.2093	0.0507	10.8725
19	1336	0.1600	7.3300	0.8777	9.9879	0.0454	8.3083	0.0177	23.9618
21	1477	0.0870	11.2582	0.0471	10.4789	0.8718	10.8527	0.0577	11.4520
23	1633	0.0667	7.0386	0.0344	10.2050	0.0458	7.4758	0.7366	13.2545

4.1.2 $N = 114$, Interpolação de Ordem Zero

Como já foi dito, uma outra forma de obter as amostras em instantes de tempo fracionários necessárias ao cálculo das somas da Tabela 4.2 é realizar interpolação de ordem zero. Isto significa que cada fração é arredondada para o inteiro mais próximo, fornecendo-nos, assim, uma amostra bem definida do sinal descrito pela Equação 4.1.

Procedendo desta forma, podemos compor tabelas semelhantes a 4.3 e 4.4, entretanto, nas Tabelas 4.6 e 4.7, estão associados a cada soma de Bruns os tempos discretos em que é necessário colher amostras do sinal.

Tabela 4.6: Descrição das amostras necessárias ao cálculo das somas de Bruns.

($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de ordem zero).

$B_{2n}(0)$, Soma de Bruns	i , instantes das amostras
B_{20}	0 6 11 17 23 29 34 40 46 51 57 63 68 74 80 86 91 97 103 108
B_{22}	0 5 10 16 21 26 31 36 41 47 52 57 62 67 73 78 83 88 93 98 104 109
B_{24}	0 5 10 14 19 24 29 33 38 43 48 52 57 62 67 71 76 81 86 90 95 100 105 109
B_{26}	0 4 9 13 18 22 26 31 35 39 44 48 53 57 61 66 70 75 79 83 88 92 96 101 105 110
B_{34}	0 3 7 10 13 17 20 23 27 30 34 37 40 44 47 50 54 57 60 64 67 70 74 77 80 84 87 91 94 97 101 104 107 111
B_{38}	0 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 33 36 39 42 45 48 51 54 57 60 63 66 69 72 75 78 81 84 87 90 93 96 99 102 105 108 111
B_{42}	0 3 5 8 11 14 16 19 22 24 27 30 33 35 38 41 43 46 49 52 54 57 60 62 65 68 71 73 76 79 81 84 87 90 92 95 98 100 103 106 109 111
B_{46}	0 2 5 7 10 12 15 17 20 22 25 27 30 32 35 37 40 42 45 47 50 52 55 57 59 62 64 67 69 72 74 77 79 82 84 87 89 92 94 97 99 102 104 107 109 112
B_{60}	0 2 4 6 8 10 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 49 51 53 55 57 59 61 63 65 67 68 70 72 74 76 78 80 82 84 86 87 89 91 93 95 97 99 101 103 105 106 108 110 112
B_{66}	0 2 3 5 7 9 10 12 14 16 17 19 21 22 24 26 28 29 31 33 35 36 38 40 41 43 45 47 48 50 52 54 55 57 59 60 62 64 66 67 69 71 73 74 76 78 79 81 83 85 86 88 90 92 93 95 97 98 100 102 104 105 107 109 111 112
B_{72}	0 2 3 5 6 8 10 11 13 14 16 17 19 21 22 24 25 27 29 30 32 33 35 36 38 40 41 43 44 46 48 49 51 52 54 55 57 59 60 62 63 65 67 68 70 71 73 74 76 78 79 81 82 84 86 87 89 90 92 93 95 97 98 100 101 103 105 106 108 109 111 112
B_{78}	0 1 3 4 6 7 9 10 12 13 15 16 18 19 20 22 23 25 26 28 29 31 32 34 35 37 38 39 41 42 44 45 47 48 50 51 53 54 56 57 58 60 61 63 64 66 67 69 70 72 73 75 76 77 79 80 82 83 85 86 88 89 91 92 94 95 96 98 99 101 102 104 105 107 108 110 111 113
B_{100}	0 1 2 3 5 6 7 8 9 10 11 13 14 15 16 17 18 19 21 22 23 24 25 26 27 29 30 31 32 33 34 35 36 38 39 40 41 42 43 44 46 47 48 49 50 51 52 54 55 56 57 58 59 60 62 63 64 65 66 67 68 70 71 72 73 74 75 76 78 79 80 81 82 83 84 86 87 88 89 90 91 92 93 95 96 97 98 99 100 101 103 104 105 106 107 108 109 111 112 113

Tabela 4.6: Continuação.

$B_{2n}(0)$, Soma de Bruns	i , instantes das amostras																		
B_{102}	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19	
	20	21	22	23	25	26	27	28	29	30	31	32	34	35	36	37	38		
	39	40	41	42	44	45	46	47	48	49	50	51	53	54	55	56	57		
	58	59	60	61	63	64	65	66	67	68	69	70	72	73	74	75	76		
	77	78	79	80	82	83	84	85	86	87	88	89	91	92	93	94	95		
	96	97	98	99	101	102	103	104	105	106	107	108	110	111	112	113			
B_{110}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36		
	37	38	39	40	41	42	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54		
	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	72		
	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89		
	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	101	102	103	104	105	106			
B_{114}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35		
	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52		
	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69		
	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86		
	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103		
B_{120}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26	27	28	30	31	32	33	34	35	36	37		
	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	49	50	51	52	53	54	55		
	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	68	69	70	71	72	73		
	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	87	88	89	90	91		
	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	106	107	108			
B_{126}	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19	
	20	21	22	23	25	26	27	28	29	30	31	32	34	35	36	37	38		
	39	40	41	42	44	45	46	47	48	49	50	51	53	54	55	56	57		
	58	59	60	61	63	64	65	66	67	68	69	70	72	73	74	75	76		
	77	78	79	80	82	83	84	85	86	87	88	89	91	92	93	94	95		
	96	97	98	99	101	102	103	104	105	106	107	108	110	111	112	113			
B_{130}	0	1	2	3	5	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	17	19	20	
	21	22	23	24	26	27	28	29	30	31	33	34	35	36	37	38	40		
	41	42	43	44	45	47	48	49	50	51	52	54	55	56	57	58	59		
	60	62	63	64	65	66	67	69	70	71	72	73	74	76	77	78	79		
	80	81	83	84	85	86	87	88	90	91	92	93	94	95	97	98	99		
	100	101	102	104	105	106	107	108	109	111	112	113							
B_{138}	0	1	3	4	5	6	8	9	10	11	13	14	15	16	18	19	20	22	
	23	24	25	27	28	29	30	32	33	34	35	37	38	39	41	42	43		
	44	46	47	48	49	51	52	53	54	56	57	58	60	61	62	63	65		
	66	67	68	70	71	72	73	75	76	77	79	80	81	82	84	85	86		
	87	89	90	91	92	94	95	96	98	99	100	101	103	104	105	106			
	108	109	110	111	113														
B_{140}	0	1	3	4	5	6	8	9	10	12	13	14	16	17	18	19	21	22	
	23	25	26	27	28	30	31	32	34	35	36	38	39	40	41	43	44		
	45	47	48	49	51	52	53	54	56	57	58	60	61	62	63	65	66		
	67	69	70	71	73	74	75	76	78	79	80	82	83	84	85	87	88		
	89	91	92	93	95	96	97	98	100	101	102	104	105	106	108	109			
	110	111	113																

Tabela 4.6: Continuação.

$B_{2n}(0)$, Soma de Bruns	i , instantes das amostras
B_{154}	0 2 3 5 6 8 9 11 12 14 15 17 18 20 22 23 25 26 28 29 31 32 34 35 37 39 40 42 43 45 46 48 49 51 52 54 55 57 59 60 62 63 65 66 68 69 71 72 74 75 77 79 80 82 83 85 86 88 89 91 92 94 96 97 99 100 102 103 105 106 108 109 111 112
B_{168}	0 2 4 6 8 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 47 49 51 53 55 57 59 61 63 65 66 68 70 72 74 76 78 80 82 84 85 87 89 91 93 95 97 99 101 103 104 106 108 110 112
B_{170}	0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59 61 63 65 67 69 71 73 75 77 79 81 83 85 86 88 90 92 94 96 98 100 102 104 106 108 110 112
B_{182}	0 2 5 7 10 12 15 17 20 22 25 27 30 32 35 37 40 42 45 47 50 52 55 57 59 62 64 67 69 72 74 77 79 82 84 87 89 92 94 97 99 102 104 107 109 112
B_{190}	0 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 33 36 39 42 45 48 51 54 57 60 63 66 69 72 75 78 81 84 87 90 93 96 99 102 105 108 111
B_{210}	0 6 13 19 25 32 38 44 51 57 63 70 76 82 89 95 101 108
B_{220}	0 14 28 43 57 71 85 100

Tabela 4.7: Descrição das amostras necessárias ao cálculo das somas de Bruns.

($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de ordem zero).

$B_{2n}(1/4n)$, Soma de Bruns	i , instantes das amostras
B_{20}	3 9 14 20 26 31 37 43 48 54 60 66 71 77 83 88 94 100 105 111
B_{22}	3 8 13 18 23 29 34 39 44 49 54 60 65 70 75 80 86 91 96 101 106 111
B_{24}	2 7 12 17 21 26 31 36 40 45 50 55 59 64 69 74 78 83 88 93 97 102 107 112
B_{26}	2 7 11 15 20 24 29 33 37 42 46 50 55 59 64 68 72 77 81 86 90 94 99 103 107 112
B_{34}	2 5 8 12 15 18 22 25 29 32 35 39 42 45 49 52 55 59 62 65 69 72 75 79 82 86 89 92 96 99 102 106 109 112
B_{38}	2 5 8 11 14 17 20 23 26 29 32 35 38 41 44 47 50 53 56 59 62 65 68 71 74 77 80 83 86 89 92 95 98 101 104 107 110 113
B_{42}	1 4 7 10 12 15 18 20 23 26 29 31 34 37 39 42 45 48 50 53 56 58 61 64 67 69 72 75 77 80 83 86 88 91 94 96 99 102 105 107 110 113
B_{46}	1 4 6 9 11 14 16 19 21 24 26 29 31 33 36 38 41 43 46 48 51 53 56 58 61 63 66 68 71 73 76 78 81 83 86 88 90 93 95 98 100 103 105 108 110 113
B_{60}	1 3 5 7 9 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 67 69 71 73 75 77 79 81 83 85 86 88 90 92 94 96 98 100 102 104 105 107 109 111 113

Tabela 4.7: Continuação.

$B_{2n}(1/4n)$, Soma de Bruns	i , instantes das amostras																							
B_{130}	0	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19						
	20	22	23	24	25	26	27	28	30	31	32	33	34	35	37	38	39							
	40	41	42	44	45	46	47	48	49	51	52	53	54	55	56	58	59							
	60	61	62	63	65	66	67	68	69	70	72	73	74	75	76	77	79							
	80	81	82	83	84	85	87	88	89	90	91	92	94	95	96	97	98							
	99	101	102	103	104	105	106	108	109	110	111	112	113	114										
B_{138}	0	1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	15	16	17	18	20	21						
	22	23	25	26	27	28	30	31	32	34	35	36	37	39	40	41	42							
	44	45	46	47	49	50	51	53	54	55	56	58	59	60	61	63	64							
	65	66	68	69	70	72	73	74	75	77	78	79	80	82	83	84	85							
	87	88	89	91	92	93	94	96	97	98	99	101	102	103	104	106								
	107	108	110	111	112	113	114																	
B_{140}	0	1	2	3	5	6	7	8	10	11	12	14	15	16	17	19	20	21						
	23	24	25	27	28	29	30	32	33	34	36	37	38	40	41	42	43							
	45	46	47	49	50	51	52	54	55	56	58	59	60	62	63	64	65							
	67	68	69	71	72	73	74	76	77	78	80	81	82	84	85	86	87							
	89	90	91	93	94	95	97	98	99	100	102	103	104	106	107	108								
	109	111	112	113	114																			
B_{154}	0	1	2	4	5	7	8	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24	25						
	27	28	30	32	33	35	36	38	39	41	42	44	45	47	49	50	52							
	53	55	56	58	59	61	62	64	65	67	69	70	72	73	75	76	78							
	79	81	82	84	85	87	89	90	92	93	95	96	98	99	101	102	104							
	106	107	109	110	112	113	114																	
B_{168}	0	1	3	5	7	9	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	29	31						
	33	35	37	39	41	43	45	47	48	50	52	54	56	58	60	62	64							
	66	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	86	88	90	92	94	96							
	98	100	102	104	105	107	109	111	113	114														
B_{170}	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	28	30	32						
	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66							
	68	70	72	74	76	78	80	82	84	85	87	89	91	93	95	97	99							
	101	103	105	107	109	111	113	114																
B_{182}	0	1	4	6	9	11	14	16	19	21	24	26	28	31	33	36	38	41						
	43	46	48	51	53	56	58	61	63	66	68	71	73	76	78	81	83							
	85	88	90	93	95	98	100	103	105	108	110	113	114											
B_{190}	0	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49						
	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100							
	103	106	109	112	114																			
B_{210}	0	3	9	16	22	28	35	41	47	54	60	66	73	79	85	92	98	104						
	111	114																						
B_{220}	0	7	21	36	50	64	78	93	107	114														

No cálculo das somas de Bruns utilizando interpolação de ordem zero, é interessante observarmos que, a partir de B_{120} , o número de amostras necessárias decresce. Esse fato, que pressupõe diminuição na complexidade computacional do algoritmo, acontece porque as somas são alternantes (Equação 2.33), ou seja, se duas parcelas consecutivas correspondem à mesma amostra do sinal, elas se anulam. Na Tabela 4.7, observemos, também, que precisamos da amostra no tempo discreto igual a 114, apesar de a mesma não estar presente na descrição analítica dada pela Equação 4.1.

Igualmente à Seção 4.1.1, apresentamos na Tabela 4.8 os valores de V_n e $E_E\%$ para cada um dos 16 sinais DTMF.

Tabela 4.8: Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de ordem zero).

		1		2		3		A	
n	$f(\text{Hz})$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\% \times 10^3$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.9965	1.1557	0.9884	0.0009	0.9880	0.9737	0.9807	2.0023
11	770	0.1042	22.0991	0.0304	0.0557	0.0687	0.1116	0.0295	59.9098
12	852	0.0605	3.8371	0.0460	0.0181	0.0422	9.1169	0.0588	28.9530
13	941	0.0588	6.5622	0.0388	0.0326	0.0107	62.6199	0.0492	30.7888
17	1209	0.8717	5.2508	0.0906	0.2122	0.0085	61.3580	0.0810	94.6121
19	1336	0.0843	27.3962	0.9953	0.0010	0.0313	0.4670	0.0432	25.2077
21	1477	0.0522	4.0608	0.0116	0.0070	0.9331	6.9712	0.1055	0.4594
23	1633	0.0420	17.0611	0.0418	1.0295	0.0163	11.2491	0.8038	9.0834

		4		5		6		B	
n	$f(\text{Hz})$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0213	2.4443	0.0283	17.5151	0.0293	21.6297	0.0363	61.6937
11	770	1.0069	1.1927	0.8962	10.6935	0.9840	1.9263	0.9185	8.8944
12	852	0.0588	2.8821	0.0385	19.8799	0.0347	9.1149	0.0544	38.0712
13	941	0.0593	7.7207	0.0374	89.0302	0.0120	37.7366	0.0500	71.6301
17	1209	0.8717	4.7241	0.0895	287.4873	0.0082	48.9154	0.0807	121.5424
19	1336	0.0883	26.6601	0.9901	1.0848	0.0260	0.6465	0.0392	26.5146
21	1477	0.0558	4.2452	0.0160	4.1026	0.9287	7.0204	0.1023	0.1664
23	1633	0.0419	6.4819	0.0448	506.3820	0.0193	12.5980	0.8017	8.9707

		7		8		9		C	
n	$f(\text{Hz})$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0776	1.4410	0.0725	21.5301	0.0701	17.8698	0.0642	5.5919
11	770	0.1736	24.5239	0.0446	61.6237	0.1197	3.2818	0.1014	19.2610
12	852	0.9962	0.2229	0.9837	1.9262	0.9806	1.6536	1.0026	2.7682
13	941	0.1193	3.2099	0.2100	30.9103	0.1662	3.2126	0.1268	14.7275
17	1209	0.8349	4.8397	0.0607	202.3413	0.0288	13.9583	0.0440	484.9389
19	1336	0.1118	24.9219	0.9671	0.7754	0.0100	22.5816	0.0197	23.4664
21	1477	0.0773	5.2696	0.0382	3.3001	0.9070	7.2223	0.0834	5.4669
23	1633	0.0573	3.3797	0.0711	161.7185	0.0461	11.5321	0.7769	9.7489

Tabela 4.8: Continuação.

n	$f(\text{Hz})$	*		0		#		D	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0963	14.5722	0.1004	7.1686	0.0959	2.7232	0.0970	6.9023
11	770	0.1661	8.2446	0.0897	31.3399	0.0996	23.5561	0.1316	7.4249
12	852	0.2763	11.2378	0.2245	1.8373	0.2241	1.8611	0.2636	13.0482
13	941	0.7810	0.5540	0.7345	2.0799	0.7386	1.4685	0.7653	0.1471
17	1209	0.8015	4.5857	0.0752	4.8332	0.0665	17.8921	0.0378	33.5437
19	1336	0.1221	29.2892	0.9844	0.9614	0.0446	9.9371	0.0237	1.9154
21	1477	0.0886	9.7103	0.0461	12.2417	0.9047	7.4913	0.0694	6.3902
23	1633	0.0839	16.9364	0.0713	86.1321	0.0532	7.3724	0.7648	9.9237

Na Tabela 4.8, observando as colunas correspondentes a V_n para cada dígito, verificamos que a decodificação sempre se dá de maneira correta (na ausência de ruído), como no caso em que usamos interpolação de primeira ordem. Uma comparação entre os resultados obtidos para os dois tipos de interpolação é feita na seção 4.3.

4.2 O Arredondamento na AFT

Como vimos no Capítulo 2, toda a teoria da Transformada Aritmética de Fourier é baseada na função de Möbius, particularmente, na sua fórmula de inversão para séries finitas (Teorema 2.2). O resultado dos três algoritmos apresentados consiste, basicamente, na expressão dos coeficientes harmônicos em função das somas parciais de Bruns. Na *AFT Simplificada*, a_n e b_n são avaliados por

$$a_n = \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) B_{2nl}(0), \quad (4.4)$$

$$b_n = \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) (-1)^{\frac{l-1}{2}} B_{2nl}\left(\frac{1}{4nl}\right), \quad (4.5)$$

para $n = 1, \dots, N$.

Utilizando o Teorema 2.2, é possível invertermos as Equações 4.4 e 4.5, de modo que as somas parciais sejam expressas em função dos coeficientes harmônicos. Fazendo isto, obtemos

$$B_{2n}(0) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} a_{kn}, \quad (4.6)$$

$$B_{2n}\left(\frac{1}{4n}\right) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} (-1)^{\frac{k-1}{2}} b_{kn}. \quad (4.7)$$

As Equações 4.6 e 4.7 podem, então, ser usadas para que conheçamos a que coeficientes cada uma das somas de Bruns necessárias à decodificação das frequências DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz) está associada. A $2n$ -ésima soma parcial, tanto para $\alpha = 0$ quanto para $\alpha = 1/4n$, relaciona-se aos coeficientes pares e ímpares de mesmos índices, mudando apenas o fato deles estarem sendo adicionados ou subtraídos ao longo dos somatórios. Esses índices são apresentados na Tabela 4.9.

Tabela 4.9: Índices dos coeficientes harmônicos associados a $2n$ -ésima soma de Bruns ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz).

$B_{2n}(\cdot)$	n , índices dos coeficientes harmônicos	$B_{2n}(\cdot)$	n , índices dos coeficientes harmônicos
B_{20}	10 30 50 70 90 110	B_{110}	55
B_{22}	11 33 55 77 99	B_{114}	57
B_{24}	12 36 60 84 108	B_{120}	60
B_{26}	13 39 65 91	B_{126}	63
B_{34}	17 51 85	B_{130}	65
B_{38}	19 57 95	B_{138}	69
B_{42}	21 63 105	B_{140}	70
B_{46}	23 69	B_{154}	77
B_{60}	30 90	B_{168}	84
B_{66}	33 99	B_{170}	85
B_{72}	36 108	B_{182}	91
B_{78}	39	B_{190}	95
B_{100}	50	B_{210}	105
B_{102}	51	B_{220}	110

Sabemos que a série de Fourier de um determinado sinal DTMF deve possuir apenas dois harmônicos mais fortes. Particularmente, para $N = 114$ e $F_s = 8$ kHz, esses harmônicos correspondem aos índices 10, 11, 12, 13, 17, 19, 21 e 23. Como já dissemos, as demais componentes, que se associam a frequências distintas das DTMF, possuem pouca significância. Diante disto, podemos, empiricamente, sugerir um arredondamento no algoritmo de Reed-Shih.

Percorrendo cada linha da Tabela 4.9, verificamos que só as oito primeiras somas de Bruns estão relacionadas a um dos oito índices que mencionamos. Por exemplo,

$$B_{20}(0) = a_{10} + a_{30} + a_{50} + a_{70} + a_{90} + a_{110}, \quad (4.8)$$

$$B_{20}(1/40) = b_{10} - b_{30} + b_{50} - b_{70} + b_{90} - a_{110}, \quad (4.9)$$

onde a_{10} e b_{10} são as únicas parcelas significativas. Isso equivale a dizermos que $a_{10} \approx B_{20}(0)$ e $b_{10} \approx B_{20}(1/40)$. Procedendo de maneira análoga para B_{22} , B_{24} , B_{26} , B_{34} , B_{38} , B_{42} e B_{46} , compomos a Tabela 4.10. As demais somas parciais são desprezadas.

Tabela 4.10: Somas de Bruns associadas ao n -ésimo coeficiente harmônico, usando arredondamento ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz).

n	$B_{2n}(\cdot)$, Somas de Bruns
10	B_{20}
11	B_{22}
12	B_{24}
13	B_{26}
17	B_{34}
19	B_{38}
21	B_{42}
23	B_{46}

A seguir, exibimos os resultados obtidos na decodificação dos sinais DTMF utilizando o arredondamento proposto. As Tabelas 4.11 e 4.12, para interpolação de ordem um e de ordem zero, respectivamente, apresentam os módulos dos coeficientes harmônicos e os erros percentuais de estimativa associados a cada frequência.

Tabela 4.11: Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF, usando arredondamento ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem).

n	f (Hz)	1		2		3		A	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.9972	1.0899	0.9724	2.5482	0.9742	2.3634	1.0140	1.3283
11	770	0.0842	1.3452	0.0727	5.7081	0.0691	0.6658	0.0813	10.5690
12	852	0.0638	1.4782	0.0364	6.4716	0.0370	4.3729	0.0532	16.6829
13	941	0.0572	9.1910	0.0222	23.9159	0.0267	6.9085	0.0779	106.7788
17	1209	0.8505	7.5508	0.0301	3.5779	0.0214	2.3713	0.0365	12.3994
19	1336	0.1119	3.5839	0.8732	13.1867	0.0270	13.1022	0.0492	14.8350
21	1477	0.0515	5.3378	0.0106	15.2777	0.8956	10.7187	0.0905	14.6573
23	1633	0.0345	3.7678	0.0015	60.6947	0.0247	34.8265	0.7676	13.1759

n	f (Hz)	4		5		6		B	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0088	57.8627	0.0218	9.2503	0.0203	15.6196	0.0459	104.4211
11	770	0.9920	2.6472	0.9806	2.2834	0.9769	2.6344	0.9869	2.1113
12	852	0.0583	2.0214	0.0310	3.4601	0.0316	0.6843	0.0486	23.3481
13	941	0.0490	10.8788	0.0143	27.8294	0.0189	1.8646	0.0699	139.7546
17	1209	0.8451	7.6366	0.0247	6.9142	0.0161	0.7716	0.0308	15.3678
19	1336	0.1163	3.4171	0.8688	13.2019	0.0227	13.5073	0.0446	16.4243
21	1477	0.0558	4.1116	0.0149	10.7869	0.8912	10.7754	0.0860	15.8543
23	1633	0.0381	3.1864	0.0048	34.3689	0.0280	27.1602	0.7640	13.2463

Tabela 4.11: Continuação.

		7		8		9		C	
n	f (Hz)	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0850	8.0190	0.0612	2.5490	0.0627	5.4044	0.1036	52.2977
11	770	0.1309	6.1460	0.1200	3.2217	0.1158	0.0932	0.1217	3.0698
12	852	0.9526	4.1634	0.9273	3.9091	0.9272	3.8814	0.9301	4.6565
13	941	0.1261	2.3490	0.1611	0.4370	0.1582	1.7640	0.1035	30.3909
17	1209	0.8064	8.0913	0.0238	18.7154	0.0285	12.7055	0.0157	109.3426
19	1336	0.1453	2.4053	0.8451	13.2982	0.0183	41.1033	0.0155	39.6729
21	1477	0.0799	2.0152	0.0378	4.2493	0.8712	10.8872	0.0617	21.9595
23	1633	0.0583	1.7840	0.0248	8.7704	0.0458	10.8894	0.7438	13.5996

		*		0		#		D	
n	f (Hz)	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0697	38.2196	0.0615	34.3021	0.0608	34.8771	0.0635	39.0332
11	770	0.1091	28.9146	0.1045	20.0069	0.1012	22.3349	0.0906	36.2354
12	852	0.2029	18.3077	0.1918	12.9974	0.1907	13.3435	0.1775	23.8566
13	941	0.7218	8.0917	0.6995	6.7425	0.6992	6.7228	0.7423	2.8665
17	1209	0.7704	8.2848	0.0837	5.9089	0.0861	6.2053	0.0762	34.0038
19	1336	0.1736	0.5614	0.8446	13.3810	0.0564	13.7624	0.0324	39.3959
21	1477	0.0973	0.7853	0.0524	0.2581	0.8715	10.8796	0.0517	20.6583
23	1633	0.0713	0.6299	0.0375	2.2770	0.0530	7.0358	0.7325	13.7371

Tabela 4.12: Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF, usando arredondamento

(N = 114, $F_s = 8$ kHz, interpolação de ordem zero).

		1		2		3		A	
n	f (Hz)	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\% \times 10^3$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.9654	4.2470	0.9753	0.0023	0.9802	1.7617	1.0777	7.6889
11	770	0.1051	23.1122	0.0286	0.0584	0.0371	45.8936	0.0143	80.5809
12	852	0.0548	12.9169	0.0450	0.0154	0.0405	4.7402	0.0523	14.7731
13	941	0.0357	43.2121	0.0386	0.0321	0.0107	62.8492	0.2498	563.5186
17	1209	0.8637	6.1193	0.0819	0.1822	0.0038	82.5825	0.0729	75.0351
19	1336	0.0930	19.8708	0.8148	0.0190	0.0257	17.5782	0.0338	41.4231
21	1477	0.0513	5.8575	0.0068	0.0452	0.9389	6.3966	0.0897	15.4206
23	1633	0.0454	26.5628	0.0439	1.0861	0.0819	346.2167	0.7974	9.8139

		4		5		6		B	
n	f (Hz)	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0470	125.9202	0.0244	1.6839	0.0224	7.2615	0.0940	318.7265
11	770	1.0245	0.5336	0.9074	9.5744	0.9595	4.3613	0.9354	7.2178
12	852	0.0498	12.9104	0.0378	17.9167	0.0334	5.0994	0.0512	30.1740
13	941	0.0333	39.5047	0.0380	91.8121	0.0130	32.3821	0.2485	752.3561
17	1209	0.8604	5.9577	0.0782	238.8742	0.0055	65.3553	0.0693	90.1826
19	1336	0.0968	19.5791	0.8100	19.0795	0.0209	20.2737	0.0303	43.2088
21	1477	0.0592	1.7008	0.0155	6.8441	0.9300	6.8902	0.0814	20.2956
23	1633	0.0462	17.4207	0.0464	527.5817	0.0797	261.5035	0.7951	9.7175

Tabela 4.12: Continuação.

		7		8		9		C	
n	f (Hz)	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0451	42.7242	0.0367	38.4123	0.0439	26.1945	0.1494	119.5821
11	770	0.1724	23.6490	0.0409	64.8157	0.0913	21.2401	0.0823	34.4357
12	852	0.9858	0.8276	0.9739	0.9178	0.9702	0.5737	0.9331	4.3511
13	941	0.1590	29.0285	0.2094	30.5376	0.1782	10.6615	0.0796	46.4891
17	1209	0.8229	6.2094	0.0564	181.0253	0.0435	72.0949	0.0380	404.7985
19	1336	0.1228	17.4864	0.7889	19.0592	0.0184	41.8925	0.0140	45.5358
21	1477	0.0875	7.2313	0.0450	13.9410	0.9018	7.7602	0.0553	30.1351
23	1633	0.0645	8.6010	0.0700	157.5178	0.0661	60.0144	0.7699	10.5626

		*		0		#		D	
n	f (Hz)	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0449	60.1825	0.0759	19.0067	0.0700	24.9964	0.1286	23.4712
11	770	0.1452	5.4111	0.0381	70.8612	0.0591	54.6031	0.0717	49.5795
12	852	0.2482	0.0646	0.2031	7.8785	0.2021	8.1718	0.1548	33.6056
13	941	0.7382	6.0094	0.7022	6.3857	0.6949	7.3029	0.9109	19.1991
17	1209	0.7847	6.5809	0.0747	5.5480	0.0876	8.0597	0.0496	12.7241
19	1336	0.1510	12.5768	0.8048	17.4608	0.0604	21.8237	0.0301	29.1352
21	1477	0.0971	1.0358	0.0527	0.2223	0.8968	8.3000	0.0447	31.4020
23	1633	0.0900	25.5269	0.0697	81.7805	0.0975	96.7736	0.7617	10.2983

4.3 Comentários e Outros Resultados

Os resultados quantitativos apresentados nas últimas seções possibilitam uma visão específica da análise de cada sinal DTMF através da Transformada Aritmética de Fourier. Verificamos que, para todos os métodos que empregamos, o principal objetivo foi atingido: a decodificação correta dos dígitos. Contudo, para que tenhamos uma idéia do erro de estimativa envolvido na detecção das frequências baixas e altas, podemos calcular o valor médio deste parâmetro para cada uma delas (utilizamos apenas os números em negrito nas Tabelas 4.5, 4.8, 4.11 e 4.12). O resultado é exibido na Tabela 4.13, a partir da qual obtemos algumas conclusões que merecem destaque:

- Quando calculamos a AFT completa, os dois coeficientes harmônicos mais significativos num sinal DTMF, em geral, são detectados com menos erro de estimativa quando se usa interpolação de ordem zero. Como dissemos na Seção 3.4, é uma tarefa inviável prever o erro inserido pelo algoritmo da AFT, todavia, pode-se afirmar que essa primeira conclusão está relacionada à aleatoriedade inerente à interpolação de ordem zero. A combinação das aproximações por falta e por

excesso pode, perfeitamente, produzir o efeito constatado. Quando arredondamos a AFT, a precisão é, praticamente, a mesma para os dois tipos de interpolação;

- Se utilizamos interpolação de primeira ordem, apesar de ser maior, o erro de estimativa apresenta um comportamento mais regular e, de certa forma, esperado (tanto para a AFT completa, quanto para a arredondada). Considerando que se está usando a mesma taxa de amostragem para detectar frequências distintas, é natural que uma interpolação linear produza melhores resultados para as frequências mais baixas. Por isso, na segunda e na quarta coluna da Tabela 4.13, $E_E\%$ cresce com o aumento de f ;
- Uma última conclusão, também prevista, é o fato de, para os dois tipos de interpolação, a AFT completa apresentar melhores resultados que a arredondada no que diz respeito ao valor médio do erro percentual de estimativa.

Tabela 4.13: Valor médio do erro percentual de estimativa para cada frequência DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolações de ordem um e zero).

f (Hz)	$E_E\%$ (AFT completa)		$E_E\%$ (com arredondamento)	
	Ordem um	Ordem zero	Ordem um	Ordem zero
697	2.5641	1.2579	1.8325	3.9994
770	3.0141	5.6767	2.4191	5.4218
852	3.6925	1.6427	4.1526	1.6676
941	4.1384	1.0624	6.1059	9.7243
1209	7.1353	4.8501	7.8909	6.2168
1336	9.9093	0.9554	13.2670	18.6499
1477	10.7946	7.1763	10.8152	7.3368
1633	13.1016	9.4317	13.4397	10.0981

Vale mencionar que, na Equação 4.1, que expressa analiticamente os sinais DTMF, poderíamos ter feito o índice i variar ao longo de uma outra faixa de 114 pontos. Conseqüentemente, estariam à nossa disposição amostras do sinal diferentes das que usamos nas simulações apresentadas e, quantitativamente, chegaríamos a resultados distintos dos que as tabelas contêm. No entanto, pode-se mostrar, realizando esse procedimento, que nossas interpretações e conclusões em nada se alterariam. Isso significa que, num sistema real, a fase dos sinais DTMF recebidos não seria um fator relevante no acerto de sua decodificação através da Transformada Aritmética. Esse fato decorre da teoria de Fourier e dos critérios que direcionaram a escolha do comprimento N .

Capítulo 5

Implementações e Complexidade Computacional

O propósito maior do uso da Transformada Aritmética de Fourier para decodificar sinais DTMF está relacionado à reduzida complexidade computacional deste algoritmo. Entretanto, o número de adições e multiplicações necessários à sua realização é também dependente da forma como o implementamos [35, 36].

Neste capítulo, apresentaremos e discutiremos algumas implementações para os casos estudados no Capítulo 4 ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolações de ordem um e zero). Dado o grande número de amostras envolvidas, particularmente, quando se usa interpolação de primeira ordem, seria bastante complicado, para o propósito dessa dissertação, esboçar um diagrama completo do algoritmo. Por este motivo, serão exibidos diagramas simplificados, mas que nos darão plenas condições de estabelecer a quantidade de operações que o mesmo necessita.

Os resultados obtidos serão comparados ao desempenho dos algoritmos de Cooley-Tukey de base 2 e de Goertzel [3], quando empregados nesta mesma aplicação.

5.1 O Número de Operações

O desenvolvimento teórico da *AFT Simplificada* possibilitou a obtenção de duas expressões que determinam as quantidades de adições e de multiplicações que o método de Reed-Shih [20] requer (Equações 2.38 e 2.39). Porém, verifica-se que isto é válido apenas quando se deseja calcular todos os coeficientes harmônicos, ou seja, do primeiro ao N -ésimo coeficiente. Como vimos anteriormente, precisamos obter coeficientes salteados (Tabela 4.1), logo, é necessário conhecermos o número de operações associado a cada soma de Bruns.

Se estivermos utilizando interpolação de primeira ordem, a $2n$ -ésima soma parcial envolve $2n - 1$ adições e 1 multiplicação. Para a situação em que usamos interpolação de ordem zero, observemos, mais uma vez, que a quantidade de amostras envolvidas diminui, para as somas parciais de índices maiores que 114, logo, o número de adições também decrescerá. Assim, para que encontremos o número total de operações, basta observarmos quantas são realizadas em cada soma parcial e de que forma essas somas se combinam para produzir o coeficiente propriamente dito (Tabela 4.2). A complexidade computacional dos dois casos é mostrada na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Complexidade computacional da *AFT Simplificada* na decodificação de sinais DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz).

Operações reais	Tipo de interpolação	
	Ordem um	Ordem zero
Multiplicações	56	56
Adições	5768	3472

É importante salientarmos que os valores da última tabela são obtidos considerando as somas de Bruns isoladamente. Contudo, analisando mais atentamente as Tabelas 4.3 e 4.4, para a interpolação de primeira ordem, e 4.6 e 4.7, para a interpolação de ordem zero, percebemos que alguns termos presentes em determinada soma aparecem nas seguintes. Por exemplo, $B_{20}(0)$ e $B_{24}(0)$, com interpolação de ordem um, somam as amostras do sinal $x[i]$ nos instantes de tempo apresentados na Tabela 5.2. O sombreado ressalta a alternância no somatório.

Tabela 5.2: Descrição das amostras necessárias ao cálculo de $B_{20}(0)$ e $B_{24}(0)$ ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem).

$B_{2n}(0)$, Soma de Bruns	$i \times 114$, instantes das amostras											
B_{20}	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{20}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{19}{20}$				
B_{24}	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{11}{24}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{23}{24}$

Como se vê na tabela, as amostras nos tempos 0 e $(\frac{1}{2} \times 114)$ e nos tempos $(\frac{1}{4} \times 114)$ e $(\frac{3}{4} \times 114)$, já somadas em B_{20} , podem ser reutilizadas em B_{24} , economizando, assim, duas adições. Um diagrama para as somas parciais em questão é apresentado na Figura 5.1.

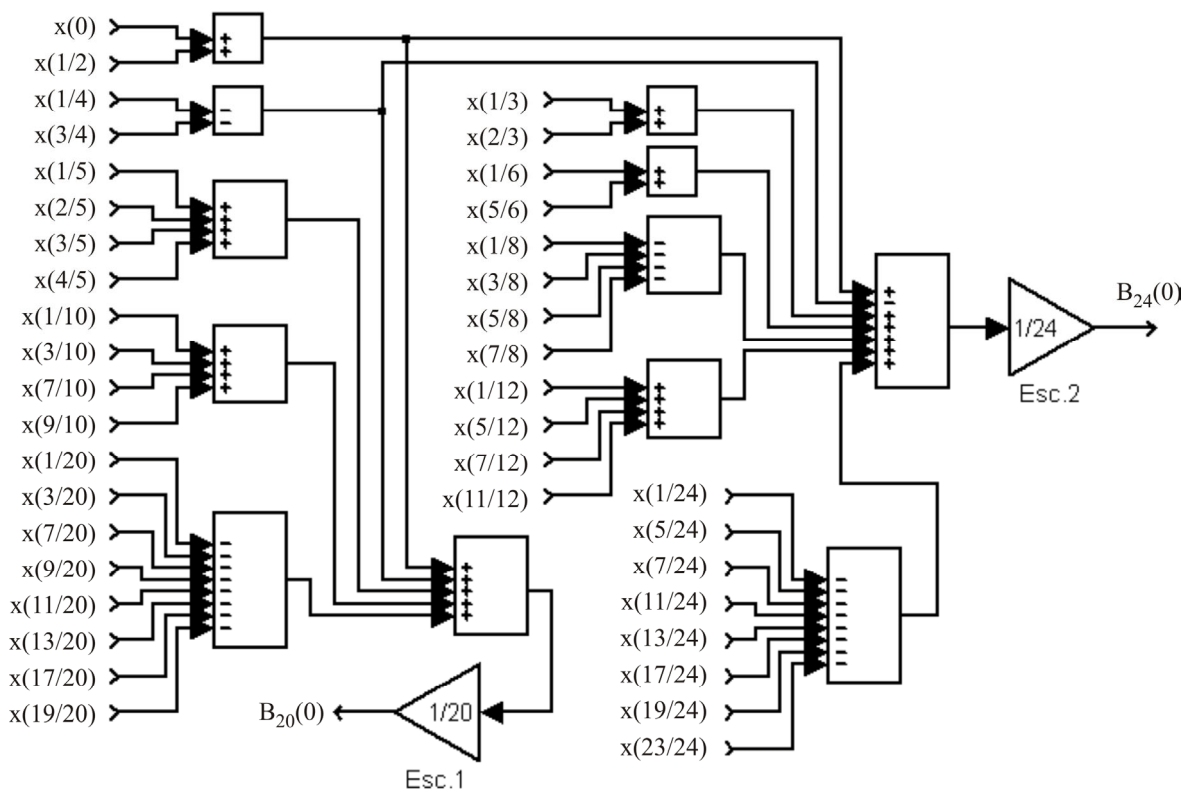


Figura 5.1. Diagrama otimizado para o cálculo de $B_{20}(0)$ e $B_{24}(0)$. Os instantes das amostras devem ser escalonados pelo fator 114 ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem).

O ganho computacional que este procedimento acarreta aparenta não ser muito vantajoso, entretanto, se o estendermos para as somas parciais subsequentes, fatalmente, acumular-se-á uma quantidade considerável de adições evitadas. É o resultado disto o que apresentaremos nas próximas seções.

5.2 $N = 114$, Interpolação de Primeira Ordem

A partir das Tabelas 4.3 e 4.4, através de um processo de contagem, pode-se verificar que são necessárias 4045 amostras distintas de $x[i]$ para obtermos os oito coeficientes harmônicos associados às frequências DTMF. Já comentamos que esse é um número

bastante elevado para que possamos aplicar de maneira estrita os princípios desenvolvidos na Seção 5.1 e esboçar um diagrama representativo do algoritmo. O que se pode fazer, então, é eliminar de cada linha da Tabela 4.3 e, posteriormente, da Tabela 4.4 as parcelas já adicionadas em somas de Bruns anteriores. Dessa maneira, chegamos ao número de adições que, efetivamente, precisamos realizar (Tabela 5.3).

Tabela 5.3: Número otimizado de adições necessárias ao cálculo de cada soma de Bruns na decodificação de sinais DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem).

Soma de Bruns	Número de Adições	
	$B_{2n}(0)$	$B_{2n}(1/4n)$
B_{20}	19	3
B_{22}	21	3
B_{24}	21	23
B_{26}	24	24
B_{34}	32	32
B_{38}	36	36
B_{42}	38	6
B_{46}	44	44
B_{60}	39	5
B_{66}	44	42
B_{72}	54	49
B_{78}	52	50
B_{100}	84	81
B_{102}	68	66
B_{110}	84	5
B_{114}	76	74
B_{120}	60	97
B_{126}	80	77
B_{130}	100	98
B_{138}	92	90
B_{140}	114	99
B_{154}	124	122
B_{168}	107	145
B_{170}	132	130
B_{182}	148	146
B_{190}	148	146
B_{210}	108	104
B_{220}	108	201
Combinações para produzir os coeficientes	20	20
Subtotal	2077	2018
TOTAL	4095	

Relacionando o total de adições calculado na Tabela 5.3 ao número apresentado na Tabela 5.1, vê-se que em torno de 1600 operações foram evitadas, o que significa uma redução de 30% na complexidade aditiva do algoritmo. O número de multiplicações permanece o mesmo. É importante dizermos que, para realizarmos com mais facilidade essa “redução”, agrupamos as amostras em tempos fracionários com a forma $114.(c/d)$, para um dado d . Como descrevemos no Capítulo 4, c/d é uma fração irredutível. A Figura 5.2 ilustra o cálculo de $B_{120}(0)$, especificando as adições que precisam ser realizadas.

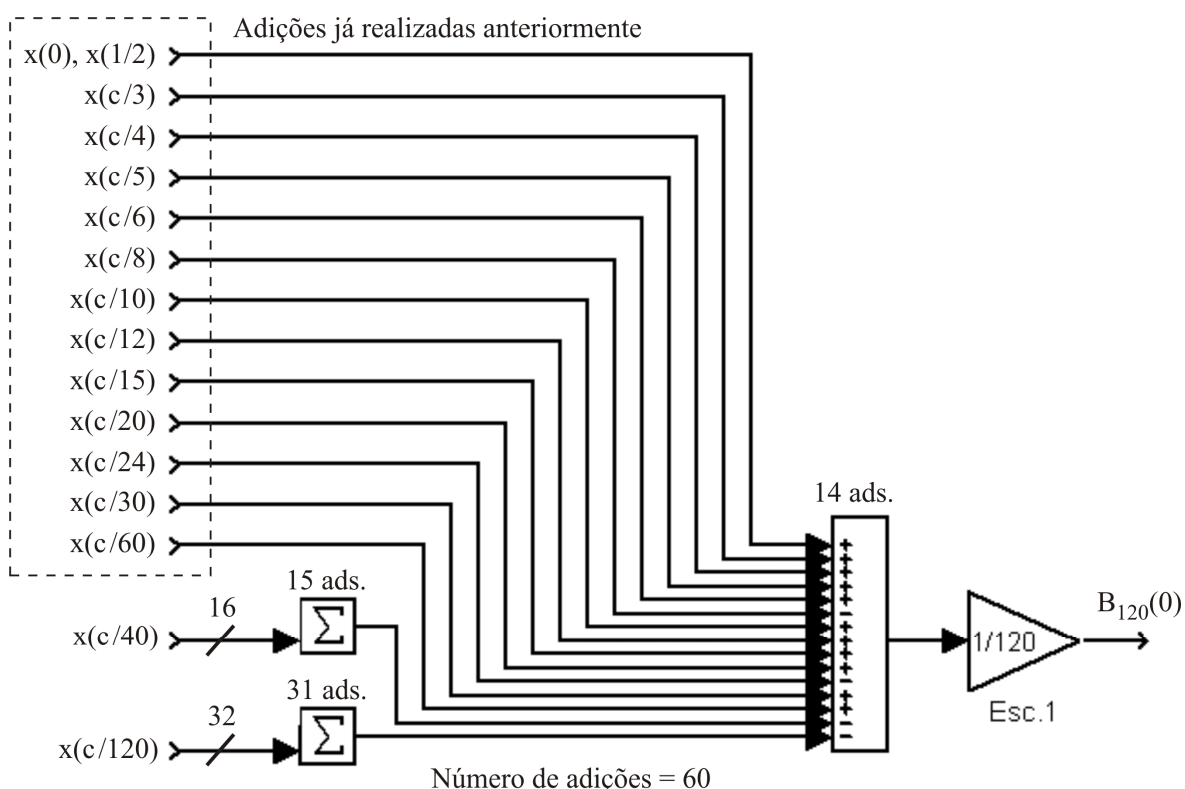


Figura 5.2. Diagrama otimizado para o cálculo de $B_{120}(0)$. Os instantes das amostras devem ser escalonados pelo fator 114. ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem).

5.3 $N = 114$, Interpolação de Ordem Zero

Para a interpolação de ordem zero, a aplicação das idéias desenvolvidas nas seções precedentes a esta pode, inicialmente, parecer mais viável, uma vez que precisamos lidar apenas com 115 amostras distintas do sinal (Tabelas 4.6 e 4.7). Porém, o tipo de aproximação realizado não gera espécie alguma de “regra” que nos permita agrupar as amostras em conjuntos, como fizemos no caso da interpolação de primeira ordem. Por este

motivo, conceber uma implementação que diminua o número de adições apresentado na Tabela 5.1 (3472) constitui uma tarefa bastante trabalhosa e que, sobretudo, não acarreta ganho significativo. A Figura 5.3 mostra um diagrama simplificado para o cálculo dos coeficientes a_n . Os b_n são obtidos de maneira análoga.

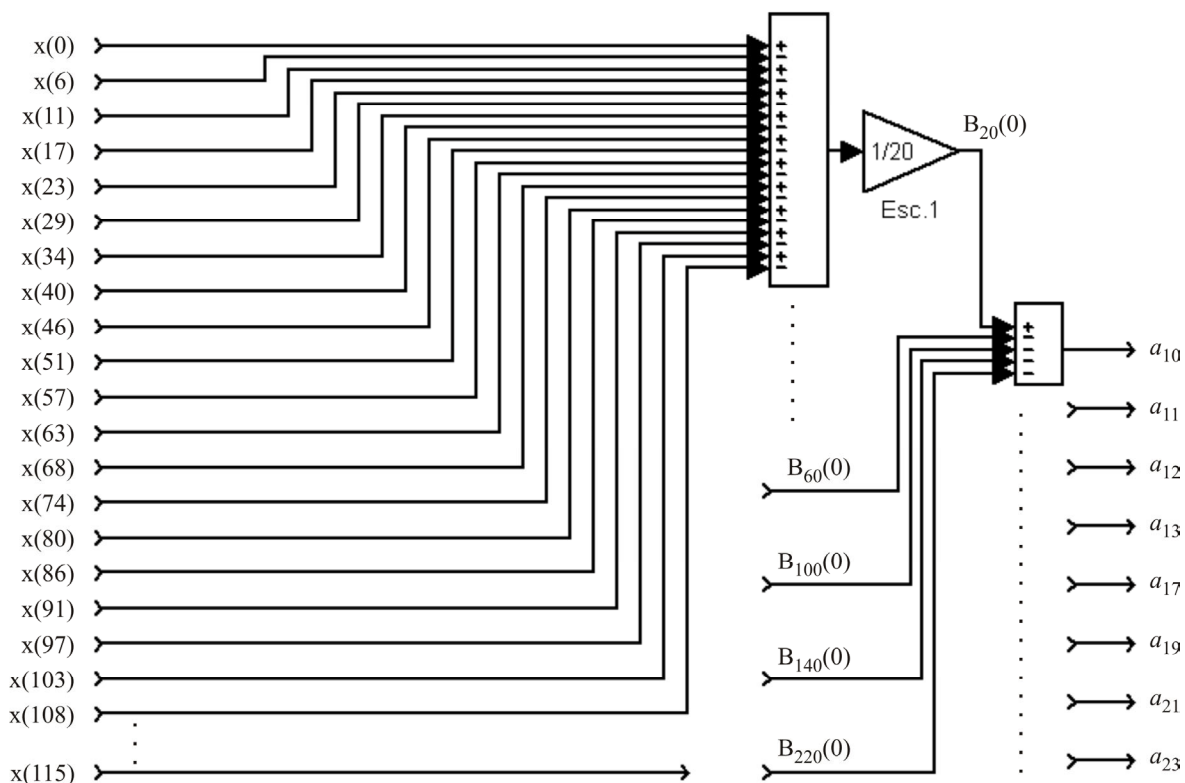


Figura 5.3. Diagrama simplificado para o cálculo dos coeficientes a_n
($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação ordem zero).

5.4 AFT Arredondada

O principal benefício que o arredondamento da AFT nos traz é a considerável diminuição da complexidade computacional na decodificação DTMF. Quando desprezamos a maioria das somas de Bruns no cálculo dos coeficientes pares e ímpares, estamos eliminando, também, a maioria das adições e multiplicações que precisariam ser feitas. Apesar desse procedimento acarretar inserção de erro percentual de estimativa, como vimos no Capítulo 4, o mesmo sugere uma implementação bastante simples. Baseados nas Tabelas 4.3, 4.4 e 4.10, exibimos, na Figura 5.4, um diagrama resumido para o cálculo dos coeficientes a_n e b_n usando a AFT arredondada e a interpolação de primeira ordem.

Se estivermos empregando interpolação de ordem zero, teremos uma implementação semelhante à apresentada na Figura 5.3. No entanto, serão necessárias ao cálculo arredondado dos coeficientes apenas as somas parciais de índices 20, 22, 24, 26, 34, 38, 42 e 46, para $\alpha = 0$ e $\alpha = 1/4n$.

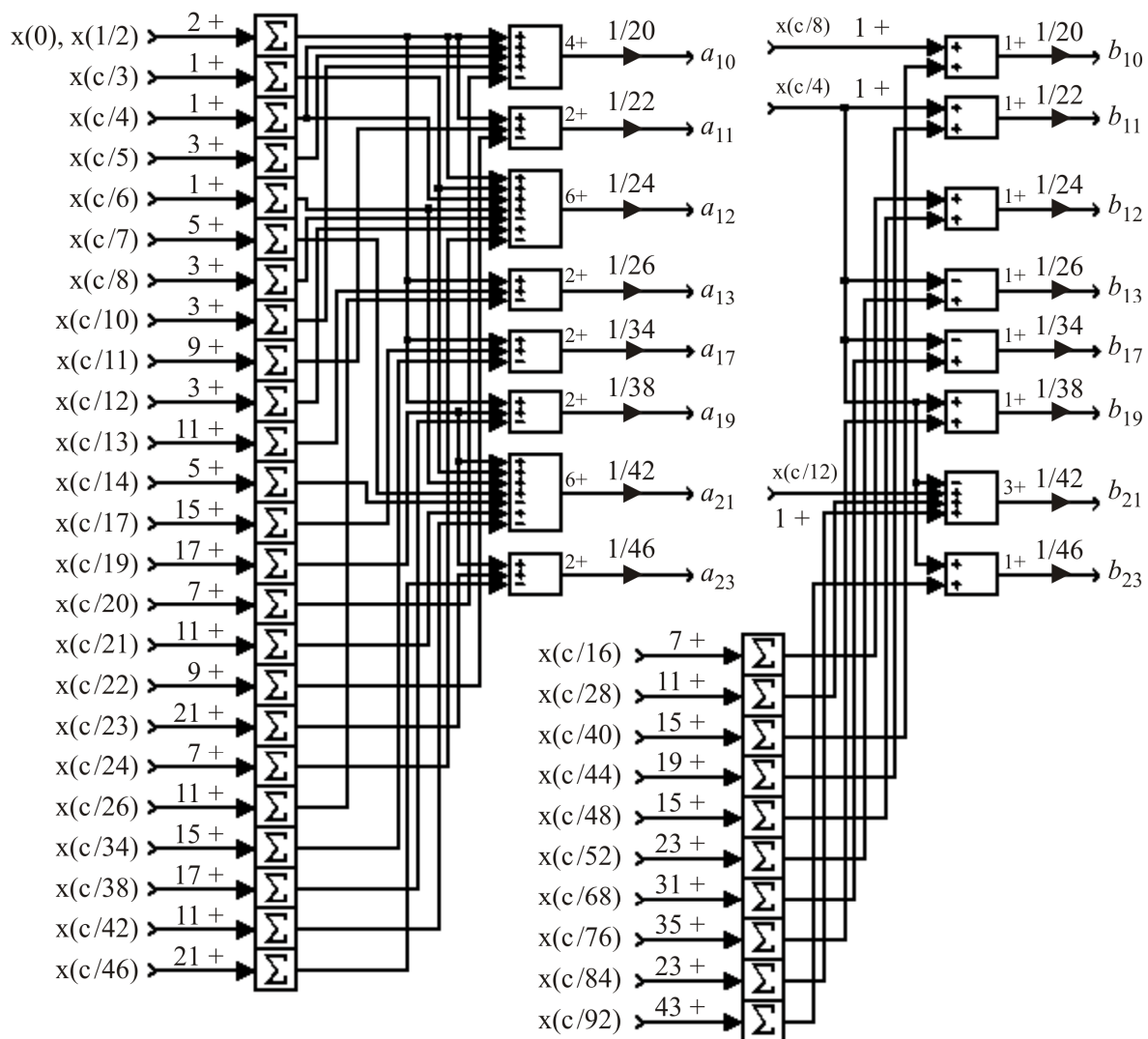


Figura 5.4. Diagrama otimizado para o cálculo dos coeficientes a_n e b_n , usando arredondamento. Os instantes das amostras devem ser escalonados pelo fator 114 ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem). A notação “ $k+$ ” representa a realização de $k+$ adições¹, número necessário à soma de $k + 1$ amostras em instantes de tempo fracionários.

¹O número de adições envolvendo as amostras nos instantes 0 e 1/2 é igual a 2, porque o algoritmo requer o cálculo da soma e da diferença entre essas amostras.

A partir do diagrama apresentado na Figura 5.4 e das amostras necessárias ao cálculo de cada soma parcial (tabelas do Capítulo 4), chegamos ao número de adições e multiplicações que a Transformada Aritmética de Fourier com arredondamento requer. Esse resultado, que é mostrado na Tabela 5.4, ilustra a expressiva diminuição em 70% das multiplicações e cerca de 90% das adições em relação aos números obtidos com a AFT completa.

Tabela 5.4: Complexidade computacional da *AFT Simplificada*, usando arredondamento, na decodificação de sinais DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz).

Operações reais	Tipo de interpolação		
	Ordem um	Ordem um otimizado	Ordem zero
Multiplicações	16	16	16
Adições	488	470	488

5.5 AFT *versus* Outros Algoritmos

Ao longo dessa dissertação, temos enfatizado a importância da complexidade computacional na avaliação de algoritmos que calculam a Transformada Discreta e Aritmética de Fourier. Em Processamento Digital de Sinais, a análise criteriosa deste fator é algo que determina a velocidade, a praticidade, o custo e diversos outros parâmetros decisivos à viabilidade de uma aplicação.

Como já comentamos, a decodificação de um sinal DTMF é realizada, normalmente, através do cálculo de sua DFT por métodos convencionais, usando algoritmos como os que foram apresentados na Seção 1.4. Diante disto, é imprescindível que façamos, nesse trabalho, uma comparação entre o número de operações requerido por esses métodos e pela AFT.

Através das Equações 1.37 e 1.38, obtemos, respectivamente, a complexidade multiplicativa e aditiva do algoritmo de Cooley-Tukey de base 2. Para isto, substituímos o comprimento 114, empregado nas simulações e estudos que apresentamos, por 128, potência de 2 mais próxima. Um ganho adicional é conseguido quando desprezamos as multiplicações triviais e exploramos as propriedades de simetria da DFT [15]. A complexidade do algoritmo de Goertzel é obtida pelas Equações 1.42 e 1.43. A Tabela 5.5

sumariza esses resultados e inclui, também, os números da AFT para os dois tipos de interpolação e para o arredondamento que propusemos.

Tabela 5.5: Comparativo entre a complexidade computacional da FFT de Cooley-Tukey de base 2 ($N = 128$), do algoritmo de Goertzel ($N = 114$) e da AFT ($N = 114$) na decodificação de sinais DTMF ($F_s = 8$ kHz).

Operações reais	Cooley-Tukey base 2	Goertzel	AFT completa			AFT arredondada	
			Ord. um	Ord. um otim.	Ord. zero	Ord. um / zero	Ord. um. otim.
Multiplicações	712	920	56	56	56	16	16
Adições	2504	1832	5768	4095	3472	488	470

A tabela acima nos permite destacar dois aspectos a respeito da complexidade computacional na decodificação de sinais DTMF:

- O emprego da AFT completa requer um número de adições cerca de 2 vezes maior que nos algoritmos de Cooley-Tukey e de Goertzel. Este fato, entretanto, é amplamente compensado pelo número de multiplicações, aproximadamente 15 vezes menor. Lembramos que, além das adições, a AFT necessita apenas de um fator de escalonamento para cada soma de Bruns calculada;
- Aplicando o arredondamento sugerido na Seção 4.2 à Transformada Aritmética, consegue-se um ganho computacional de grande significado. Em relação aos algoritmos de Cooley-Tukey e de Goertzel, o número de multiplicações é 50 vezes menor e o número de adições é 4 vezes menor.

Enfatizarmos que, no caso da AFT, a desvantagem decorrente da baixa complexidade computacional é a inserção do que definimos como erro percentual de estimativa. Apesar deste parâmetro não implicar decodificação incorreta dos dígitos DTMF, em presença de ruído, isso conduz a uma degradação no desempenho (aumento da probabilidade de decodificação incorreta). Para outras aplicações em que se estivesse interessado no valor exato de determinada componente, o erro percentual de estimativa precisaria ser considerado com mais rigor. Essa é uma restrição que não ocorre nos algoritmos de Cooley-Tukey e Goertzel.

Capítulo 6

Efeitos da Quantização na Decodificação DTMF

Quando imaginamos a aplicação dos sinais DTMF em sistemas reais, sabemos que, de alguma forma, os mesmos estão sujeitos à ação de ruído. Uma análise completa deste fenômeno, entretanto, requer o estudo de diversos aspectos, tais como codificação e meios de transmissão. Neste capítulo, estamos primordialmente interessados em obter uma visão inicial do comportamento da Transformada Aritmética de Fourier na decodificação de sinais DTMF (como na Equação 4.1) corrompidos por um ruído aditivo.

Como podemos observar na Figura 3.3, a etapa seguinte à amostragem no processo de conversão Analógico / Digital de um sinal é a quantização. Ela funciona como uma discretização da amplitude, que passa a assumir valores pré-determinados a fim de serem associados a um código. A este procedimento, naturalmente, está atrelada a inserção de um erro, o erro de quantização, que assumiremos corresponder a um ruído branco uniformemente distribuído [12].

Baseados nisso, apresentaremos resultados do uso da AFT na decodificação de sinais DTMF quantizados, com o intuito de analisar a robustez dessa ferramenta. A partir da quantização empregada, calcularemos, também, valores para a relação sinal-ruído.

6.1 A Quantização

A quantização de uma seqüência corresponde ao arredondamento da amplitude de cada uma de suas amostras para um valor pré-definido mais próximo. Se a seqüência em questão for $x[i]$, representamos essa operação por

$$\hat{x}[i] = Q(x[i]), \quad (6.1)$$

onde $\hat{x}[i]$ é gerada a partir de um sistema não-linear, o quantizador. A Figura 6.1 apresenta um quantizador com 8 níveis. Observando a figura, percebemos que os níveis são distribuídos uniformemente, mas, dependendo do objetivo que se tenha, essa distribuição pode ser não uniforme.

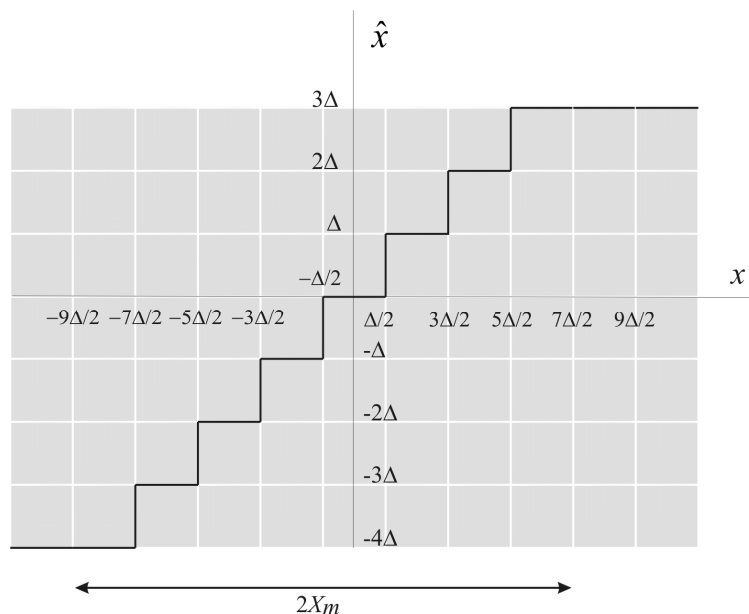


Figura 6.1: Quantizador uniforme com 8 níveis.

O parâmetro X_m , representado acima, é que define a relação entre Δ e o número de níveis de um quantizador. Normalmente, esse número corresponde a uma potência de 2, o que nos permite escrever

$$\Delta = \frac{X_m}{2^B}. \quad (6.2)$$

$B + 1$ é o número de bits das palavras binárias associadas a cada um dos níveis de quantização [12]. Na discretização da amplitude das amostras para o caso da figura, se

$$\frac{\Delta}{2} < x[i] \leq \frac{3\Delta}{2}, \text{ então } \hat{x}[i] = \Delta. \quad (6.3)$$

O mesmo raciocínio é estendido às outras faixas de valores que $x[i]$ pode assumir. Após obtermos $\hat{x}[i]$, podemos calcular o que chamamos de erro de quantização, definido por

$$e[i] = \hat{x}[i] - x[i]. \quad (6.4)$$

Das Equações 6.3 e 6.4, segue que

$$-\frac{\Delta}{2} < e[i] \leq \frac{\Delta}{2}, \quad (6.5)$$

se

$$\left(-X_m - \frac{\Delta}{2}\right) < x[i] \leq \left(X_m - \frac{\Delta}{2}\right). \quad (6.6)$$

De forma simplificada, o erro de um quantizador uniforme pode ser modelado segundo a representação da Figura 6.2. Nesse modelo, o erro de quantização é visto como um sinal de ruído aditivo. Conhecendo $e[i]$, calculamos a relação sinal-ruído em dB através da expressão

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_x}{P_e} \right), \quad (6.7)$$

onde P_x e P_e são, respectivamente, as potências de $x[i]$ e $e[i]$, dadas por

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x[i])^2 \quad \text{e} \quad (6.8)$$

$$P_e = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (e[i])^2, \quad (6.9)$$

considerando que ambas as seqüências possuem N pontos.

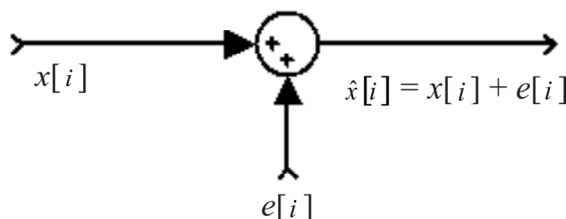


Figura 6.2: Modelo de ruído aditivo para o erro de quantização.

6.2 A AFT e os Sinais DTMF Quantizados

Os fundamentos introduzidos na seção anterior permitem incluir a quantização dos sinais DTMF sob a forma da Equação 4.1 antes de processá-los através da AFT. Inicialmente, entretanto, é necessário definirmos o número de níveis que teremos bem como o valor do parâmetro Δ .

Para escolhermos o número de níveis utilizados na quantização, podemos nos basear no sistema PCM-30, largamente utilizado na telefonia do Brasil. Esse sistema contém muitas particularidades que não serão tratadas aqui e, por hora, consideraremos apenas o fato do mesmo pré-determinar 256 níveis de amplitude [33]. Além disso, utilizaremos sinais DTMF normalizados, ou seja, que não foram escalonados por qualquer fator (Equação 4.1). Isso significa que o máximo e o mínimo dos mesmos são, respectivamente, 2 e -2 .

Conhecendo essas informações e usando as Equações 6.2 e 6.6, encontramos um valor para Δ aproximadamente igual a 0,01568.

A partir deste ponto, realizamos simulações semelhantes às do Capítulo 4. A frequência de amostragem e o comprimento da transformada foram mantidas. Foram mudados apenas os sinais DTMF, agora, quantizados por um programa de acordo com os parâmetros definidos (vide Apêndice B). Os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 6.1 a 6.5. O mesmo programa, utilizando as Equações 6.7 a 6.9, calculou a relação sinal-ruído média para os 16 sinais, SNR = 46,8293 dB.

Tabela 6.1: Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem, 256 níveis de quantização).

n	f (Hz)	1		2		3		A	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.9807	2.7242	0.9741	2.3738	0.9726	2.5151	0.9729	2.7770
11	770	0.0804	5.7375	0.0758	10.2221	0.0670	2.3106	0.0683	7.0784
12	852	0.0621	1.3232	0.0373	4.3555	0.0373	3.4975	0.0456	0.0785
13	941	0.0589	6.4380	0.0235	19.7016	0.0290	1.0783	0.0344	8.5951
17	1209	0.8546	7.1056	0.0293	1.1375	0.0203	7.4493	0.0392	5.7700
19	1336	0.1070	7.8663	0.9066	9.8698	0.0286	8.1960	0.0543	6.0950
21	1477	0.0488	10.4050	0.0105	15.7184	0.8956	10.7101	0.0943	11.0358
23	1633	0.0336	6.3248	0.0016	57.2471	0.0152	17.4263	0.7700	12.9086

n	f (Hz)	4		5		6		B	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0260	24.9163	0.0233	2.9722	0.0239	0.9173	0.0256	14.0365
11	770	0.9857	3.2676	0.9809	2.2499	0.9729	3.0264	0.9732	3.4747
12	852	0.0555	2.8760	0.0303	5.7386	0.0306	3.5681	0.0401	1.8544
13	941	0.0532	3.3469	0.0141	28.6364	0.0181	6.0691	0.0272	6.7901
17	1209	0.8487	7.2368	0.0240	3.8031	0.0148	7.5167	0.0343	5.8278
19	1336	0.1129	6.2066	0.9025	9.8409	0.0229	12.5308	0.0494	7.5025
21	1477	0.0527	9.5293	0.0148	11.0289	0.8919	10.7096	0.0915	10.4790
23	1633	0.0366	6.9475	0.0039	46.6665	0.0202	8.5199	0.7661	13.0157

n	f (Hz)	7		8		9		C	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0754	4.1775	0.0560	6.2011	0.0560	5.7751	0.0619	9.0823
11	770	0.1311	5.9893	0.1178	1.4009	0.1109	4.2891	0.1181	5.9859
12	852	0.9577	3.6545	0.9284	3.7983	0.9291	3.6806	0.9405	3.5921
13	941	0.1197	2.8260	0.1596	0.5338	0.1542	4.2612	0.1440	3.1538
17	1209	0.8155	7.0593	0.0161	19.6522	0.0229	9.2508	0.0096	27.0329
19	1336	0.1375	7.6520	0.8773	9.9913	0.0104	20.1202	0.0271	5.6012
21	1477	0.0731	10.4311	0.0353	10.5056	0.8721	10.7967	0.0718	9.2917
23	1633	0.0577	2.7373	0.0248	8.6445	0.0404	2.2419	0.7468	13.2490

Tabela 6.1: Continuação.

n	f (Hz)	*		0		#		D	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.1120	0.6695	0.0888	5.1805	0.0901	3.4897	0.1006	3.3838
11	770	0.1497	2.4517	0.1292	1.1230	0.1263	3.0687	0.1395	1.8268
12	852	0.2380	4.1792	0.2129	3.4442	0.2114	3.9379	0.2251	3.4489
13	941	0.7530	4.1178	0.7176	4.3282	0.7184	4.1561	0.7318	4.2453
17	1209	0.7807	7.0549	0.0723	8.4772	0.0746	7.8965	0.0503	11.5383
19	1336	0.1602	7.2425	0.8777	9.9794	0.0447	9.7563	0.0176	24.1880
21	1477	0.0878	10.5329	0.0468	10.9141	0.8715	10.8834	0.0570	12.5872
23	1633	0.0663	7.5557	0.0342	10.7147	0.0457	7.7067	0.7355	13.3782

Tabela 6.2: Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de ordem zero, 256 níveis de quantização).

n	f (Hz)	1		2		3		A	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\% \times 10^3$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.9966	1.1546	0.9886	0.0009	0.9875	1.0250	0.9797	2.0984
11	770	0.1043	22.2201	0.0293	0.0574	0.0687	0.0668	0.0298	59.4842
12	852	0.0606	3.5916	0.0457	0.0174	0.0422	9.2072	0.0585	28.3975
13	941	0.0577	8.3882	0.0383	0.0311	0.0114	60.1649	0.0487	29.3720
17	1209	0.8716	5.2628	0.0897	0.2091	0.0086	60.9443	0.0810	94.6571
19	1336	0.0839	27.7281	0.9948	0.0011	0.0314	0.8071	0.0431	25.4136
21	1477	0.0529	2.7599	0.0113	0.0095	0.9335	6.9395	0.1047	1.2331
23	1633	0.0426	18.8278	0.0426	1.0513	0.0161	12.5130	0.8038	9.0815

n	f (Hz)	4		5		6		B	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0209	0.2644	0.0282	17.1897	0.0296	22.9193	0.0366	63.1403
11	770	1.0070	1.1787	0.8964	10.6725	0.9838	1.9422	0.9184	8.9085
12	852	0.0573	0.1390	0.0386	20.1406	0.0355	11.6279	0.0536	36.2564
13	941	0.0603	9.5862	0.0367	85.4745	0.0114	40.9963	0.0501	71.8202
17	1209	0.8708	4.8243	0.0889	285.0547	0.0081	49.5561	0.0804	120.7015
19	1336	0.0897	25.4924	0.9902	1.0773	0.0255	2.8475	0.0383	28.2475
21	1477	0.0571	1.9675	0.0158	5.3311	0.9288	7.0166	0.1026	0.4344
23	1633	0.0416	5.8070	0.0435	488.7883	0.0200	9.5424	0.8013	9.0138

n	f (Hz)	7		8		9		C	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0778	1.1035	0.0722	21.0424	0.0702	18.0721	0.0625	8.1188
11	770	0.1732	24.2042	0.0445	61.7120	0.1197	3.2417	0.1016	19.0613
12	852	0.9954	0.1451	0.9832	1.8748	0.9814	1.7366	1.0026	2.7748
13	941	0.1193	3.1936	0.2099	30.8556	0.1660	3.0468	0.1262	15.1301
17	1209	0.8354	4.7859	0.0610	203.7193	0.0284	12.2990	0.0441	485.7128
19	1336	0.1127	24.2707	0.9673	0.7628	0.0104	19.9429	0.0200	22.3670
21	1477	0.0780	4.4559	0.0378	4.1846	0.9074	7.1876	0.0835	5.5748
23	1633	0.0579	2.4121	0.0705	159.4219	0.0467	13.1060	0.7770	9.7337

Tabela 6.2. Continuação.

n	f (Hz)	*		0		#		D	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0963	14.6461	0.0993	6.0283	0.0964	3.3157	0.0967	7.1656
11	770	0.1667	8.6286	0.0898	31.2249	0.0996	23.5204	0.1312	7.7061
12	852	0.2773	11.6176	0.2253	2.1971	0.2236	1.6046	0.2643	13.3373
13	941	0.7801	0.6755	0.7335	2.2125	0.7391	1.4011	0.7642	0.0002
17	1209	0.8020	4.5208	0.0761	3.7288	0.0663	18.1799	0.0370	34.9410
19	1336	0.1223	29.1819	0.9846	0.9831	0.0438	11.6285	0.0237	1.6950
21	1477	0.0892	9.1030	0.0455	13.4608	0.9041	7.5463	0.0683	4.7995
23	1633	0.0835	16.4134	0.0717	87.0605	0.0533	7.6719	0.7637	10.0611

Tabela 6.3: Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF, usando arredondamento ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de primeira ordem, 256 níveis de quantização).

n	f (Hz)	1		2		3		A	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.9977	1.0386	0.9723	2.5535	0.9728	2.5024	1.0132	1.2485
11	770	0.0834	2.2969	0.0738	7.2391	0.0682	0.6899	0.0811	10.3185
12	852	0.0641	1.9858	0.0364	6.4950	0.0368	4.8688	0.0526	15.5092
13	941	0.0554	12.0068	0.0226	22.5147	0.0274	4.5632	0.0778	106.7487
17	1209	0.8508	7.5185	0.0292	0.7555	0.0214	2.4864	0.0370	11.0256
19	1336	0.1114	4.0699	0.8729	13.2204	0.0274	12.1151	0.0493	14.6521
21	1477	0.0519	4.6098	0.0102	17.8513	0.8954	10.7358	0.0901	14.9919
23	1633	0.0351	2.1717	0.0020	45.6549	0.0243	32.3970	0.7676	13.1806

n	f (Hz)	4		5		6		B	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0077	63.1991	0.0223	7.3147	0.0203	15.7302	0.0458	104.1938
11	770	0.9923	2.6214	0.9811	2.2284	0.9769	2.6300	0.9861	2.1956
12	852	0.0589	3.0998	0.0313	2.6257	0.0322	1.3255	0.0491	24.6223
13	941	0.0496	9.8619	0.0151	23.9468	0.0174	9.3244	0.0696	138.9203
17	1209	0.8441	7.7489	0.0241	4.3978	0.0159	0.3516	0.0304	16.5621
19	1336	0.1179	2.0351	0.8689	13.1950	0.0221	15.6137	0.0434	18.7009
21	1477	0.0571	2.0444	0.0148	11.1103	0.8915	10.7462	0.0861	15.7525
23	1633	0.0379	3.7155	0.0037	50.3465	0.0286	29.4707	0.7639	13.2591

n	f (Hz)	7		8		9		C	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0857	8.8632	0.0614	2.8415	0.0628	5.6956	0.1025	50.6366
11	770	0.1297	6.9736	0.1188	2.2627	0.1169	0.8494	0.1206	3.9471
12	852	0.9530	4.1241	0.9269	3.9585	0.9275	3.8451	0.9298	4.6895
13	941	0.1260	2.2350	0.1613	0.5817	0.1578	2.0045	0.1034	30.4736
17	1209	0.8072	8.0036	0.0238	18.6350	0.0285	12.7750	0.0156	106.7644
19	1336	0.1456	2.1697	0.8448	13.3261	0.0186	43.4323	0.0154	40.1679
21	1477	0.0806	1.1585	0.0374	5.3572	0.8717	10.8336	0.0618	21.9323
23	1633	0.0588	0.9111	0.0242	10.8614	0.0464	12.2725	0.7440	13.5732

Tabela 6.3. Continuação.

n	$f(\text{Hz})$	*		0		#		D	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0692	38.6502	0.0618	34.0768	0.0598	35.9091	0.0614	41.0401
11	770	0.1092	28.8072	0.1031	21.1098	0.1020	21.7086	0.0912	35.8215
12	852	0.2030	18.2652	0.1923	12.7831	0.1902	13.5804	0.1783	23.5504
13	941	0.7216	8.1211	0.6994	6.7606	0.6990	6.7512	0.7419	2.9156
17	1209	0.7710	8.2112	0.0839	6.1536	0.0860	6.1770	0.0760	33.6838
19	1336	0.1737	0.5902	0.8446	13.3777	0.0550	11.0464	0.0327	40.4307
21	1477	0.0982	0.1268	0.0521	0.9891	0.8715	10.8850	0.0510	21.8132
23	1633	0.0709	1.1652	0.0371	3.1483	0.0528	6.5996	0.7316	13.8398

Tabela 6.4: Módulos dos coeficientes harmônicos e erros percentuais de estimativa para cada sinal DTMF, usando arredondamento ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolação de ordem zero, 256 níveis de quantização).

n	$f(\text{Hz})$	1		2		3		A	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\% \times 10^3$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.9656	4.2263	0.9749	0.0023	0.9789	1.8860	1.0769	7.6086
11	770	0.1046	22.6054	0.0272	0.0604	0.0356	48.1307	0.0142	80.7553
12	852	0.0562	10.6486	0.0448	0.0149	0.0408	5.4855	0.0512	12.4506
13	941	0.0346	45.0614	0.0394	0.0347	0.0094	67.1277	0.2501	564.3173
17	1209	0.8635	6.1380	0.0808	0.1785	0.0028	87.1934	0.0737	77.0110
19	1336	0.0925	20.2922	0.8147	0.0190	0.0247	20.6272	0.0342	40.7987
21	1477	0.0514	5.5764	0.0064	0.0489	0.9391	6.3778	0.0893	15.7428
23	1633	0.0462	28.6161	0.0451	1.1185	0.0825	349.5262	0.7972	9.8331

n	$f(\text{Hz})$	4		5		6		B	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0464	123.0385	0.0252	4.8505	0.0226	6.3406	0.0943	319.9845
11	770	1.0249	0.5774	0.9077	9.5418	0.9602	4.2957	0.9351	7.2516
12	852	0.0486	15.0547	0.0386	20.2154	0.0337	6.1593	0.0514	30.4784
13	941	0.0328	40.4070	0.0364	84.1322	0.0132	31.5031	0.2477	749.7657
17	1209	0.8594	6.0700	0.0775	235.8268	0.0059	63.0684	0.0689	89.1691
19	1336	0.0981	18.5262	0.8094	19.1360	0.0203	22.6884	0.0296	44.4965
21	1477	0.0604	3.7066	0.0155	7.1999	0.9298	6.9147	0.0822	19.5436
23	1633	0.0460	17.0873	0.0450	509.0102	0.0792	259.2461	0.7951	9.7230

n	$f(\text{Hz})$	7		8		9		C	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0449	42.9345	0.0367	38.4525	0.0437	26.4408	0.1479	117.4118
11	770	0.1715	23.0110	0.0389	66.4867	0.0932	19.6063	0.0821	34.6487
12	852	0.9862	0.7864	0.9727	0.7886	0.9707	0.6269	0.9328	4.3855
13	941	0.1593	29.3063	0.2088	30.1890	0.1783	10.6926	0.0798	46.3475
17	1209	0.8234	6.1607	0.0566	182.0435	0.0433	71.4361	0.0383	409.2958
19	1336	0.1229	17.4537	0.7891	19.0451	0.0187	44.4788	0.0149	41.9896
21	1477	0.0880	7.8677	0.0448	13.4818	0.9017	7.7694	0.0556	29.6930
23	1633	0.0648	9.1955	0.0695	155.4883	0.0656	58.9123	0.7704	10.5064

Tabela 6.4. Continuação.

n	$f(\text{Hz})$	*		0		#		D	
		V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$	V_n	$E_E\%$
10	697	0.0440	60.9956	0.0760	18.8706	0.0690	26.0468	0.1264	21.3405
11	770	0.1442	6.0265	0.0372	71.5225	0.0599	54.0084	0.0726	48.9091
12	852	0.2482	0.1004	0.2042	7.3732	0.2013	8.5007	0.1550	33.5445
13	941	0.7377	6.0730	0.7019	6.4179	0.6949	7.2962	0.9103	19.1191
17	1209	0.7852	6.5273	0.0749	5.2717	0.0871	7.5181	0.0496	12.8241
19	1336	0.1509	12.6091	0.8043	17.5158	0.0591	19.2349	0.0303	30.1414
21	1477	0.0977	0.3727	0.0517	1.6746	0.8966	8.3142	0.0430	34.0687
23	1633	0.0894	24.6075	0.0699	82.4567	0.0981	97.9663	0.7610	10.3752

Tabela 6.5: Valor médio do erro percentual de estimativa para cada frequência DTMF ($N = 114$, $F_s = 8$ kHz, interpolações de ordem um e zero, 256 níveis de quantização)

$f(\text{Hz})$	$E_E\%$ (AFT completa)		$E_E\%$ (com arredondamento)	
	Ordem um	Ordem zero	Ordem um	Ordem zero
697	2.5975	1.2945	1.8358	4.0052
770	3.0047	5.6755	2.4189	5.4166
852	3.6814	1.6328	4.1543	1.6469
941	4.2119	1.0723	6.1371	9.7266
1209	7.1142	4.8485	7.8706	6.2240
1336	9.9204	0.9808	13.2798	18.6742
1477	10.7750	7.1725	10.8002	7.3440
1633	13.1379	9.4725	13.4632	10.1094

Observando as Tabelas 6.1 a 6.4, verificamos que a decodificação de cada sinal DTMF dá-se de maneira correta sempre. Isso independe do tipo de interpolação ou do arredondamento que estejamos utilizando. Comparando os dados da Tabela 6.5 com os da Tabela 4.13, vemos que, praticamente, não há alteração no erro percentual de estimativa quando detectamos cada uma das oito frequências. Ou seja, quantizar os sinais DTMF segundo os parâmetros utilizados não afeta sua decodificação em ausência de ruído do canal.

Um estudo mais completo sobre os efeitos do erro de quantização no cálculo da AFT pode ser feito variando simplesmente o número de níveis ou especificando de maneira mais completa as características do quantizador utilizado. Na prática, a maior fonte de degradação de um sinal é o ruído do canal, cuja influência sobre a aplicação proposta nessa dissertação merece uma investigação detalhada.

Capítulo 7

Conclusões

Nesta dissertação, propusemos o emprego da Transformada Aritmética de Fourier na decodificação de sinais DTMF. Realizamos uma pesquisa buscando estabelecer formas de aplicar essa ferramenta, aproveitando as vantagens que a mesma proporciona e expondo suas limitações.

Além de descrevermos os aspectos teóricos da AFT, introduzimos alguns critérios que permitiram a adaptação da mesma à análise de sinais digitais pertencentes, particularmente, ao sistema DTMF. Baseados nisso, fizemos o estudo de diversos casos e, apresentando procedimentos e resultados detalhados, pudemos comprovar a eficácia da nossa proposta. Foi definido um parâmetro de precisão, o erro percentual de estimativa, decisivo nas interpretações e conclusões obtidas para o método que utilizamos.

Em paralelo às simulações realizadas, apoiamo-nos nos fundamentos matemáticos que originaram a AFT e sugerimos uma forma de arredondar o seu cálculo visando a aplicação que tratamos. Mostramos que, para a decodificação de sinais DTMF, a aproximação proposta oferece uma simplificação expressiva no algoritmo, ao custo de uma pequena degradação de desempenho.

Esboçamos alternativas para implementar a Transformada Aritmética de Fourier aliando-as à complexidade computacional requerida por cada uma delas. Introduzimos princípios que, de acordo com a implementação usada, permitem-nos diminuir significativamente a complexidade aditiva da *AFT Simplificada*. Também foram apresentados os resultados da AFT arredondada no que diz respeito à complexidade computacional, o que comprovou seus imensos benefícios nesse aspecto. Para todas as implementações propostas, realizamos uma comparação entre o número de multiplicações e adições necessárias aos algoritmos de Cooley-Tukey e de Goertzel e à AFT. Assim, verificamos o quanto o emprego desta última ferramenta é vantajoso, o que, sem dúvida, constitui a conclusão mais importante deste trabalho.

Impulsionados por esse resultado, principalmente, e por todo o conteúdo desenvolvido, podemos gerar inúmeras expectativas acerca da efetiva introdução da Transformada Aritmética de Fourier em outras importantes aplicações de Processamento Digital de Sinais, envolvendo, por exemplo, Processamento de Voz e Imagem. Entretanto, para que isto se torne uma realidade, é necessário que diversos pontos, cuja abordagem requerida por esta dissertação foi pouco profunda, sejam estudados com mais rigor. Dentre eles, destacamos:

- Estabelecimento de limites e critérios mais refinados para a adaptação da AFT ao processamento de quaisquer sinais digitais;
- Influência que o tipo de interpolação usado na obtenção das amostras em tempos fracionários possui sobre os resultados da AFT;
- Comportamento do algoritmo na análise de sinais corrompidos por alguma espécie de ruído.

Esclarecidos os pontos supracitados, parece razoável afirmarmos que a AFT constituirá uma base cada vez mais sólida para darmos continuidade a algumas idéias que apresentamos de maneira introdutória e para investigarmos novos temas e questões. Diante da ainda “pouco explorada” Transformada Aritmética de Fourier, é possível compormos uma lista de investigações com alto potencial para serem realizados:

- Estudo mais completo das possibilidades de arredondamento no cálculo da AFT para a decodificação DTMF e para outros propósitos;
- Investigação de métodos de interpolação em Transformadas Aritméticas diferentes dos que foram apresentados nesta dissertação [37];
- Análise estatística dos resultados do algoritmo para que, precisamente, conheçamos suas limitações no que diz respeito à susceptibilidade a erros;
- Estudo dos efeitos do ruído do canal sobre o desempenho do algoritmo;
- Desenvolvimento de critérios matemáticos que permitam calcular de maneira concisa a complexidade computacional de implementações como as que exibimos no Capítulo 5;
- Implementação em *hardware* de diagramas semelhantes aos que apresentamos, a fim de avaliar os procedimentos simulados em sistemas reais;
- Uso efetivo da AFT na decodificação dos sinais DTMF a partir de uma pesquisa mais completa das características dos sistemas telefônicos existentes na atualidade;

- Estudo mais amplo das situações em que o uso da AFT torna-se vantajoso frente a outros algoritmos;
- Investigação da possibilidade de aplicarmos a AFT em sistemas com OFDM, que são baseados na DFT;
- Investigação das possibilidades de utilizarmos a AFT em outras aplicações envolvendo análise espectral de sinais, particularmente, Processamento de Voz e de Imagem (incluindo a AFT bidimensional, neste último caso);
- Estudo de outras Transformadas Aritméticas, como a de Hartley [38], a fim de conhecer com mais clareza suas peculiaridades e potencialidades de aplicação.

Apêndice A

Demonstração dos Teoremas 2.6 e 2.7

A.1 Teorema 2.6

Demonstração: Os coeficientes $c_n(\alpha)$ são funções periódicas com período $1/n$, isto é, $c_n(\alpha + 1/n) = c_n(\alpha)$. Se deslocarmos $c_n(\alpha)$ em um semi-período, teremos que:

$$\begin{aligned} c_n\left(\alpha + \frac{1}{2n}\right) &= a_n \cos(2\pi n\alpha + \pi) + b_n \sin(2\pi n\alpha + \pi) \\ &= -a_n \cos(2\pi n\alpha) - b_n \sin(2\pi n\alpha) \\ &= -c_n(\alpha). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Assim, $c_n(\alpha)$ pode ser escrita por

$$c_n(\alpha) = \frac{1}{2} \left(c_n(\alpha) - c_n\left(\alpha + \frac{1}{2n}\right) \right). \tag{A.2}$$

Então, invocando o Teorema 2.4 e a Definição 2.3, vem que

$$\begin{aligned} c_n(\alpha) &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) \left[S_{nl}(\alpha) - S_{nl}\left(\alpha + \frac{1}{2n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) \frac{1}{nl} \left[\sum_{m=0}^{nl-1} \bar{v}\left(\frac{m}{nl}T + \alpha T\right) - \sum_{m=0}^{nl-1} \bar{v}\left(\frac{m}{nl}T + \frac{1}{2n}N + \alpha T\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) \frac{1}{nl} \left[\sum_{m=0}^{nl-1} \bar{v}\left(\frac{2m}{2nl}T + \alpha T\right) - \underbrace{\sum_{m=0}^{nl-1} \bar{v}\left(\frac{2m+l}{2nl}T + \alpha T\right)}_{\sigma} \right]. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Analisemos mais detalhadamente o segundo somatório interno (σ). Fazendo-se $j = 2m + l$ neste somatório (observe que j e l são ambos pares ou ímpares), temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \sigma_{j,l} &\triangleq \sum_{j=1}^{2(nl-1)+l} \bar{v}\left(\frac{j}{2nl}T + \alpha T\right) \\ &= \begin{cases} \sum_{j=l}^{2nl-2} \bar{v}\left(\frac{j}{2nl}T + \alpha T\right) + \sum_{j=2nl}^{2nl+l-2} \bar{v}\left(\frac{j}{2nl}T + \alpha T\right) & \text{se } j \text{ e } l \text{ forem pares,} \\ \sum_{j=l}^{2nl-1} \bar{v}\left(\frac{j}{2nl}T + \alpha T\right) + \sum_{j=2nl+1}^{2nl+l-2} \bar{v}\left(\frac{j}{2nl}T + \alpha T\right) & \text{se } j \text{ e } l \text{ forem ímpares.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Fazendo a substituição $k = j + 2nl$ à segunda parcela de $\sigma_{j,l}$, decorre que

$$j,l = \begin{cases} \sum_{k=l}^{2nl-2} \bar{v}\left(\frac{k}{2nl}T + \alpha T\right) + \sum_{k=0}^{l-2} \bar{v}\left(\frac{k}{2nl}T + \alpha T\right) & \text{se } l \text{ for par;} \\ \sum_{k=l}^{2nl-1} \bar{v}\left(\frac{k}{2nl}T + \alpha T\right) + \sum_{k=1}^{l-2} \bar{v}\left(\frac{k}{2nl}T + \alpha T\right) & \text{se } l \text{ for ímpar.} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Claramente, esta expressão pode ser compactada e escrita por

$$\sigma_{j,l} = \begin{cases} \sum_{k=0,2,\dots}^{2nl-2} \bar{v}\left(\frac{k}{2nl}T + \alpha T\right) & \text{se } l \text{ for par;} \\ \sum_{k=1,3,\dots}^{2nl-1} \bar{v}\left(\frac{k}{2nl}T + \alpha T\right) & \text{se } l \text{ for ímpar.} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo o resultado de $\sigma_{j,l}$ na Equação A.3, temos o seguinte desenvolvimento

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{nl-1} \bar{v}\left(\frac{2m}{2nl}T + \alpha T\right) - \sum_{m=0}^{nl-1} \bar{v}\left(\frac{2m+l}{2nl}T + \alpha T\right) = \\ &= \sum_{k=0,2,\dots}^{2nl-2} \bar{v}\left(\frac{k}{2nl}T + \alpha T\right) - \sum_{m=0}^{nl-1} \bar{v}\left(\frac{2m+l}{2nl}T + \alpha T\right) \quad \text{fazendo } k = 2m, \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } l \text{ for par,} \\ \sum_{k=0,2,\dots}^{2nl-2} \bar{v}\left(\frac{k}{2nl}T + \alpha T\right) - \sum_{k=1,3,\dots}^{2nl-1} \bar{v}\left(\frac{k}{2nl}T + \alpha T\right) & \text{se } l \text{ for ímpar.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Dessa maneira, a Equação A.3 se reduz à seguinte forma

$$\begin{aligned} c_n(\alpha) &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) \frac{1}{2nl} \left[\sum_{k=0}^{2nl-1} (-1)^k \bar{v}\left(\frac{k}{2nl}T + \alpha T\right) \right] \\ &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) \frac{1}{2nl} \left[\sum_{k=0}^{2nl-1} (-1)^k \bar{v}\left(\frac{k}{2nl}T + \alpha T\right) - (-1)^n a_0 \right] \\ &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) \frac{1}{2nl} \left[\sum_{k=0}^{2nl-1} (-1)^k \bar{v}\left(\frac{k}{2nl}T + \alpha T\right) \right] \\ &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) B_{2nl}(\alpha). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

■

A.2 Teorema 2.7

Demonstração: O cálculo de a_0 é trivial, pois o mesmo representa o valor médio do sinal.

Os harmônicos pares a_n são obtidos da Equação 2.24, assim:

$$a_n = c_n(0) = \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) B_{2nl}(0). \quad (\text{A.9})$$

O cálculo dos coeficientes b_n exige um desenvolvimento mais laborioso. Partindo de que $b_n = c_n\left(\frac{1}{4n}\right)$, temos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} b_n &= c_n\left(\frac{1}{4n}\right) = \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) \frac{1}{2nl} \sum_{k=0}^{2nl-1} (-1)^k v\left(\frac{k}{2nl}T + \frac{1}{4n}T\right) \\ &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) \frac{1}{2nl} \sum_{k=0}^{2nl-1} (-1)^k v\left(\frac{k + (l-1)/2}{2nl}T + \frac{1}{4nl}T\right) \\ &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{1}{2nl} \sum_{k=0}^{2nl-1} (-1)^{k+\frac{l-1}{2}} v\left(\frac{k + (l-1)/2}{2nl}T + \frac{1}{4nl}T\right) \\ &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{1}{2nl} \sum_{j=\frac{l-1}{2}}^{2nl-1+\frac{l-1}{2}} (-1)^j v\left(\frac{j}{2nl}T + \frac{1}{4nl}T\right), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

em que na última passagem foi feita a substituição $j = k + \frac{l-1}{2}$ nos índices do somatório interno. Fazendo uma análise mais detalhada no somatório interno, temos que

$$\begin{aligned} &\sum_{j=\frac{l-1}{2}}^{2nl-1+\frac{l-1}{2}} (-1)^j v\left(\frac{j}{2nl}T + \frac{1}{4nl}T\right) = \\ &= \sum_{j=\frac{l-1}{2}}^{2nl-1} (-1)^j v\left(\frac{j}{2nl}T + \frac{1}{4nl}T\right) + \sum_{j=2nl}^{2nl-1+\frac{l-1}{2}} (-1)^j v\left(\frac{j}{2nl}T + \frac{1}{4nl}T\right) \\ &= \sum_{j=\frac{l-1}{2}}^{2nl-1} (-1)^j v\left(\frac{j}{2nl}T + \frac{1}{4nl}T\right) + \sum_{k=0}^{\frac{l-1}{2}-1} (-1)^k v\left(\frac{k}{2nl}T + \frac{1}{4nl}T + T\right), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

em que foi feita a substituição $k = j - 2nl$ no segundo somatório. Notando que $v(t) = v(t+T)$ (periodicidade), a expressão se reduz a

$$\sum_{k=0}^{2nl-1} (-1)^k v\left(\frac{k}{2nl}T + \frac{1}{4nl}T\right). \quad (\text{A.12})$$

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned}
 b_n &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{1}{2nl} \sum_{k=0}^{2nl-1} (-1)^k v\left(\frac{k}{2nl}T + \frac{1}{4nl}T\right) \\
 &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) (-1)^{\frac{l-1}{2}} B_{2nl}\left(\frac{1}{4nl}\right).
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

■

Apêndice B

Listagem de Programas

Este apêndice contém as principais rotinas computacionais que nos auxiliaram nas simulações descritas nessa dissertação. O *software* utilizado¹ foi o MATLAB[®], versão 6.0.0.88, *release* 12.

Desenvolvemos programas cujas bases são, praticamente, iguais. Inicialmente, definimos uma faixa de comprimentos a serem empregados no cálculo da Transformada Aritmética de Fourier e escolhemos, através de uma expressão analítica, o sinal DTMF a ser processado. Obtém-se, para cada comprimento, os índices dos coeficientes da série de Fourier que estão associados às frequências DTMF. O programa implementa o algoritmo da *AFT Simplificada* e calcula o módulo apenas desses oito coeficientes. Em paralelo a isto, obtemos a DFT (de mesmo comprimento) do sinal e encontramos os erros percentuais de estimativa. As diferenças entre os programas estão relacionadas, fundamentalmente, a três aspectos:

- O modo como se “encontra” as amostras em instantes de tempo fracionários necessárias ao algoritmo de Reed-Shih (tipo de interpolação);
- O uso da AFT completa ou de sua versão arredondada (Seção 4.2);
- A presença ou não do erro proveniente da quantização dos sinais DTMF.

Diante disso, para que não exibamos desnecessariamente as inúmeras linhas que são comuns a todos os programas, apresentaremos uma única estrutura básica e, ao longo da mesma, apontaremos as modificações que selecionam cada uma das alternativas mencionadas acima.

¹MATLAB é uma marca registrada da MathWorks, Inc. (<http://www.mathworks.com>).

DTMF.m : Cálculo da *AFT Simplificada* e dos Erros Percentuais de Estimativa de Sinais DTMF

```
-----
clear variables;
```

```
f=[697 770 852 941 1209 1336 1477 1633];    % Vetor contendo as oito frequencias
                                           % DTMF.
```

```
Fs=8000;                                     % Frequencia de amostragem utilizada.
```

```
N1=114;                                       % Faixa de comprimentos das Transformadas que serao
N2=114;                                       % calculadas (de N1 a N2)
```

```
-----
% Esta rotina computa, para cada comprimento, os indices (do vetor Transformada
% de Fourier) que correspondem a cada uma das frequencias DTMF. Esses indices sao
% armazenados na matriz ind.
```

```
for i=1:(N2-N1+1)
    for j=1:8
        ind(j,i)=round(((N1-1+i)*f(j))/Fs);
    end
end
```

```
% Esta rotina elimina da matriz ind as colunas que possuem elementos repetidos,
% ou seja, os comprimentos para os quais nao se permite distinguir duas
% frequencias DTMF. Esse procedimento origina as matrizes (associadas) indd e N.
% Esta ultima contem os comprimentos para os quais se pode realizar a detecção
% DTMF via Transformada de Fourier.
```

```
j=1;
for i=1:(N2-N1+1)
    u=ind(:,i);
    uu=union(u,u);
    l=size(u,1);
    ll=size(uu,1);
    if l==ll
        indd(:,j)=u;
        N(j)=(N1+i-1);
        j=j+1;
    end
end
end
```

```

-----
% Inicio da rotina principal (calculo da Transformada Aritmetica de Fourier para
% cada um dos comprimentos armazenados em N.

c=size(N,2);

clear a b bba ba bbb bb sl nf nnn nnnn t dt;           % "Limpeza" de variaveis.

for j=1:c

    t=0:N(j);

% Selecao do sinal a ser processado (neste caso, esta' selecionado o digito "1").

    dt=sin(2*pi*697*t/Fs)+sin(2*pi*1209*t/Fs);

-----

% Caso se deseje processar o sinal DTMF quantizado, insere-se a rotina a seguir.
% Nesse caso, dtq representa o sinal original e dt passa a representar o sinal
% quantizado. snr e' a relacao sinal-ruído.

niv=(2/(1-(1/256)))/128;

for i=1:(N(j)+1)
    if dtq(i)>0
        if ((dtq(i))/niv-floor((dtq(i))/niv))==
(- (dtq(i))/niv+ceil((dtq(i))/niv))
            dt(i)=niv*floor((dtq(i))/niv);
        else
            dt(i)=niv*round((dtq(i))/niv);
        end
    else
        dt(i)=niv*round((dtq(i))/niv);
    end
end

e=abs(dt-dtq);

for i=1:(N(j)+1)
    dtqq(i)=dtq(i)*dtq(i);
    ee(i)=e(i)*e(i);
end

raz=(sum(dtqq))/(sum(ee));
snr=10*((log(raz))/(log(10)));

```



```

-----
% Obtencao da matriz s1. Cada linha desta matriz contem os limites superiores
% dos indices das somas parciais que precisarao ser calculadas.

    for i=1:8
        s1(i)=floor(N(j)/indd(i,j));
        if mod(s1(i),2)==0
            s1(i)=s1(i)-1;
        end
    end

% Obtencao da matriz nnn que contem os indices (n, e nao 2n! - ver teoria) das
% somas parciais que precisarao ser calculadas a fim de obter os coeficientes que
% se deseja.

    for i=1:8
        for k=1:2:s1(i)
            nnn(i,(k+1)/2)=(indd(i,j))*k;
            if k==9
                nnn(i,(k+1)/2)=0;
            end
        end
    end

% Obtencao do vetor nnnn a partir da organizacao de nnn (eliminacao dos
% elementos iguais a zero, juncao dos mesmos num so' vetor linha e ordenacao
% crescente dos mesmos).

    [l11,ccc]=size(nnn);
    k=1;
    for i=1:l11
        for jj=1:ccc
            if nnn(i,jj)~=0
                nn(k)=nnn(i,jj);
                k=k+1;
            end
        end
    end

    nf=sort(nn);
    nnnn=union(nf,nf);

```



```

-----
% Para interpolacao de ordem zero.

        bbb(i)=bbb(i)+((-1)^ii)*
*(((dt(round((ii*(N(j)))/(2*(nnnn(i)))))+1+(N(j))/(4*(nnnn(i)))))))));

-----

        end
        bb(i)=(1/(2*(nnnn(i))))*(bbb(i));
        end

-----

% Rotinas que, usando as somas parciais, calculam os coeficientes an e bn
% previamente estabelecidos pelo programa. E' interessante observarmos que, neste
% ponto, recorre-se a um programa externo que calcula a funcao de Mobius de um
% determinado numero. Os coeficientes sao armazenados nos vetores a e b.

        for i=1:8
            a(i)=0;
            for ii=1:2:(floor((N(j))/(nnnn(i))))
                if ii~=9
                    iii=find(nnnn==(nnnn(i))*ii);
                    a(i)=a(i)+(mobius(ii))*(ba(iii));
                end
            end
        end

        for i=1:8
            b(i)=0;
            for ii=1:2:(floor((N(j))/(nnnn(i))))
                if ii~=9
                    iii=find(nnnn==(nnnn(i))*ii);
                    b(i)=b(i)+(mobius(ii))*((-1)^((ii-1)/2))*(bb(iii));
                end
            end
        end

-----

% Calculo do modulo de cada um dos 8 coeficientes associados 'as frequencias DTMF
% (essa e' a informacao realmente importante para a decodificacao do digito).

```

```

-----
% Para a AFT completa.

    for i=1:8
        amp(i)=sqrt(((a(i))^2)+((b(i))^2));
    end

-----

% Para a AFT arredondada.

    for i=1:8
        amp(i)=sqrt(((ba(i))^2)+((bb(i))^2));
    end

-----

% Exposicao dos resultados. Os modulos dos coeficientes estao armazenados no
% vetor amp.

    disp('Comprimento da Transformada:');
    disp(N(j));
    disp(amp);

-----

% Estimativa das componentes da DFT associadas aos coeficientes calculados via
% AFT. Calculo exato da DFT do sinal DTMF em questao.

    ampp=((N(j))/2)*amp;

    dft=fft(dt,(N(j)));
    for i=1:8
        y(i)=(abs(dft(indd(i,j)+1)));
    end

% Calculo e exposicao do erro percentual de estimativa (err).

    for i=1:8
        err(i)=100*abs((ampp(i)-y(i))/(y(i)));
    end
    err
end

```

Apêndice C

Jean Baptiste Joseph Fourier

O matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em 21 de Março de 1768 em Auxerre, uma pequena cidade localizada às margens do rio Yonne. Joseph foi o nono filho do segundo casamento de um alfaiate e, aos oito anos, tornou-se órfão. Seus bons modos e suas habilidades precoces despertaram a atenção de uma dama da cidade, que o recomendou ao bispo. Na época, Auxerre era um importante centro religioso da França e, através da influência que o prelado possuía, Fourier foi admitido na *École Royale Militaire*, uma escola militar dirigida pelos Beneditinos do Convento de São Marcos. Aos doze anos, o menino redigia sermões para sacerdotes de outras localidades e muitos dos seus textos foram aplaudidos até mesmo em Paris.



Figura C.1: Jean Baptiste Joseph Fourier.

Um ano mais tarde, Joseph Fourier iniciou-se nos princípios da matemática. Diante de sua curiosidade e vontade de aprender, as horas de estudo prescritas pela escola eram insuficientes, sendo necessário que ele coletasse restos de velas nos ambientes do colégio para que pudesse passar noites debruçado sobre os livros. Era esta sua verdadeira vocação... Contudo, numa escola militar conduzida por monges, naturalmente, valorizava-

se com mais afinco duas carreiras: a igreja e a espada. Fourier tinha o desejo de ser soldado, o que não lhe foi permitido devido à sua origem humilde. Em 1787, então, ele encaminhou-se ao mosteiro de *St. Benoit-sur-Loire*, onde pretendia passar o período do noviciado e tornar-se um Beneditino.

Em 1789, antes de fazer seus votos, Fourier aderiu com entusiasmo aos ideais da Revolução Francesa e decidiu abandonar a carreira que havia iniciado. No final do mesmo ano, ele visitou Paris e, na *Académie Royale des Sciences*, apresentou um trabalho sobre resolução de equações algébricas. De volta a Auxerre, Fourier tornou-se professor da escola militar onde havia estudado. Neste período, ele se “dividia” entre as pesquisas matemáticas e a vida política da qual, posteriormente, afastou-se por estar insatisfeito e amedrontado com o caráter violento que a Revolução assumira.

No ano de 1794, Fourier foi nomeado para estudar em Paris, na *École Normale*. Essa instituição tinha o objetivo de treinar professores que servissem de modelo para outras escolas de treinamento. Na *École Normale*, que abriu em 1795, Fourier foi, certamente, um dos mais notáveis pupilos de mestres como Lagrange, Laplace e Monge. Após isto, ele começou a ensinar no *Collège de France* e, em seguida, assumiu um cargo na *École Centrale des Travaux Publics*, futura *École Polytechnique*. Em 1797, Fourier foi apontado para a cadeira de Análise e Mecânica, onde sucedeu Lagrange. Este cargo proporcionou-lhe renome como conferencista, no entanto, durante este período, ele não realizou pesquisas cuja originalidade se possa destacar.

Em 1798, Fourier acompanhou Napoleão Bonaparte na invasão ao Egito como cientista conselheiro. Inicialmente, a expedição obteve sucesso, conquistando vitórias em Malta, Alexandria e no delta do Nilo. No entanto, o exército de Napoleão terminou sendo derrotado, o que forçou a permanência de Fourier naquela região. Enquanto esteve no Egito, ele atuou como um administrador que ajudou a incrementar a estrutura educacional e as explorações arqueológicas locais. Fourier foi, ainda, um dos fundadores do Instituto do Cairo e, até voltar à França, em 1801, realizou trabalhos em Ciências e na Literatura.

Fourier havia retomado suas atividades como Professor de Análise na *École Polytechnique*, quando foi requisitado por Napoleão para assumir o cargo de Prefeito em Grenoble. Enquanto ocupava esta função, Fourier iniciou a *Descrição do Egito* e realizou seu mais importante trabalho matemático na teoria do calor. Este último, cuja concepção durou de 1804 a 1807, tratava da propagação do calor em corpos sólidos e foi apresentado

ao Instituto de Paris em 21 de Dezembro de 1807, ficando encarregada de sua avaliação uma comissão formada por Lagrange, Laplace, Monge e Lacroix.

Os acadêmicos não demonstraram satisfação com o trabalho de Fourier. Segundo Lagrange e Laplace, a expansão de uma função numa série trigonométrica não era justificada com clareza. A outra objeção, que partiu de Biot, dizia respeito à forma como Fourier derivou as fórmulas de transferência do calor. Ele não fazia referência a um artigo que tratava deste tema, apresentado por Biot em 1804. Laplace e Poisson fizeram críticas similares.

O Instituto, então, resolveu promover uma espécie de competição cujo tema restringia-se à propagação do calor em corpos sólidos. Além de Fourier, que submeteu o memorando que havia concluído em 1807, poucos outros se inscreveram. A comissão formada por Lagrange, Laplace, Malus, Haüy e Legendre decidiu premiá-lo, todavia, não foram poupadas críticas que julgavam pouco rigoroso o modo através do qual Fourier obtinha seus resultados. Isso foi suficiente para que o trabalho não fosse publicado. Em paralelo a isto, Fourier continuava exercendo sua função de Prefeito e, só após a queda de Napoleão, em 1815, ele retornou a Paris.

Em 1817, Fourier foi eleito para a *Académie des Sciences* e, em 1822, tornou-se Secretário da seção de Matemática da mesma vencendo Biot e Arago, que também haviam sido indicados para o cargo. No mesmo ano, a Academia publicou o trabalho com o qual Fourier fora premiado, o título era *Théorie Analytique de la Chaleur*. Ainda assim, diversos “ataques” à sua teoria continuaram sendo feitos e muitas de suas “defesas” jamais foram publicadas.

Fourier faleceu em 16 de Maio de 1830, vítima de um aneurisma cerebral. Durante os seus últimos oito anos passados em Paris, ele dedicou-se às pesquisas, tendo publicado inúmeros artigos que tratavam da Matemática pura e aplicada. Fourier, que considerava a Matemática um “meio” e não um “fim” foi, sem dúvida, uma das mais geniais personalidades do seu meio no século XIX. Posteriormente, seus trabalhos pioneiros foram refinados por Dirichlet, o que proporcionou a abertura de um vasto campo de estudos para a Engenharia.

Todo o conteúdo deste apêndice baseou-se em [39, 40].

Apêndice D

Notação

Ao longo dessa dissertação, procuramos utilizar as notações mais consagradas possíveis. Para eventuais consultas e com o intuito de evitar erros de interpretação, relacionamos, a seguir, uma lista com definições de termos.

$\lfloor x \rfloor$	Maior inteiro menor que x
$\underline{\underline{\Delta}}$	Igual por definição a
$a b$	a divide b , onde $a, b \in \mathbb{N}$
$A_C(\cdot)$	Complexidade aditiva complexa do algoritmo em questão
AFT	Transformada Aritmética de Fourier (<i>Arithmetic Fourier Transform</i>)
$A_R(\cdot)$	Complexidade aditiva real do algoritmo em questão
DFT	Transformada Discreta de Fourier (<i>Discrete Fourier Transform</i>)
DTMF	<i>Dual-tone Multifrequency</i> (Multifrequência em tons duais)
$\phi(\cdot)$	Função de Euler
F_s	Frequência de amostragem empregada na discretização de um sinal contínuo no tempo
FSK	<i>Frequency Shift Keying</i> (Chaveamento de mudança de frequência)

$\Im \{ . \}$	Parte imaginária de um complexo
$\mu (.)$	Função de Möbius
$M_C (.)$	Complexidade multiplicativa complexa do algoritmo em questão
$M_R (.)$	Complexidade multiplicativa real do algoritmo em questão
N	Comprimento de uma transformada discreta
PCM	<i>Pulse Code Modulation</i> (Modulação por Codificação de Pulsos)
$\Re \{ . \}$	Parte real de um complexo
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i> (Raiz do erro médio quadrático)
SNR	<i>Signal-to-noise Ratio</i> (Relação Sinal-ruído)
\hat{x}	Versão quantizada de x

Apêndice E

Artigos

Desta dissertação, foram escritos os seguintes artigos:

1. J. B. LIMA, R. M. CAMPELLO DE SOUZA, H. M. DE OLIVEIRA E M. M. CAMPELLO DE SOUZA, *Faster DTMF Decoding*. In: XI International Conference on Telecommunications. CD-ROM, Fortaleza, CE, Agosto 2004, aceito.
2. J. B. LIMA, R. M. CAMPELLO DE SOUZA, H. M. DE OLIVEIRA E M. M. CAMPELLO DE SOUZA, *Decodificação de Sinais DTMF Via Transformada Aritmética de Fourier*. In: XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações. Belém, PA, Setembro 2004, aceito.

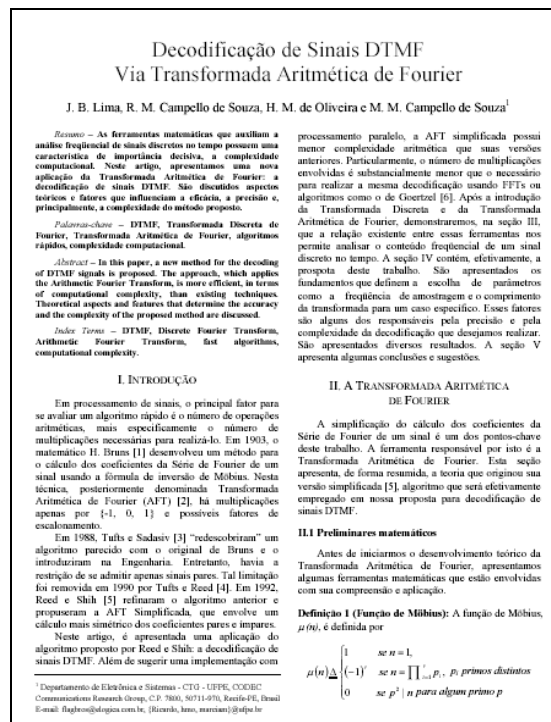
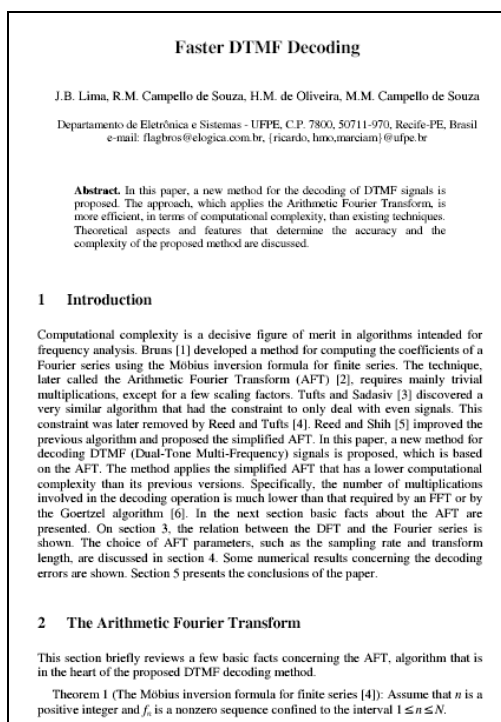


Figura E.1: Frontispício dos artigos redigidos aceitos.

Bibliografia

- [1] GOSH, A; ALLEN, S. D.; PAPARAO, P. Arithmetic Fourier Transform Calculation Using Fiber-Optical Parallel Processors. **Journal of the Optical Society of America A**, v. 7, n. 4, p. 701-707, Apr. 1990.
- [2] IGNJATOVIC, Z; BOCKO, M. F. **Development of CMOS Image Sensors with Built-in Compression**. ECE Department, University of Rochester, 2003. Disponível em: http://www.ceis.rochester.edu/ceis/newsevents/01-14-04-presentations/Ignjatovic_Zeljko.ppt. Acesso em: 14 jun. 2004.
- [3] ARSLAN, G.; EVANS, B. L.; SAKARYA, F. A. et al. Performance Evaluation and Real-Time Implementation of Subspace, Adaptive, and DFT Algorithms for Multi-Tone Detection. In: International Conference on Telecommunications / IEEE (3. : Apr. 1996 : Istanbul, Turkey). **Proceedings**. Istanbul, Turkey, 1996. p. 884-887.
- [4] FELDER, M. D.; MASON, J. C.; EVANS, B. L. Efficient Dual-Tone Multifrequency Detection Using the Nonuniform Discrete Fourier Transform. **IEEE Signal Processing Letters**, v. 5, n. 7, p. 160-164, Jul 1998.
- [5] BAGCHI, S.; MITRA, S. K. An Efficient Algorithm for DTMF Decoding Using the Subband NDFT. In: International Symposium on Circuits and Systems / IEEE (May 1995 : Seattle, USA). **Proceedings**. Seattle, USA, 1995. p. 1936-1939.
- [6] DYM, H.; MCKEAN, H. P. **Fourier Series and Integrals**. Academic Press, 1972.
- [7] SIMMONS, G. F. **Differential Equations: With Applications and Historical Notes**. McGraw-Hill, 1972.
- [8] FOURIER, J. B. J. The Analytical Theory of Heat. In: **The Great Books of Western World**. v.45, Encyclopaedia Britannica, Inc., 1980.
- [9] BRACEWELL, R. N., **The Fourier Transform and Its Application**, McGraw-Hill, 1986.

- [10] OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; NAWAB, S. H. **Signal & Systems**. 2nd ed. Prentice-Hall, 1997.
- [11] DE FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. IMPA, 1977.
- [12] OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W.; BUCK, J. R. **Discrete-Time Signal Processing**. 2nd ed. Prentice-Hall, 1999.
- [13] COOLEY, J. W.; TUKEY, J. W. An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series. **Mathematics of Computation**, v. 19, p. 297-301, 1965.
- [14] CIPRA, B. A. The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms. **SIAM News**, v. 33, n. 4., May 2000.
- [15] BLAHUT, R. E. **Fast Algorithms for Digital Signal Processing**. Addison-Wesley, 1985.
- [16] BRUNS, H. **Grundlinien des Wissenschaftlichen Rechnens**. Leipzig, 1903 (não disponível).
- [17] WINTNER, A. **An Arithmetical Approach to Ordinary Fourier Series**. Baltimore, 1947. Monografia (não disponível).
- [18] TUFTS, D. W.; SADASIV, G. The Arithmetic Fourier Transform. **IEEE ASSP Magazine**, p. 13-17, Jan. 1988.
- [19] REED, I. S.; TUFTS, D. W.; YU, X. et al. Fourier Analysis and Signal Processing by Use of the Möbius Inversion Formula. **IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing**, v. 38, n. 3, p. 459-470, Mar. 1990.
- [20] REED, I. S.; SHIH, M.-T.; TRUONG, T. K. et al. A VLSI Architecture for Simplified Arithmetic Fourier Transform Algorithm. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 40, n. 5, p. 1122-1133, May 1992.
- [21] KNOCKAERT, L. A Generalized Möbius Transform, Arithmetic Fourier Transforms and Primitive Roots. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 44, n. 5, p. 1307-1310, May 1996.

- [22] NAN-XIAN, C.; ZHAO-DOU, C.; YU-CHUAN, W. Multidimensional Inverse Lattice Problem and a Uniformly Sampled Arithmetic Fourier Transform. **Journal of the American Physical Society (Physical Review E)**, v. 55, n. 1, p. R5-R8, Jan. 1997.
- [23] BURTON, D. M. **Elementary Number Theory**. Allyn and Bacon, Inc., 1979.
- [24] PASCHOAL, A. J. D. A. **A Transformada Aritmética de Fourier**. Recife, 1993. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Pernambuco.
- [25] REED, I. S.; SOLOMON, G. Reed-Solomon Codes: A Historical Overview. In: Wicker, S. B.; Bhargava, V. K. **Reed-Solomon Codes and Their Applications**. IEEE Press, 1994. p. 17-24.
- [26] CINTRA, R. J. D. S. **Transformada Rápida de Hartley: Novas Fatorações e um Algoritmo Aritmético**. Recife, 2001. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Pernambuco.
- [27] TEPEDELENLIGLU, N. A Note on the Computational Complexity of the Arithmetic Fourier Transform. **IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing**, v. 37, n. 7, p. 1146-1147, Jul. 1989.
- [28] TUFTS, D. W. Comments on “A Note on the Computational Complexity of the Arithmetic Fourier Transform”. **IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing**, v. 37, n. 7, p. 1147-1148, Jul. 1989.
- [29] CCITT Blue Book, **Recommendations Q.23, Q.24: Technical Features of Push-Button Telephone Sets**. Geneva, 1989.
- [30] ORFANIDIS, S. J. **Introduction to Signal Processing**. Prentice-Hall, 1996.
- [31] WIKIPEDIA, The Free Encyclopedia, **Crossbar**, 2003. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Crossbar>. Acesso em: 14 jun. 2004.
- [32] WIKIPEDIA, The Free Encyclopedia, **Dual-Tone Multi-Frequency**, 2003. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Dual-tone_multi-frequency. Acesso em: 14 jun. 2004.

- [33] DE OLIVEIRA, H. M. **Fundamentos de Engenharia de Telecomunicações**. 1ª ed. Recife : Publicação interna do Departamento de Eletrônica e Sistemas, UFPE, 1996.
- [34] SHANNON, C. E. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, v. 27, p. 379-423, p. 623-656, Jul., Oct. 1948.
- [35] KELLEY, B. T.; MADISSETTI, V. K. Efficient VLSI Architectures for the Arithmetic Fourier Transform (AFT). *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 41, n.1, p. 365-384, Jan. 1993.
- [36] WIGLEY, N. M.; JULLIEN, G. A. On Implementing the Arithmetic Fourier Transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 40, n. 9, p. 2233-2242, Sep. 1992.
- [37] CINTRA, R. J. D. S.; DE OLIVEIRA, H. M. Interpolating in Arithmetic Transform Algorithms. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SIGNAL PROCESSING / IEE / IEEE (6. : Aug. 2002 : Beijing, China). **Proceedings**. Beijing, China, 2002. v.1.
- [38] DE OLIVEIRA, H. M.; CAMPELLO DE SOUZA, R. M.; DE SOBRAL CINTRA, R. J. et al. A Transformada Aritmética de Hartley. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE TELECOMUNICAÇÕES (18. : Set. 2000 : Gramado, RS). **Anais**. Gramado, RS, 2002.
- [39] ARAGO, M. **Joseph Fourier**. Biography Read Before The French Academy of Sciences, 1871. Disponível em: <http://home.att.net/~a.caimi/FOURIER.doc>. Acesso em: 14 jun. 2004.
- [40] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Jean Baptiste Joseph Fourier**. School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland, 1997. Disponível em: <http://www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Fourier.html>. Acesso em: 14 jun. 2004.

O autor nasceu na cidade do Recife em 11 de maio de 1980. É bacharel em Engenharia Elétrica, modalidade Eletrônica, graduado pela Universidade Federal de Pernambuco, e membro da Sociedade Brasileira de Telecomunicações (SBrT). Suas áreas de interesse são: algoritmos rápidos e Processamento Digital de Sinais.

É profundo admirador da música, particularmente, a nordestina (Luiz Gonzaga) e apreciador da poesia (Vinícius de Moraes) e das artes plásticas, desenvolvendo, também, modestas atividades em cada um destes campos.

Endereço: Rua das Moças, 790 / 102 - A
Arruda, Recife, Pernambuco
C.E.P.: 52120-320