

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA



ERIC ALBERT BOUTON

MULTIPLICAÇÃO POR DIVISÃO EM
MULTIRRESOLUÇÃO: UM NOVO SISTEMA
BASEADO EM WAVELETS

VIRTUS IMPAVIDA

RECIFE, AGOSTO DE 2006.

ERIC ALBERT BOUTON

MULTIPLEXAÇÃO POR DIVISÃO EM
MULTIRRESOLUÇÃO: UM NOVO SISTEMA
BASEADO EM WAVELETS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Mestre em Engenharia Elétrica**

ORIENTADOR: PROF. HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA, DOCTEUR

Recife, Agosto de 2006.

©Eric Albert Bouton, 2006

B781m Bouton, Eric Albert

Multiplexação por divisão em multirresolução: um novo sistema baseado em wavelets / Eric Albert Bouton. – Recife: O Autor, 2006.

104 folhas., il., figs., tabs.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Engenharia Elétrica, 2006.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Elétrica – processamento de sinais. 2. Sistemas *Wavelet* - multirresolução. 3. Sistema de multiplexação. 4. Multiplexação por Divisão em Multirresolução – MRDM. I. Título.

UFPE

624 CDD (22.ed.)

BCTG/2006-64



Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO DE

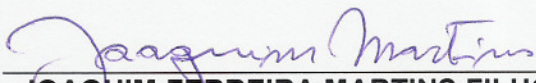
ERIC ALBERT BOUTON

TÍTULO

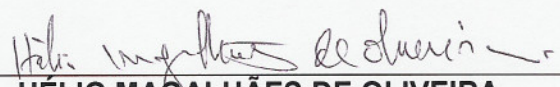
**“MULTIPLEXAÇÃO POR DIVISÃO EM MULTIRRESOLUÇÃO:
UM NOVO SISTEMA BASEADO EM WAVELETS”**

A comissão examinadora composta pelos professores:
HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA, DES/UFPE, MARCIA MAHON
CAMPELLO DE SOUZA, DES/UFPE e RENATO JOSÉ DE SOBRAL
CINTRA, DE/UFPE, sob a presidência do primeiro, consideram o candidato
ERIC ALBERT BOUTON APROVADO.

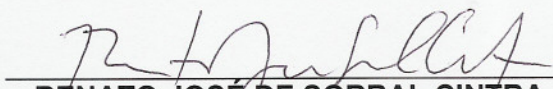
Recife, 04 de agosto de 2006.



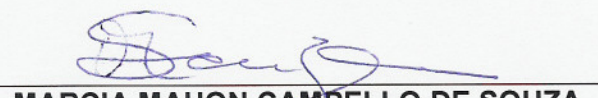
JOAQUIM FERREIRA MARTINS FILHO
Coordenador do PPGEE



HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA
Orientador e Membro Titular Interno



RENATO JOSÉ DE SOBRAL CINTRA
Membro Titular Externo



MARCIA MAHON CAMPELLO DE SOUZA
Membro Titular Interno

À minha família

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas me ajudaram na elaboração desta dissertação e durante todo o tempo que permaneci no mestrado. Deste modo, gostaria de expressar o meu sincero agradecimento:

À minha família, em especial aos meus pais, à minha irmã e à minha esposa, pelo apoio e incentivo constantes.

Ao meu orientador, prof. Hélio Magalhães de Oliveira, por sua dedicação, incentivo e amizade. Seu entusiasmo, criatividade e amor à Ciência e à Engenharia serão sempre uma fonte de inspiração.

Aos professores do DES, em especial aos professores Ricardo Campello e Márcia Mahon que, através de várias disciplinas e longas conversas sobre os mais diversos assuntos, tiveram uma grande influência sobre a minha forma de pensar. Aos professores Valdemar Cardoso e Cecílio Pimentel, exemplos de competência e organização.

Aos colegas do grupo de Engenharia de Sistemas do professor Fernando Campello, pelas discussões e conversas sempre bem humoradas e que tornaram a convivência no mestrado tão agradável. Aos bons amigos do laboratório de telecomunicações e do programa de Pós-graduação.

Aos meus dois grandes amigos Marcos Müller e André Leite, cuja convivência e amizade me deixam sem palavras. Ao meu amigo Danilo Silva, pelo apoio psicológico que tão freqüentemente precisei.

Por fim, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica pelo apoio financeiro e a estrutura.

ERIC ALBERT BOUTON

Universidade Federal de Pernambuco

04 de Agosto de 2006

Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue.

— Jules Henri Poincaré

Resumo da Dissertação apresentada à UFPE como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

**MULTIPLEXAÇÃO POR DIVISÃO EM
MULTIRRESOLUÇÃO: UM NOVO SISTEMA BASEADO
EM WAVELETS**

Eric Albert Bouton

Agosto/2006

Orientador: Prof. Hélio Magalhães de Oliveira, Docteur

Área de Concentração: Comunicações

Palavras-chaves: sistema de multiplexação, análise multirresolução, sistemas *wavelet*.

Número de páginas: 104

Um novo esquema de multiplexação é proposto, baseado na abordagem de Mallat de sistemas *wavelet* por multirresolução. Após um estudo sobre as ferramentas necessárias para o desenvolvimento do trabalho, o sistema é apresentado e alguns esquemas são mostrados, em diferentes configurações, de forma a ilustrar o potencial e a versatilidade desta nova abordagem para multiplexação. Este sistema é adaptável e a sua implementação é adequada para processadores de sinais e computadores digitais. A técnica, chamada de **multiplexação por divisão em multirresolução** (MRDM), faz um uso intensivo de ferramentas de processamento de sinais, é extremamente flexível e pode combinar uma variedade de sinais com características espectrais diferentes. Uma ampla variedade de sistemas *wavelet* $\{\varphi_k(t), \psi_{j,k}(t)\}$ é compatível com a MRDM. As formas de onda resultantes no canal e, conseqüentemente, a estrutura espectral e o desempenho do sistema dependem das *wavelets* escolhidas. A demultiplexação pode ser efetuada de forma eficiente, graças a algoritmos de cálculo que possuem uma complexidade computacional que aumenta apenas de forma linear com o comprimento dos sinais de entrada.

Abstract of Dissertation presented to UFPE as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering

**MULTIRESOLUTION DIVISION MULTIPLEX: A NEW
WAVELET-BASED SYSTEM**

Eric Albert Bouton

August/2006

Supervisor: Prof. Hélio Magalhães de Oliveira, Docteur

Area of Concentration: Communications

Keywords: multiplex systems, multiresolution analysis, *wavelet* systems.

Number of pages: 104

A new multiplex scheme is introduced, which is based on Mallat's multiresolution formulation of *wavelet* systems. After the presentation of the basic tools for the development of this work, the system is introduced and a number of schemes is shown, with different configurations, so as to illustrate the potential and versatility of this new multiplex approach. This system is adaptable and its implementation is well matched to digital signal processors and digital computers. The approach, termed **multiresolution division multiplex** (MRDM), is intensive in signal processing tools, is extremely flexible and can combine a variety of tributaries of different spectral characteristics. A broad variety of *wavelet* systems $\{\varphi_k(t), \psi_{j,k}(t)\}$ can endow with MRDM. The resulting channel waveforms and, consequently the spectral shape and system performance depend upon the selected *wavelets*. Demultiplexing can be done efficiently, thanks to calculation algorithms that possess a computational complexity that increases only linearly with the length of the input signals.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Subdivisão da banda passante de um canal de comunicação por um sistema FDM, em sub-canais de banda estreita, não superpostos em frequência.	23
2.2	Utilização da banda total disponível de um canal de comunicação por um sistema de multiplexação por divisão temporal. Note que os sinais são transmitidos de forma simultânea.	24
2.3	Utilização da banda total disponível de um canal de comunicação por um sistema de multiplexação por divisão temporal. Note que os sinais são transmitidos com uma mesma frequência de portadora, mas não simultaneamente. Cada sub-canal ocupa um <i>slot</i> de tempo, que se repete cíclicamente, a cada quadro.	25
2.4	Utilização da banda total disponível de um canal de comunicação por um sistema de multiplexação por divisão em códigos. Note que a configuração dos sub-canais permite o envio simultâneo dos sinais de informação, com a mesma frequência da portadora.	26
2.5	Transmissor multi-portadoras básico. Note-se que a seqüência de entrada possui uma taxa de Mf_s bits/s; o agrupamento dos dados em seqüências de $M = \sum_1^{N_{sp}} m_n$ bits, no bloco de conversão serial-paralelo, resulta em uma taxa de transmissão de f_s bits/s. O número de portadoras moduladas é N_{sp}	29
2.6	Comparação entre um sistema de portadora única (banda total B_{sc}) e um sistema multi-portadoras (banda total B_{mp}). Em (a), note a necessidade de equalização na recepção. Em (b), cada sinal de banda estreita sofre desvanecimento aproximadamente plano e a equalização é desnecessária.	29
2.7	Comparação da utilização de banda dos sistemas FDM e OFDM.	30
2.8	Esquema de (a) modulação e (b) demodulação OFDM utilizando a IDFT.	31
2.9	Comparação entre um sinal em banda básica (a) e um sinal OFDM (b). O tempo de símbolo em banda básica é tomado como sendo igual a um e o número de sub-portadoras $N_{sp} = 6$, a título ilustrativo. Note como o tempo de símbolo T_s no sinal OFDM é seis vezes maior que o tempo de símbolo do sinal em banda básica. Por outro lado, os sinais em (b) são somados, para gerar o sinal multiplexado.	32
2.10	Sinal transmitido (a) e sinal recebido (b). Note como a interferência intersimbólica do $(i - 1)$ -ésimo símbolo produz uma distorção no i -ésimo símbolo, ilustrada pela linha mais grossa, em (b).	34

2.11	Sinal transmitido com intervalo de guarda Δ_G (a) e sinal recebido (b). Note que a utilização de um intervalo de guarda (nenhum sinal transmitido) maior que o atraso por espalhamento elimina a interferência inter-simbólica. O tempo de observação de símbolo t_s pelo receptor é menor que o tempo de símbolo T_s ; isto resulta em uma separação maior entre as portadoras e assim em uma perda na eficiência espectral.	35
2.12	Sinal transmitido com inserção de prefixo cíclico (a) e sinal recebido (b). A utilização de uma extensão cíclica do símbolo enviado ajuda a diminuir a transição abrupta na forma de onda recebida, o que reduz a interferência entre sinais adjacentes, reduzindo a banda utilizada. Novamente, o tempo de observação de símbolo é t_s	35
3.1	Decomposição do domínio tempo-freqüência (transformada de Fourier de curta duração).	46
3.2	(a) Densidade de probabilidade gaussiana, (b) Decomposição do domínio tempo-freqüência, utilizando a gaussiana como janela.	46
3.3	Decomposição do domínio tempo-freqüência (transformada <i>wavelet</i> contínua).	48
3.4	Reticulado diádico (a) tempo-freqüência, (b) tempo-escala.	50
3.5	Wavelet de Haar.	52
3.6	Wavelet Sombrero.	52
3.7	Wavelets de Daubechies de ordem N (dbN), $N = 1, 2, \dots, 12$	53
3.8	Wavelet complexa de Shannon (partes real e imaginária), $f_c = 1, f_b = 1, 5$	54
3.9	Wavelet complexa de Morlet (partes real e imaginária), $f_c = 1, f_b = 1, 5$	55
3.10	Wavelets gaussianas de ordem (a) $n = 1$, (b) $n = 3$, (c) $n = 5$ e (d) $n = 8$	55
4.1	Espaços vetoriais gerados por funções escala. Observe-se o “aninhamento” dos espaços de aproximação.	61
4.2	Subespaços de funções wavelet. Note-se a ortogonalidade entre os subespaços.	63
4.3	Decomposição de $f(t)$ pelo algoritmo piramidal. Note-se como os coeficientes são obtidos a partir dos coeficientes de aproximação iniciais.	67
4.4	Recomposição de $f(t)$ pelo algoritmo piramidal. Note-se como os coeficientes de aproximação são obtidos a partir dos coeficientes (de aproximação, na mais baixa resolução, e de detalhes, nos diversos níveis de resolução) da decomposição	68
4.5	Diagramas dos blocos de (a) subamostragem e (b) sobreamostragem. Note-se que, na letra (b), a igualdade só vale para valores pares de n	69
4.6	Banco de filtros de análise de duas bandas.	70
4.7	Bancos de filtros de análise de duas bandas, implementando a DWT de um sinal. Observe-se que somente são mostrados três níveis de decomposição; no entanto, a árvore segue até encontrar as seqüências de coeficientes $c_{j_0}[k]$ e $d_{j_0}[k]$	70
4.8	Banco de filtros de síntese de duas bandas: obtendo novamente o coeficiente de aproximação do nível $j + 1$, a partir do detalhe e aproximação do nível j	71

4.9	Bancos de filtros de síntese de duas bandas, recuperando os coeficientes de aproximação $c_J[k]$	71
4.10	Sinal de ECG original. Trecho de 4 segundos, incluindo 4 pulsos do complexo QRS.	71
4.11	Coefficientes da decomposição de um trecho de sinal de ECG. Os coeficientes de aproximação são denotados por $c_0(k)$ e os coeficientes de detalhes por $d_j(k)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$; cada j mostra uma escala diferente.	72
4.12	Aproximações sucessivas do sinal de ECG. São mostrados: no topo, o ECG original; as versões descrevem aproximações cada vez mais próximas do sinal original (embaixo, à direita). Note-se que a resolução da aproximação é cada vez melhor.	73
4.13	Análise multirresolução (cálculo da DWT) de uma imagem em duas dimensões. Quatro sinais são gerados em cada escala.	74
4.14	Imagem padrão <i>Lena</i> . Uma versão digitalizada da imagem original, completa, pode ser encontrada em http://www.lenna.org	75
4.15	Imagem <i>Lena</i> original (a) e aproximações de 1 (b), 2 (c) e 3 (d) níveis. Note-se que a imagem é apresentada com diferentes graus de resolução, um dos princípios da AMR.	76
4.16	Imagens geradas a partir da AMR da imagen <i>Lena</i> ; aproximação (a), detalhes horizontais (b), verticais (c) e diagonais (d). A cor cinza é numericamente representada por um coeficiente nulo. Note-se como, para cada uma das imagens, tem-se a impressão de que foi colocado um filtro, de tal sorte que só apareçam os detalhes desejados.	77
5.1	Esquema de dois sistemas MRDM com bandas passantes C e C' . Em (a), a banda máxima definida é f_m . Neste caso, $J = 2$ e portanto $C = 2^2 f_m = 4f_m$. Em (b), é mostrado um esquema semelhante com frequência máxima $f'_m = f_m/2$; aqui, $J = 3$ e assim $C' = 2^3 f'_m = 8f'_m$. Tem-se, desta forma, $C = C'$. . .	84
5.2	Alocação dos usuários em um sistema MRDM com $J = 3$, em que todos possuem mesma taxa de amostragem. No primeiro nível de decomposição, tem-se dois usuários, um na seqüência de aproximação e outro no primeiro nível de detalhe; no segundo nível, tem-se dois usuários, multiplexados anteriormente; no terceiro nível, tem-se quatro usuários. A utilização da banda disponível pelos usuários dentro de cada nível de decomposição é meramente ilustrativa, pois ela depende da multiplexação anterior à MRDM.	85
5.3	(a) Sistema MRDM de três níveis. G e H são os filtros escala e <i>wavelet</i> , respectivamente. (b) <i>hardware</i> extra necessário para implementar multiplexação TDM nos níveis de detalhe; a figura mostra o <i>hardware</i> utilizado no nível j de detalhe. Na escala adjacente, o número de blocos de sobreamostragem é escalonado por um fator de dois, assim como o fator de sobreamostragem, e assim por diante.	87

5.4	(a) Sistema de demultiplexação baseado em AMR, através de filtros G e H . (b) <i>hardware</i> adicional necessário para separar informações provenientes de diferentes usuários em um dado canal j de detalhes.	87
5.5	Multiplex tipo A_1 . Neste sistema, são recuperados dois usuários com taxas de transmissão de 256 kbps	91
5.6	Multiplex tipo A_2 . Aqui, são multiplexados dois usuários com taxas de transmissão de 128 kbps , junto com um usuário de taxa igual a 256 kbps	91
5.7	Multiplex tipo A_3 . São multiplexados dois usuários com taxas de transmissão de 64 kbps , um usuário à taxa de 128 kbps e um usuário à taxa de 256 kbps	91
5.8	Multiplex tipo A_4 . São multiplexados quatro usuários com taxas de transmissão de 64 kbps , junto com um usuário de taxa igual a 256 kbps . Note a utilização do <i>hardware</i> adicional no segundo nível de decomposição, para recuperar dois usuários multiplexados anteriormente.	92
5.9	Efeitos espectrais ao aumentar a taxa de transmissão de usuários no MRDM baseado em Haar com um número fixo de $n_J = 2^J = 4$ usuários. O número de níveis de decomposição é $J = 2$. N é o comprimento do bloco de saída. (a) $N = 64$, $N/2^J = 16$ por usuário. (b) $N = 128$, $N/2^J = 32$ por usuário. (c) $N = 512$, $N/2^J = 128$ por usuário.	93
5.10	Efeitos espectrais ao aumentar o número de níveis de decomposição na AMR no MRDM baseado em Haar. (a) $J = 2$ ($n_J = 4$ canais), $N = 256$, $N/2^J = 64$ (b) $J = 3$ ($n_J = 8$ canais), $N = 512$, $N/2^J = 64$. (c) $J = 4$ ($n_J = 16$ canais), $N = 1024$, $N/2^J = 64$. (d) $J = 5$ ($n_J = 32$ canais), $N = 1048$, $N/2^J = 64$. . .	94

LISTA DE TABELAS

5.1	Número total de usuários em um sistema MRDM com J níveis de decomposição.	86
5.2	Possível composição de um sistema MRDM; o valor A_i representa o número de canais multiplexados de cada tipo. A combinação admite tributários de 256, 128 e 64 kbps.	90

SUMÁRIO

I	INTRODUÇÃO	15
1.1	Motivação	15
1.1.1	Multiplexação	15
1.1.2	Wavelets	17
1.1.3	Análise Multirresolução	18
1.2	Objetivos	19
1.3	Organização da dissertação	19
2	INTRODUÇÃO À MULTIPLEXAÇÃO E SISTEMAS MULTI-PORTADORAS	21
2.1	Principais técnicas de multiplexação e acesso múltiplo	23
2.1.1	Multiplexação por divisão freqüencial	23
2.1.2	Multiplexação por divisão temporal	24
2.1.3	Multiplexação por divisão em códigos	26
2.2	Introdução a modulações multi-portadoras	27
2.2.1	História e princípios do OFDM	28
2.2.2	Utilizando a IDFT	31
2.2.3	Inserção de prefixo cíclico	34
3	GENERALIDADES SOBRE <i>wavelets</i>	37
3.1	Da análise de Fourier à análise <i>wavelet</i>: uma transição	38
3.2	Análise tempo-freqüência	42
3.2.1	A transformada de Fourier de curta duração	44
3.2.2	A transformada <i>wavelet</i> contínua	47
3.2.3	A transformada <i>wavelet</i> discreta	49
3.3	Algumas <i>wavelets</i>	51
3.3.1	Wavelet de Haar	51
3.3.2	Wavelet Chapéu Mexicano	52
3.3.3	Wavelets de Daubechies	53
3.3.4	Wavelet complexa de Shannon	53
3.3.5	Wavelet complexa de Morlet	54
3.3.6	Wavelets gaussianas	55

4	ANÁLISE MULTIRRESOLUÇÃO	57
4.1	Aspectos matemáticos preliminares	58
4.1.1	A função escala e espaços de aproximação	59
4.1.2	Os espaços de detalhes e a construção de <i>wavelets</i>	62
4.2	O algoritmo piramidal e bancos de filtros	66
4.2.1	O algoritmo piramidal de Laplace	66
4.2.2	Bancos de filtros	68
4.3	Exemplos e aplicações	71
4.3.1	Sinal de eletrocardiograma	71
4.3.2	Sinais multidimensionais	74
5	MULTIPLEXAÇÃO POR DIVISÃO EM MULTIRRESOLUÇÃO	79
5.1	Preliminares e história	79
5.2	O multiplexador por multirresolução: conceitos-chave	82
5.2.1	Multiplexação de sinais de banda limitada	83
5.3	Especificações de sistemas MRDM	88
5.4	Formas de onda de canal e comportamento espectral	92
5.5	Comentários finais	95
6	CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES	96
6.1	Conclusões e comentários finais	96
6.2	Contribuições futuras	98
	REFERÊNCIAS	99

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Education is the process of telling smaller and smaller lies.

— Autor desconhecido

As técnicas de multiplexação e acesso múltiplo têm desempenhado um papel cada vez mais importante no desenvolvimento das telecomunicações. São peças centrais em quase todos os sistemas de comunicação modernos, especialmente na área das comunicações móveis e enlaces de rádio digital, onde o sempre crescente número de usuários cria uma necessidade constante por expansão, permitindo assim que vários usuários móveis compartilhem simultaneamente uma quantidade finita do espectro de rádio [1]. Esta dissertação propõe um novo método de multiplexação baseado em *sistemas wavelet*, mais especificamente na técnica de multirresolução. Este capítulo tem como objetivo introduzir o leitor ao assunto estudado e será dividido em três seções: motivação, objetivos do trabalho e, finalmente, organização e estrutura do texto.

I.1 Motivação

1.1.1 Multiplexação

O termo multiplex surgiu originalmente do nome do artefacto chamado Multiplexor, idealizado pelo engenheiro de telégrafos francês Émile Baudot, por volta do ano de 1876. Este aparelho tinha a capacidade de realizar a transmissão simultânea de seis sinais de telegrafia por um único canal de transmissão. A técnica foi utilizada basicamente para telegrafia, até o começo do século XX, quando o impressionante crescimento da telefonia necessitou da

introdução de multiplexação nos sinais de voz. Com o aparecimento de novas técnicas de modulação, especialmente a de Banda Lateral Única, surgiu um novo sistema de multiplexação: a multiplexação por divisão em frequências (FDM), que rapidamente alcançou uma tremenda popularidade em centrais telefônicas [2].

Historicamente, redes telefônicas utilizavam FDM para transmitir vários canais de voz por um único circuito físico desde 1910. Sistemas FDM rapidamente se expandiram pelo mundo. Em 1920, o engenheiro de telecomunicações George Valensi (ITT, Paris) lançou os fundamentos da multiplexação por divisão de tempo (TDM) para canais de voz. Não sendo possível implementar o sistema com o estado da arte dos meios tecnológicos disponíveis na época, a idéia só voltou a ser evocada novamente nos anos 40, por Maurice Deloraine (ITT, Paris) e John Bennett (Bell Labs), independentemente [3, 4].

Desde o monumental trabalho de Shannon [5], técnicas digitais têm substituído técnicas analógicas em sistemas de comunicação. Via de regra, a multiplexação digital é levada a cabo através de multiplexação temporal. No entanto, também é possível efetuar multiplexação de dados por códigos (CDM); recentemente, esta técnica tem sido foco de interesse, especialmente após a padronização do sistema CDMA pelo padrão IS-95 para telefonia celular (hoje, o padrão em vigor é o IS-2000) [6] e W-CDMA [7].

Por outro lado, com o advento das fibras ópticas para sistemas de comunicação, uma técnica de multiplexação inovadora viu a luz: a chamada multiplexação por divisão em comprimento de onda (WDM), que implementa um sistema FDM no domínio óptico.

Em 1999, uma nova abordagem, chamada de multiplexação por divisão em corpos finitos (GDM) foi introduzida, por Hélio Magalhães, Ricardo Campello e André Kauffman, do Departamento de Eletrônica e Sistemas da UFPE, como um esquema espectralmente eficiente para canais de banda estreita [8]. Este esquema pode ser implementado com ajuda de algoritmos rápidos para cálculo de transformadas e oferece requisitos compactos de uso de banda. Sistemas GDM são verdadeiramente digitais e utilizam técnicas de espalhamento espectral baseadas em corpos finitos [9]. Sistemas que utilizam as seqüências de espalhamento espectral geradas são chamados de Acesso por Multiplexação por Divisão em Corpos Finitos (GDMA).

Desde a fantástica evolução das técnicas de processamento de sinais (PS), sistemas de multiplexação baseados em PS, particularmente os baseados em algoritmos rápidos, têm sido bem-vindos, especialmente do ponto de vista da implementação. Os avanços mais impressionantes em PS são talvez os relacionados à teoria de *wavelets* [10].

1.1.2 *Wavelets*

Especificamente, as *wavelets* mostraram-se ferramentas poderosas para o tratamento eficiente de sinais, devido às suas diferentes características, como a sua grande flexibilidade e versatilidade na escolha do sistema *wavelet* utilizado ou o seu forte poder computacional. A análise *wavelet* tem, em anos recentes, tido um papel relevante em diferentes áreas, incluindo na Engenharia. Hoje, é considerada bem estabelecida em PS [11, 12], sendo até utilizadas para analisar sinais em corpos finitos [13].

De um ponto de vista histórico, análise de sinais via *wavelets* tem suas bases enraizadas no revolucionário trabalho de Jean Baptiste Joseph Fourier, durante o século XIX [14]. Fourier estabeleceu os fundamentos com a sua teoria sobre análise em frequência, que se revelou ser extremamente importante e influente nas ciências.

A atenção de pesquisadores da área de Física e Engenharia foi gradualmente migrando da análise freqüencial à análise baseada em escalas, quando começou a ficar claro que uma abordagem a partir de medidas de oscilações médias em diferentes escalas provou ser menos sensível a ruído [11].

A primeira menção relacionada com o que hoje é denominado de *análise de wavelet* parece encontrar-se no ano de 1909, em uma tese escrita por um matemático húngaro, Alfred Haar [15]. Nesta abordagem, não é mostrado o conceito explicitamente, porém o conjunto de sinais usados constitui o primeiro sistema *wavelet* inventado. Por muitos anos, as *wavelets* de Haar ficaram no anonimato e, por um período muito longo, continuaram a ser a única base ortonormal de *wavelets* conhecida.

O conceito de *wavelets* e a sua forma teórica atual foram propostos por Jean Morlet, em colaboração posterior com a equipe do Centro de Física Teórica em Marseille, França, sob a supervisão de Alex Grossmann [16].

Os métodos utilizados em análise de sinais via *wavelets* foram desenvolvidos principalmente por Yves Meyer e seus colaboradores [17] e, neste contexto, o principal algoritmo data de 1989, em um trabalho de Stéphane Mallat [18]. Desde então, pesquisas sobre *wavelets* se tornaram internacionais. Tal pesquisa é particularmente ativa nos Estados Unidos e na França, com pesquisadores como Ingrid Daubechies, Ronald Coifman e Victor Wickerhauser [19].

Uma vasta gama de referências, com textos que descrevem detalhadamente o nascimento, a história e os conceitos seminais das *wavelets* podem ser encontrados na literatura [20, 21]. Cada vez mais, o mundo das *wavelets* se expande. Centenas de artigos científicos nas áreas de

matemática e engenharia são publicados a cada mês. Por causa de suas propriedades únicas, *wavelets* são usadas em inúmeras áreas, como análise funcional em matemática, estudo de propriedades (multi)fractais, singularidades ou oscilações locais de funções, solução de equações diferenciais, reconhecimento de padrões, compressão de dados, solução de vários problemas de Física, Biologia, Medicina, Astronomia, Acústica, Engenharia Nuclear, Mecânica Estatística, Economia e Finanças, problemas de computação gráfica, Música, reconhecimento de padrões ou análise de sinais geológicos. Em telecomunicações, *wavelets* têm sido aplicadas em vários aspectos de sincronização e modulação, onde também são relevantes.

1.1.3 *Análise Multirresolução*

Uma grande contribuição à teoria de *wavelets* foi dada por Stéphane Mallat, em 1989, com uma técnica elegante e interessante de multirresolução para decomposição de sinais [18]. De fato, uma ampla variedade de estruturas organizacionais, incluindo sistemas sensoriais biológicos, são organizados em “níveis” ou “escalas”. Esta ferramenta de representação multi-escala é assim um ingrediente essencial para a extração eficiente de informações, a partir da observação [12, 22].

A história da análise multirresolução (AMR) é um belo exemplo de como aplicações podem estimular desenvolvimentos teóricos. Na época, Mallat trabalhava na análise de imagens, onde a idéia de estudar imagens em várias escalas simultaneamente e comparar os resultados tinha se tornado popular há vários anos [23, 24]. A construção, por Yves Meyer, das primeiras bases *wavelet* ortogonais [17] estimulou Mallat a ver estas bases como uma ferramenta para descrever matematicamente o “incremento de informação” necessário para avançar de uma aproximação mais grosseira a uma aproximação de maior resolução. Foi assim possível interpretar a AMR como uma espécie de *microscópio matemático*, que permitia a visualização do sinal com diferentes graus de resolução. Este ponto de vista sedimentou os fundamentos da análise multirresolução [19].

Desde então, a AMR tem despertado um grande interesse entre os pesquisadores de processamento de sinais e tem se mostrado uma ferramenta poderosa em diversas áreas do conhecimento, incluindo engenharia (redução de ruído, detecção de transitórios), física (observação astronômica) e economia (modelagem e previsão financeira). Em telecomunicações, a AMR tem sido utilizada na transmissão eficiente de vídeo, compactação e codificação de dados, modelos para visão computacional e humana, projeto de trans-multiplexadores, entre outros.

1.2 Objetivos

O principal objetivo da dissertação é propor uma técnica de multiplexação original, utilizando técnicas de análise *wavelet*, especificamente análise multirresolução. São então estudados os fundamentos necessários à elaboração do trabalho: multiplexação e técnicas de acesso múltiplo, fundamentos de modulações multi-portadoras, através de um estudo da modulação OFDM, *wavelets* e análise multirresolução. O esquema proposto é chamado de Multiplexação por Divisão em Multirresolução (MRDM) e pode ser implementado com processadores digitais de sinais. Na dissertação, são apresentados os rudimentos do novo sistema.

1.3 Organização da dissertação

O conteúdo da dissertação está distribuído ao longo de seis capítulos. As referências do trabalho são apresentadas nas últimas páginas do texto e encontram-se organizadas na ordem em que foram citadas. Um breve resumo de cada capítulo é mostrado abaixo.

Capítulo 2. São introduzidas as técnicas de multiplexação mais conhecidas e utilizadas na atualidade; também é mostrada a idéia básica das modulações multi-portadoras, através de um estudo dos fundamentos da modulação OFDM.

Capítulo 3. São apresentados os fundamentos básicos das *wavelets*, ferramentas básicas para o desenvolvimento do trabalho. É apresentada uma transição entre a análise freqüencial de Fourier e a análise de *wavelet*; também são mostradas as bases da análise tempo-freqüência e introduzidas as transformadas *wavelet* contínua e discreta; finalmente, são comentadas algumas *wavelets* conhecidas.

Capítulo 4. São descritos os rudimentos da *Análise Multirresolução*, tratando de proporcionar um entendimento intuitivo do desenvolvimento destas idéias, assim como um tratamento matemático um pouco mais rigoroso. São introduzidos os aspectos matemáticos básicos, a abordagem via banco de filtros e o algoritmo de Mallat; alguns exemplos também são apresentados.

Capítulo 5. É proposto um novo método de multiplexação baseado em análise multirresolução. No texto, são mostrados os fundamentos da proposta, mostrando a sua aplicabilidade a sinais de banda limitada, analógicos e digitais. Características particulares da multiplexação são especificadas e alguns exemplos que ilustram o potencial e a versatilidade do sistema são mostrados. Em seguida, é feita uma breve discussão sobre a

dependência do espectro do sinal produzido, em função do sistema *wavelet* escolhido para o processo de multiplexação.

Capítulo 6. Por fim, são apresentados alguns comentários relevantes, conclusões e sugestões para futuras investigações.

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO À MULTIPLEXAÇÃO E SISTEMAS MULTI-PORTADORAS

Connaître, ce n'est point démontrer, ni expliquer. C'est accéder à la vision. Mais pour voir, il convient d'abord de participer.

— Antoine de Saint-Exupéry

HISTORICAMENTE, as primeiras técnicas de multiplexação e acesso múltiplo surgiram no final do século XIX (ao redor do ano de 1876), quando o engenheiro de telégrafos francês Émile Baudot¹ idealizou o *Multiplexor*. Este artefato tinha a capacidade de realizar a transmissão simultânea de seis sinais de telegrafia por um único canal de transmissão.

Na época, as recém inventadas comunicações telefônicas² ainda eram precárias e o uso desta técnica foi basicamente restrito à telegrafia. Isto durou até o começo do século XX, quando o impressionante crescimento da telefonia necessitou da introdução de multiplexação nos sinais de voz. Com o aparecimento de novas técnicas de modulação, especialmente a de banda lateral única (na literatura, a abreviação usual é SSB, do inglês, *Single Side Band*), surgiu

¹Jean Maurice Émile Baudot (1845–1903). Engenheiro francês de telégrafos. O termo *baud* (medida do número de símbolos transmitidos por segundo por um sinal modulado) foi derivado do seu nome.

²O telefone foi inventado pelo italiano Antonio Meucci em 1849; no entanto, a patente da invenção foi atribuída a Alexander Graham Bell em 1876, em seguida a uma série de eventos misteriosos e injustiças que seriam inacreditáveis, se não fossem tão bem documentadas. <http://www.italianhistorical.org/MeucciStory.htm>

um novo sistema de multiplexação: a multiplexação por divisão em frequências (FDM), que rapidamente alcançou uma grande popularidade em centrais telefônicas [2].

Por volta de 1910, redes telefônicas começaram a utilizar FDM para transmitir vários canais de voz por um único circuito físico. Rapidamente, estes sistemas se expandiram pelo mundo e, em 1920, o engenheiro de telecomunicações George Valensi (ITT, Paris) lançou os fundamentos da multiplexação por divisão de tempo (TDM) para canais de voz³. Não sendo possível implementar o sistema com o estado da arte dos meios tecnológicos disponíveis na época, a idéia só voltou a ser evocada novamente nos anos 40, por Maurice Deloraine (ITT, Paris) e John Bennett (Bell Labs), independentemente [3, 4]. Os dois são reconhecidos como sendo os inventores da multiplexação digital.

Desde o monumental trabalho de Shannon⁴ [5], técnicas digitais têm substituído técnicas analógicas em sistemas de comunicação. Via de regra, a multiplexação digital é levada a cabo através de multiplexação temporal. No entanto, também é possível efetuar multiplexação de dados por códigos (CDM); recentemente, esta técnica tem sido foco de interesse, especialmente após a padronização do sistema CDMA pelo padrão IS-95 para telefonia celular (hoje, o padrão em vigor é o IS-2000) [6] e W-CDMA [7].

Por outro lado, com o advento das fibras ópticas para sistemas de comunicação, uma técnica de multiplexação inovadora viu a luz: a chamada multiplexação por divisão em comprimento de onda (WDM), que implementa um sistema FDM no domínio ótico: lasers de diversos comprimentos de onda são modulados em uma única fibra.

Mais recentemente, em 1999, uma nova abordagem, chamada de multiplexação por divisão em corpos finitos (GDM), foi introduzida por Hélio Magalhães, Ricardo Campello e André Kauffman, do Departamento de Eletrônica e Sistemas da Universidade Federal de Pernambuco, como um esquema espectralmente eficiente para canais de banda estreita [8]. Este esquema pode ser implementado com ajuda de algoritmos rápidos para cálculo de transformadas e oferece requisitos compactos de uso de banda. Sistemas GDM são sistemas de multiplexação verdadeiramente digital, que utilizam técnicas de espalhamento espectral baseadas em transformadas em corpos finitos [9], como a transformada de Fourier de corpo finito, introduzida por Pollard [25]. Sistemas que utilizam as seqüências de espalhamento espectral geradas são chamados de Acesso por Multiplexação por Divisão em Corpos Finitos (GDMA).

³George Valensi é, hoje, principalmente reconhecido pelo seu método de transmissão de imagens de televisão coloridas, de tal forma que estas pudessem ser recebidas por aparelhos de televisão, tanto coloridas, como preto & branco.

⁴Claude Elwood Shannon (1916–2001). Engenheiro e matemático norte-americano que revolucionou a teoria de comunicações.

Este capítulo discutirá os fundamentos básicos das técnicas de multiplexação mais conhecidas, assim como dará uma introdução às modulações multi-portadoras. Duas seções dividem então o capítulo. Na primeira seção, são apresentadas as técnicas de multiplexação mais conhecidas e utilizadas hoje: Multiplexações por divisão em frequência, tempo e códigos. A segunda seção mostra as bases das modulações multi-portadoras.

2.1 Principais técnicas de multiplexação e acesso múltiplo

Em sistemas de comunicação atuais, é freqüentemente desejável transmitir simultaneamente sinais de informação originários de diferentes fontes. Um bom exemplo desta necessidade pode ser facilmente observado em sistemas móveis, em que uma grande quantidade de usuários que precisam se comunicar ao mesmo tempo devem ser transmitidos simultaneamente. Assim, para obter um bom aproveitamento do espectro de rádio disponível, os usuários dividem uma quantidade limitada de banda passante, em um dado canal. Além disto, para garantir comunicações de alta qualidade, esta divisão precisa ser realizada sem uma degradação muito severa no desempenho do sistema [1].

Esta seção introduz então os princípios fundamentais das técnicas de multiplexação e acesso múltiplo mais conhecidas e utilizadas. Em geral, existem várias possibilidades com as quais diversas fontes podem enviar sinais de informação simultaneamente, através de um dado canal de comunicação.

2.1.1 Multiplexação por divisão freqüencial

Em um sistema de multiplexação por divisão em frequência (FDM), N sinais são transmitidos por um único canal de comunicação, através de uma partição da banda passante deste último em vários sub-canais de banda estreita, não superpostos na frequência. A Figura 2.1 ilustra o princípio básico de um sistema FDM.

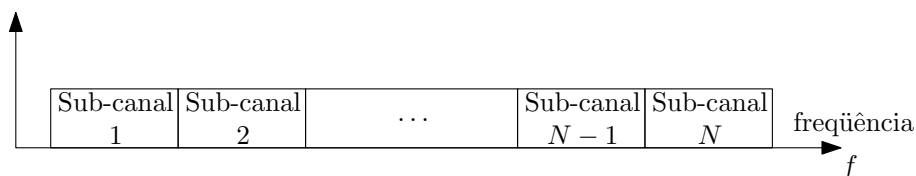


Figura 2.1: Subdivisão da banda passante de um canal de comunicação por um sistema FDM, em sub-canais de banda estreita, não superpostos em frequência.

Desta forma, como é possível observar, uma banda passante única e uma frequência de portadora específica, também única, são atribuídas a cada sinal de informação. Na Figura 2.2, que ilustra novamente o princípio de funcionamento de um sistema FDM, de uma forma um pouco diferente da anterior, é possível observar como os sinais são transmitidos de forma simultânea. Esta figura serve de apoio para a comparação com os demais sistemas discutidos neste texto.

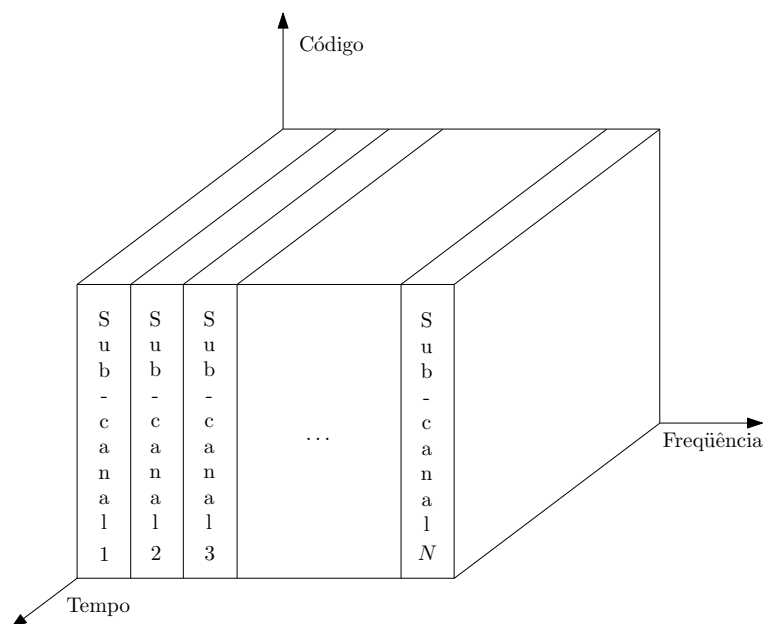


Figura 2.2: Utilização da banda total disponível de um canal de comunicação por um sistema de multiplexação por divisão temporal. Note que os sinais são transmitidos de forma simultânea.

A demodulação pode ser realizada de forma tradicional, através de filtragem em banda básica. No entanto, devido à sua configuração, sistemas FDM requerem filtragens com altas ordens e bandas de transição muito estreitas, de forma a atenuar os efeitos de possíveis interferências entre canais adjacentes. Além disto, como os sub-canais possuem bandas relativamente estreitas, esta técnica é comumente restrita a comunicações com baixas taxas de transmissão, como sistemas de transmissão de vários canais de voz, por exemplo [1].

2.1.2 Multiplexação por divisão temporal

Um outro método para a criação de vários sub-canais para a multiplexação de vários sinais de informação é a subdivisão de um tempo T_q , chamado de tempo de quadro, em N subintervalos de duração T_q/N . Cada sinal de informação é então atribuído um subintervalo,

chamado de *slot*, durante o qual o sinal pode ser transmitido [26]. Assim, nestes sistemas de multiplexação por divisão temporal (TDM), o espectro do canal de comunicação é dividido em *slots* de tempo e, em cada *slot*, unicamente um sinal pode ser transmitido. A Figura 2.3 mostra o princípio da técnica. É importante mencionar que caso um sinal não seja inteiramente transmitido durante o intervalo de tempo onde a transmissão é permitida, o sinal volta a acessar o canal, de forma cíclica, em um próximo quadro.

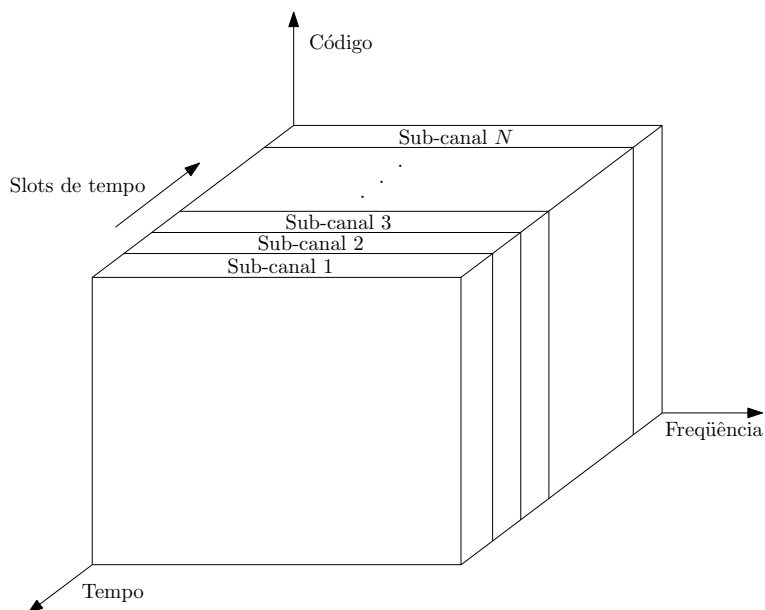


Figura 2.3: Utilização da banda total disponível de um canal de comunicação por um sistema de multiplexação por divisão temporal. Note que os sinais são transmitidos com uma mesma frequência de portadora, mas não simultaneamente. Cada sub-canal ocupa um slot de tempo, que se repete cíclicamente, a cada quadro.

Por outro lado, diversas outras características diferenciam o sistema de multiplexação TDM do FDM. De fato, todos os sinais possuem a mesma frequência de portadora. Além disto, a transmissão não é contínua, mas ocorre em surtos. No entanto, se o tempo de quadro T_q for suficientemente pequeno, então a transmissão aparenta ser contínua. Outra característica marcante de sistemas TDM é a necessidade de técnicas de sincronização sofisticadas e precisas, devido à transmissão em surtos, que requer sincronismo entre *slots* na transmissão e na recepção. Em geral, sistemas TDM são utilizados para transmissão de sinais e modulações digitais e as taxas de transmissão são consideravelmente maiores que em sistemas FDM, o que implica na utilização de equalizadores [1].

2.1.3 Multiplexação por divisão em códigos

Como foi observado, nas duas técnicas anteriores, o canal de comunicação é particionado em sub-canais independentes, respectivamente, bandas de frequência e *slots* de tempo não superpostos, nos quais um único sinal pode ser transmitido. Em um sistema com multiplexação por códigos (CDM), uma seqüência única de assinatura (uma forma de onda específica) é atribuída a cada sinal [26]. Com isto, o sinal é modulado e espalhado pela banda total do canal. Estas assinaturas permitem que os sinais multiplexados e transmitidos simultaneamente sejam demodulados pelo receptor.

De fato, em um sistema CDM, a seqüência de assinatura corresponde a um sinal de banda larga, chamada de seqüência de espalhamento espectral. Todas as seqüências do sistema são palavras-código pseudo-aleatórias, ortogonais (ou aproximadamente ortogonais) entre si, e que possuem taxas de transmissão muito maiores que os sinais de informação, com os quais elas são multiplicadas. Todos os sinais podem então ser transmitidos simultaneamente, com a mesma frequência de portadoras. Seguindo o mesmo padrão anterior, a Figura 2.4 ilustra o princípio do sistema.

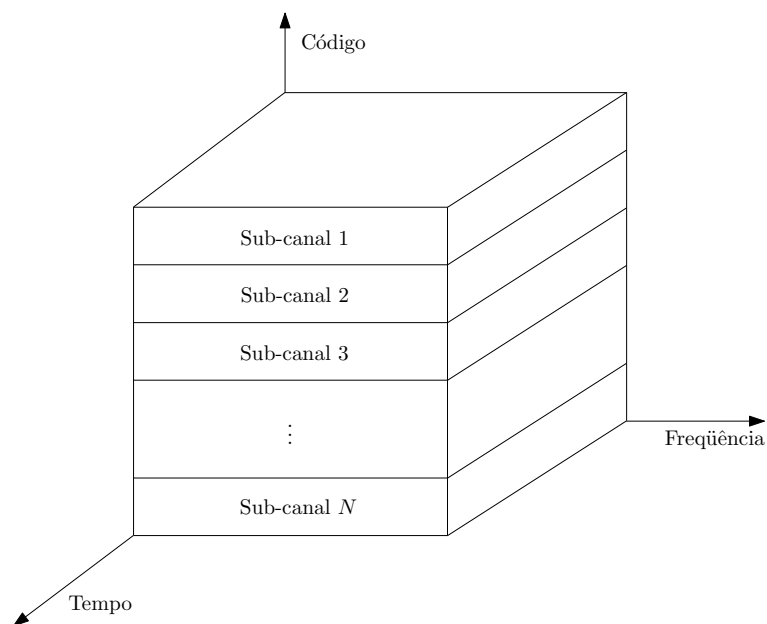


Figura 2.4: Utilização da banda total disponível de um canal de comunicação por um sistema de multiplexação por divisão em códigos. Note que a configuração dos sub-canais permite o envio simultâneo dos sinais de informação, com a mesma frequência da portadora.

No receptor, é realizada uma operação de correlação para detectar unicamente a palavra-código desejada. Devido a esta correlação, as outras palavras-código se apresentam como ruído ao receptor.

Além dos sistemas apresentados acima, existem outras técnicas de multiplexação de sinais e acesso múltiplo; algumas delas, como multiplexação por divisão espacial e pacotes de rádio, são discutidas em [1]. Por outro lado, maiores detalhes sobre características de utilização de banda passante, desempenho ou implementação de receptores nos sistemas comentados podem ser encontradas em [26]. Na próxima seção, é dada uma introdução às modulações multi-portadoras.

2.2 Introdução a modulações multi-portadoras

A idéia de transmitir dados pela divisão dos mesmos em várias seqüências de comprimento menor e utilizar estas para modular várias portadoras tem sua origem no sistema Kineplex, proposto por R. R. Mosier e R. G. Clabaugh, da companhia Collins Radio Co., em 1958, há quase 50 anos [27]. Desde então, esta técnica tem suscitado o interesse constante, porém periférico, da comunidade científica na área das comunicações.

Nos últimos anos, no entanto, a sempre crescente necessidade por altas taxas de transmissão e a multiplicação de meios físicos de transmissão com diversas características têm tornado as modulações multi-portadoras candidatas atrativas para as novas gerações de sistemas de comunicação. Notavelmente, estas técnicas têm sido empregadas em diversas aplicações, como transmissão de rádio digital (Digital Audio Broadcasting – DAB) [28] e televisão digital [29], comunicações sem fio de banda larga (protocolos IEEE 802.11a [30] e IEEE 802.11g [31]), serviços de assinatura digital (xDSL), entre outros. No âmbito da pesquisa, elas têm sido consideradas em áreas tais como equalização no domínio temporal, redução da razão pico-média, atenuação de ruído de fase e projeto de pulsos de formatação.

Infelizmente, apesar da sua crescente aceitação como o esquema de modulação padrão nos futuros sistemas de comunicação móvel e sem fio e de um grande número de artigos escritos sobre o assunto, artigos de revisão completos e didáticos, que cobrem os fundamentos do tópico, são difíceis de encontrar.

Assim, com o propósito de entender melhor estas técnicas, esta seção tentará descrever os rudimentos de um sistema de multiplexação por divisão de frequências ortogonais (OFDM). Este esquema de modulação é uma forma especial de transmissão multi-portadoras, onde

uma única seqüência de dados de alta taxa é transmitida através de um dado número de sub-portadoras, de taxa inferior. Os conceitos aqui expostos podem ser transferidos para um sistema multi-portadoras genérico.

Desta forma, as subseções a seguir discutem, respectivamente, a história e os princípios de OFDM, a utilização da transformada discreta de Fourier (DFT) na implementação do sistema e a inserção de prefixo cíclico no sinal a ser transmitido. Maiores detalhes sobre a modulação podem ser encontrados em [32] e [33], incluindo diversas das suas características técnicas e suas aplicações.

2.2.1 História e princípios do OFDM

A origem do conceito da transmissão paralela de dados e do OFDM pode ser encontrada formalmente por volta dos anos 60, quando dois esquemas foram propostos, com aplicações fortes na área militar: o Kineplex [27], em 1958, e o KATHRYN [34], em 1967.

Na época, a dificuldade para controlar com precisão as freqüências dos osciladores locais das diversas sub-portadoras e a sua detecção muito pobre com filtros analógicos levou à utilização de sinais ortogonais de banda limitada, sem superposição na freqüência. A banda necessária para a implementação da modulação era, por consequência, muito grande. Além disto, a utilização de pulsos de formatação retangulares espalhava de forma considerável o espectro das formas de onda, resultando, assim, em interferência inter-portadoras.

Desta forma, surgiu a necessidade de encontrar esquemas alternativos para a implementação da técnica multi-portadora. Isto levou a um número de estudos durante os anos 60, especificamente utilizando sinais ortogonais de banda limitada, com superposição em freqüência. Como resultado, uma implementação de OFDM utilizando a transformada discreta de Fourier [35] e uma patente [36] foram pioneiras no assunto, no início dos anos 70. Inicialmente, as propostas tinham como aplicação principal comunicações militares.

Hoje, a modulação OFDM é uma forte candidata para sistemas de banda larga sem fio, graças a grandes avanços na tecnologia de integração em muito larga escala (VLSI), que tornou comercialmente viável a implementação de algoritmos rápidos para o cálculo da transformada discreta de Fourier de seqüências de grande comprimento. Além disto, a modulação OFDM possui uma série de características únicas, que a tornam uma escolha atrativa para estes tipos de sistemas de transmissão de dados.

É importante mencionar que o esquema OFDM pode ser visto como uma técnica de

modulação ou de multiplexação. De fato, modulações multi-portadoras são uma forma de FDM [37]; o seu princípio básico é mostrado na Figura 2.5.

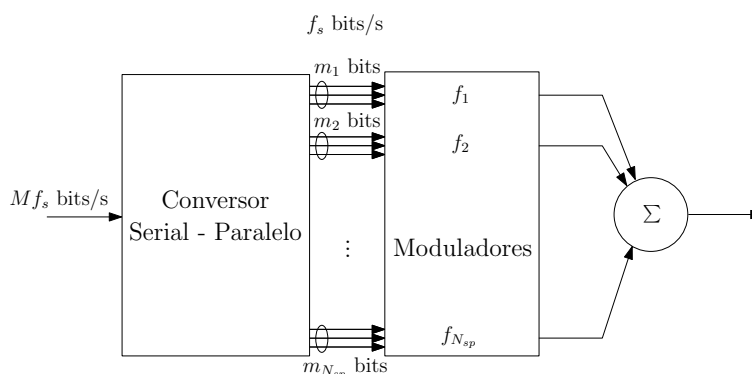


Figura 2.5: Transmissor multi-portadoras básico. Note-se que a seqüência de entrada possui uma taxa de $M f_s$ bits/s; o agrupamento dos dados em seqüências de $M = \sum_1^{N_{sp}} m_n$ bits, no bloco de conversão serial-paralelo, resulta em uma taxa de transmissão de f_s bits/s. O número de portadoras moduladas é N_{sp} .

Por outro lado, uma das principais razões para a utilização da modulação OFDM é aumentar a imunidade do sistema ao desvanecimento seletivo em frequências e atenuar a interferência de banda estreita. De fato, em um sistema de portadora única, desvanecimento rápido ou interferência podem causar uma falha na demodulação de toda uma seqüência transmitida; isto não ocorre em um sistema multi-portadoras, onde somente uma pequena parte das sub-portadoras é afetada. Neste caso, não é preciso processar o sinal recebido com equalizadores lineares e inserção de redundância, em conjunto com a utilização de códigos corretores de erros pode então corrigir as sub-portadoras corrompidas. A Figura 2.6 ilustra o processo.

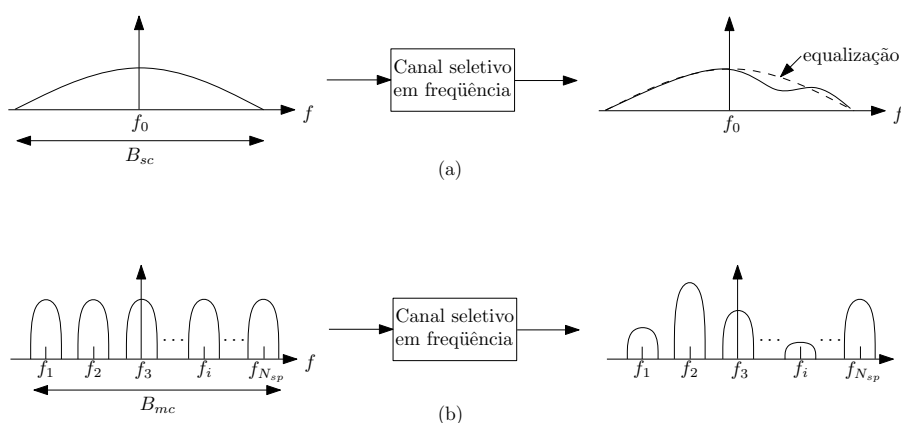


Figura 2.6: Comparação entre um sistema de portadora única (banda total B_{sc}) e um sistema multi-portadoras (banda total B_{mp}). Em (a), note a necessidade de equalização na recepção. Em (b), cada sinal de banda estreita sofre desvanecimento aproximadamente plano e a equalização é desnecessária.

Além disto, a transmissão dos dados em taxas muito menores aumenta significativamente o tempo de símbolo, o que atenua de forma considerável a interferência inter-simbólica (ISI).

Desta maneira, o conceito clássico por trás do esquema de modulação OFDM é a divisão da banda passante total do sinal modulado em N_{sp} sub-canais de banda estreita, não superpostos. Cada sub-canal é então modulado por um símbolo diferente, com a ajuda de modulações clássicas, e, em seguida, os sub-canais são todos multiplexados utilizando multiplexação freqüencial. No entanto, apesar da utilização de sub-canais não superpostos parecer ser uma boa ideia para evitar a utilização de equalizadores de alta velocidade, combater ruído impulsional e distorções por multi-percursos, o sistema sofre de uma eficiência espectral muito pobre. Desta forma, com o objetivo de otimizar a utilização da banda passante, várias idéias foram propostas, utilizando sub-canais superpostos. Isto possibilita a obtenção de um ganho na eficiência espectral de quase 50%; em contrapartida, surge a necessidade de lidar com interferência entre portadoras, problema que pode ser resolvido se as sub-portadoras forem ortogonais entre si. Isto permite atenuar os efeitos de interferência entre sub-portadoras. A Figura 2.7 mostra a diferença de utilização de banda em sistemas FDM e OFDM.

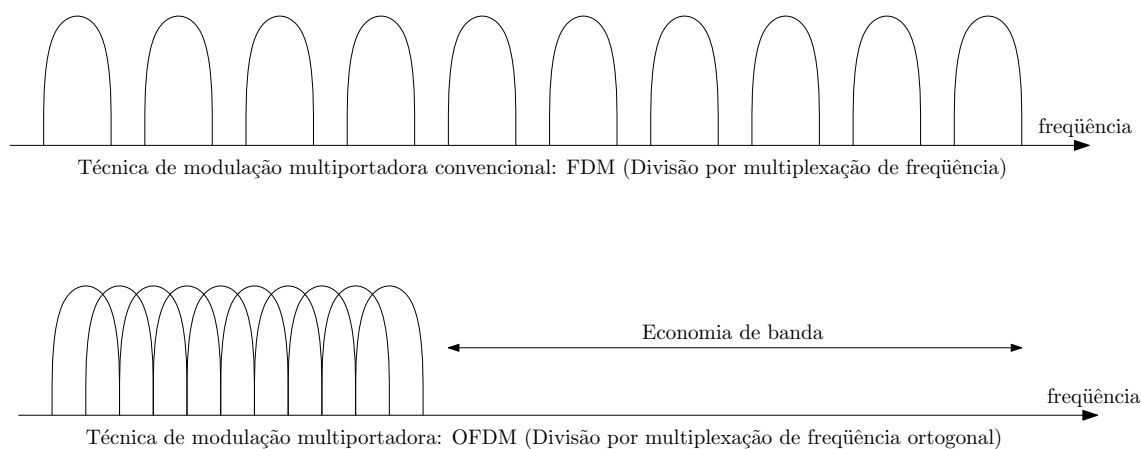


Figura 2.7: Comparação da utilização de banda dos sistemas FDM e OFDM.

Para um grande número de sub-canais, a matriz de geradores senoidais e demoduladores coerentes necessária em um sistema paralelo se torna excessivamente cara e complexa. O receptor precisa conhecer precisamente a fase e o tempo de amostragem de todas as sub-portadoras de forma a manter o desempenho do sistema aceitável. Com isto, Weinstein e Ebert aplicaram a transformada discreta de Fourier ao sistema de transmissão de dados em paralelo, como parte integrante do processo de modulação e demodulação. A Figura 2.8 ilus-

tra o esquema. Isto ajudou a eliminar os bancos de osciladores para as sub-portadoras e os demoduladores coerentes. Além disto, uma implementação em tempo discreto foi possível de ser construída, utilizando dispositivos especiais para calcular a transformada de Fourier rápida (FFT). Avanços recentes em tecnologias VLSI permitiram a construção de equipamentos de alta velocidade para calcular FFT's de grande tamanho com baixos custos. Finalmente, a partir dos anos 80, OFDM foi estudado e implementado em sistemas como modems de alta velocidade e comunicações móveis. Mais recentemente, as técnicas de OFDM tem sido exploradas em sistemas de comunicação de banda larga em canais móveis e sistemas DSL (Digital Subscriber Line), em taxas de transmissão que chegam aos 100MB/s.

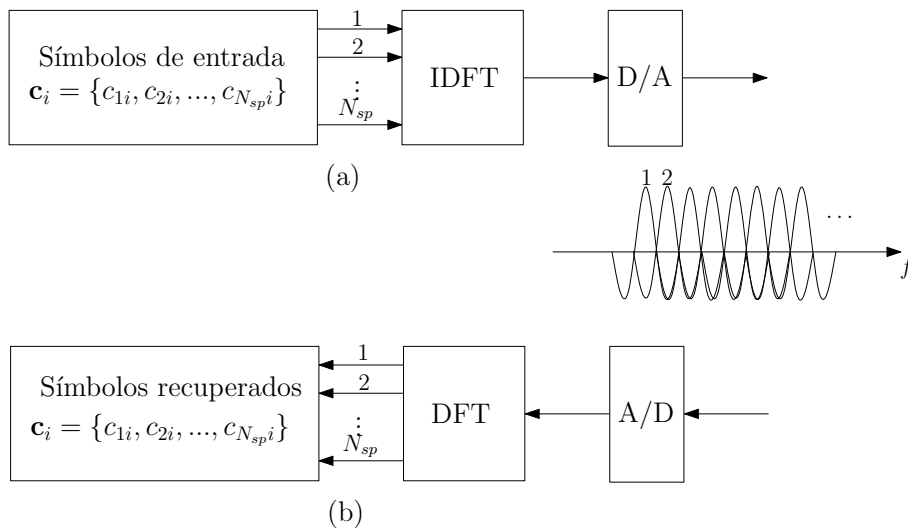


Figura 2.8: Esquema de (a) modulação e (b) demodulação OFDM utilizando a IDFT.

2.2.2 Utilizando a IDFT

A idéia de utilizar a DFT como parte do processo de modulação e demodulação foi proposta em 1971, em um artigo por S.B. Weinstein e P.M. Ebert [35]. Isto deu um novo impulso ao estudo das modulações multi-portadoras, utilizando sinais ortogonais limitados no tempo. Nesta seção, será descrito o desenvolvimento matemático do processo de modulação, utilizando a DFT. Seja então um sinal OFDM $s(t)$. É possível escrever $s(t)$ da forma seguinte:

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{N_{sp}} c_{ki} e^{j2\pi f_k \cdot (t - iT_s)} \cdot g(t - iT_s). \quad (2.1)$$

Na equação 2.1, T_s é a duração de um símbolo no sistema multi-portadoras, c_{ki} é o i -ésimo símbolo de informação na k -ésima sub-portadora, $g(t)$ é o pulso de formatação do símbolo,

N_{sp} é o número de sub-portadoras e f_k a frequência de cada sub-portadora. A Figura 2.9 compara a transmissão serial de um sistema em banda básica e a transmissão paralela de um sistema OFDM.

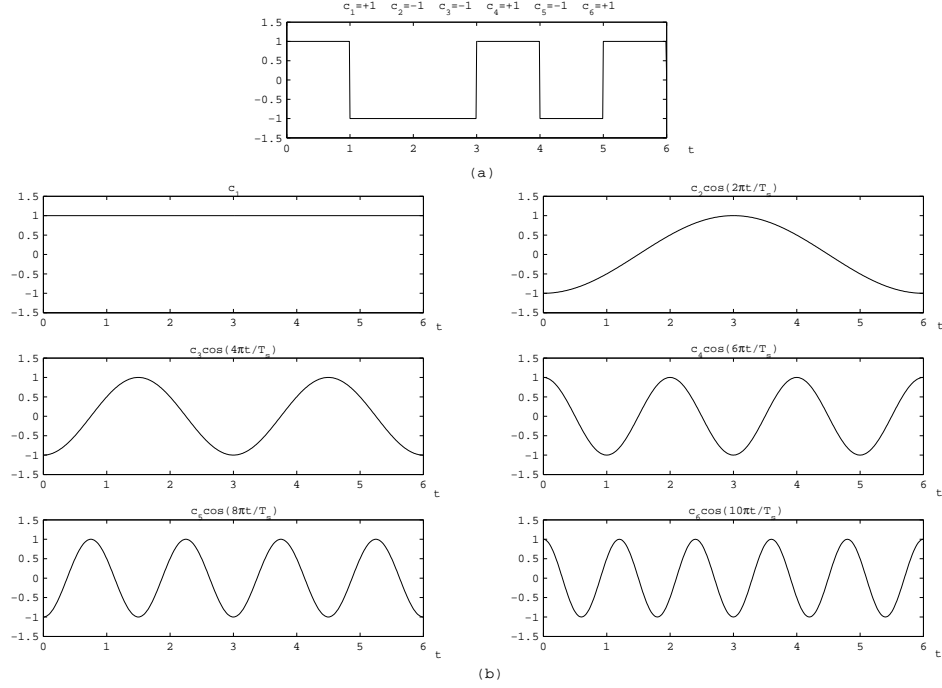


Figura 2.9: Comparação entre um sinal em banda básica (a) e um sinal OFDM (b). O tempo de símbolo em banda básica é tomado como sendo igual a um e o número de sub-portadoras $N_{sp} = 6$, a título ilustrativo. Note como o tempo de símbolo T_s no sinal OFDM é seis vezes maior que o tempo de símbolo do sinal em banda básica. Por outro lado, os sinais em (b) são somados, para gerar o sinal multiplexado.

Desta forma, amostrando o sinal $s(t)$, em um intervalo de símbolo, isto é, $iT_s < t \leq (i + 1)T_s$, a uma taxa de amostragem $t_{am} = T_s/N_{sp}$ (ou seja, N_{sp} amostras de $s(t)$ em cada intervalo de símbolo), obtém-se o vetor amostrado:

$$\mathbf{S} = [s(iT_s + t_{am}), \dots, s(iT_s + qt_{am}), \dots, s(iT_s + N_{sp}t_{am})]^T, \quad (2.2)$$

em que \star^T denota a matriz transposta de \star .

Então, no intervalo $(iT_s, (i + 1)T_s]$, cada amostra será do tipo (o índice i é fixado para simplificar a notação):

$$s(iT_s + qt_{am}) = \sum_{k=1}^{N_{sp}} c_k \cdot e^{j2\pi f_k \cdot qt_{am}} \cdot g(qt_{am}), \quad (2.3)$$

em que $q = 0, 1, \dots, N_{sp}$. Como é possível observar, a equação 2.3 tem uma expressão curiosamente familiar. Sabemos que a transformada discreta de Fourier (DFT) tem como expressões de análise (DFT direta) e síntese (DFT inversa), respectivamente⁵:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad (2.4a)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad (2.4b)$$

em que $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. Facilmente, é possível perceber a semelhança entre as equações 2.3 e 2.4. Ao definir $g(t)$ como um pulso retangular, tal que

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T_s \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \quad (2.5)$$

será possível escrever

$$s(iT_s + qt_{am}) = \sum_{k=1}^{N_{sp}} c_k \cdot e^{j2\pi f_k \cdot qt_{am}} = \sum_{k=1}^{N_{sp}} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi f_k \cdot q T_s}{N_{sp}}} = \sum_{k=1}^{N_{sp}} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi(k-1)q}{N_{sp}}}. \quad (2.6)$$

Vendo de outra forma, $s(iT_s + qt_{am})$ pode ser interpretada como a transformada discreta de Fourier inversa (IDFT) da seqüência de informação, a menos de um fator de escalonamento.

Matricialmente, é possível escrever:

$$\mathbf{S} = \mathbf{W}^{-1}(N_{sp})\mathbf{C}_i, \quad (2.7)$$

em que $\mathbf{W}^{-1}(N_{sp})$ é a matriz de uma IDFT de N_{sp} pontos e \mathbf{C}_i é o vetor correspondente ao i -ésimo símbolo. Respectivamente, tem-se:

$$\mathbf{W}^{-1}(N_{sp}) = \{w_{qk}^{-1}\}, \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{C}_i = [c_{1i}, c_{2i}, \dots, c_{N_{sp}i}]^T. \quad (2.8b)$$

em que $w_{qk}^{-1} = e^{j2\pi\frac{q(k-1)}{N_{sp}}}$.

Assim, é possível concluir que matematicamente, produzir um sinal OFDM é equivalente a calcular uma IDFT de N_{sp} pontos do vetor \mathbf{C}_i , o vetor de entrada do sistema. Finalmente, a equação 2.7 mostra que, facilmente, o sinal de entrada pode ser recuperado no receptor, calculando a DFT do sinal recebido. Notadamente,

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{W}(N_{sp})\mathbf{S}, \quad (2.9)$$

⁵Existem diversas definições para as expressões de análise e síntese da DFT, utilizadas por diversos autores. Neste texto, serão utilizadas as definições das equações 2.4, que podem ser encontradas em [38].

em que $\mathbf{W}(N_{sp}) = \{w_{qk}\}$, com $w_{qk} = e^{-j2\pi \frac{q(k-1)}{N_{sp}}}$.

É importante ressaltar que esta é uma característica extremamente vantajosa do sistema de modulação OFDM, pois ela permite que processadores digitais de sinais possam produzir sinais modulados a grandes velocidades, utilizando algoritmos rápidos para o cálculo da DFT.

2.2.3 Inserção de prefixo cíclico

Entendidos os fundamentos da modulação OFDM, é interessante comentar alguns aspectos técnicos, que permitem obter uma visão mais próxima dos esquemas utilizados na prática. Mais especificamente, esta seção, que conclui o capítulo, considera a importância da inserção de prefixo cíclico em sinais OFDM. De fato, um canal seletivo em frequência pode ser caracterizado por uma resposta ao impulso variante no tempo, com fortes características de multi-percurso [26]. Isto produz um atraso por espalhamento de valor elevado, não desprezível se comparado com um período de símbolo. Mesmo em sistemas OFDM, onde este período é considerado longo, existe a possibilidade de uma queda notável de desempenho. Em um canal com multi-percursos, por exemplo, o sinal desejado é recebido, proveniente do caminho principal. Os outros caminhos produzem sinais recebidos atrasados no tempo, conseqüência das reflexões às quais estes últimos foram submetidos. Dentro de um intervalo de símbolo, isto causa interferência inter-simbólica, isto é, o $(i - 1)$ -ésimo símbolo, que está atrasado, causa distorção no i -ésimo símbolo. A Figura 2.10 ilustra o problema.

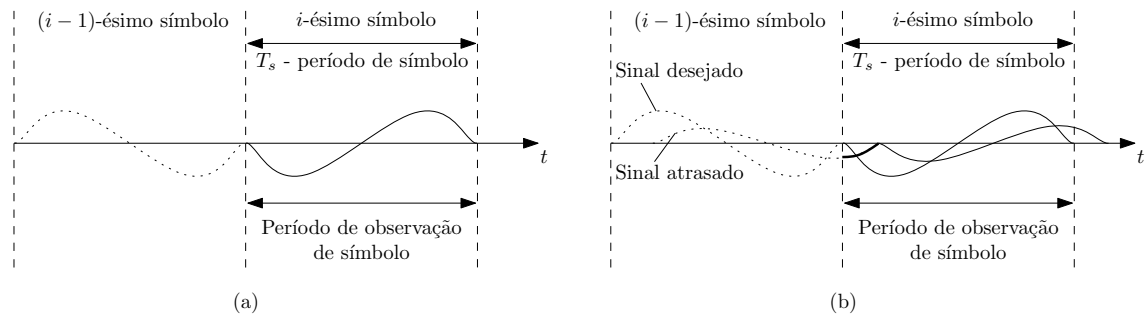


Figura 2.10: Sinal transmitido (a) e sinal recebido (b). Note como a interferência inter-simbólica do $(i - 1)$ -ésimo símbolo produz uma distorção no i -ésimo símbolo, ilustrada pela linha mais grossa, em (b).

Existem várias maneiras de atenuar este fenômeno. De forma análoga a sistemas de modulação tradicionais, é possível inserir um intervalo de guarda entre os símbolos enviados, maior que o maior atraso por espalhamento, e assim eliminar a interferência entre símbolos. No entanto, isto causa uma mudança abrupta na forma de onda no canal, o que gera com-

ponentes em altas frequências dentro do sinal. Isto resulta em interferência entre portadoras (Figura 2.11).

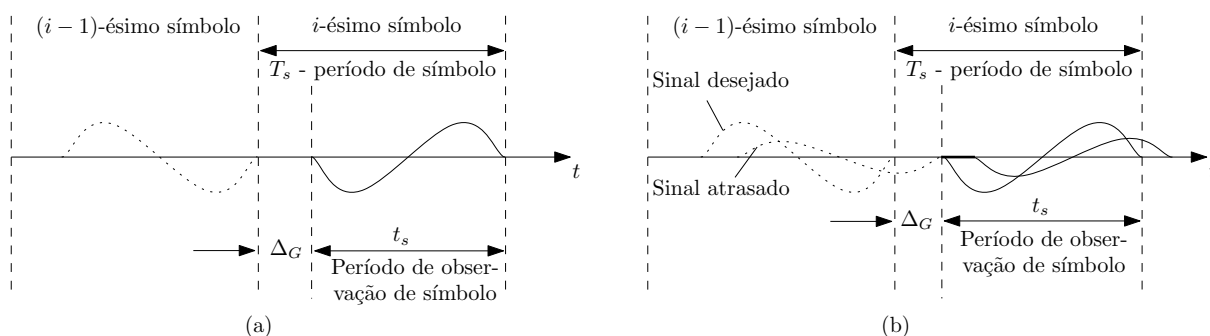


Figura 2.11: Sinal transmitido com intervalo de guarda Δ_G (a) e sinal recebido (b). Note que a utilização de um intervalo de guarda (nenhum sinal transmitido) maior que o atraso por espalhamento elimina a interferência inter-simbólica. O tempo de observação de símbolo t_s pelo receptor é menor que o tempo de símbolo T_s ; isto resulta em uma separação maior entre as portadoras e assim em uma perda na eficiência espectral.

Finalmente, como pode ser visto na Figura 2.12, é possível realizar uma extensão cíclica do símbolo enviado, o que diminui a mudança abrupta na forma de onda presente no canal. Este processo permite a eliminação perfeita da interferência entre sub-portadoras. É possível mostrar este resultado matematicamente [32].

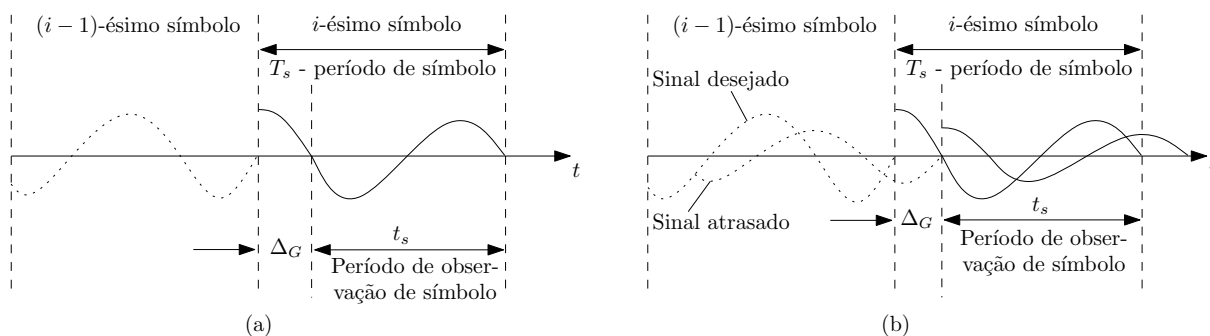


Figura 2.12: Sinal transmitido com inserção de prefixo cíclico (a) e sinal recebido (b). A utilização de uma extensão cíclica do símbolo enviado ajuda a diminuir a transição abrupta na forma de onda recebida, o que reduz a interferência entre sinais adjacentes, reduzindo a banda utilizada. Novamente, o tempo de observação de símbolo é t_s .

Diversos outros aspectos técnicos conferem aos esquemas OFDM um caráter atrativo, especialmente para sistemas móveis e canais com altas taxas de transmissão. De fato, as suas aplicações atuais abrangem canais de transmissão de rádio em altas frequências, redes telefônicas, redes locais sem fio (padrão IEEE 802.11a), televisão digital, entre outros. As vantagens

que permeiam este tipo de modulação incluem uma maneira eficiente de lidar com propagação multi-percursos, interferência e canais com desvanecimento; além disto, é robusto contra interferências de banda estreita, afetando unicamente algumas portadoras. Em contrapartida, sistemas OFDM são naturalmente mais sensíveis a derivas de frequência e a ruído de fase e possuem uma razão de potência pico-média relativamente alta, que tendem a ser desvantagens notáveis em sistemas de radiofrequência [33].

CAPÍTULO 3

GENERALIDADES SOBRE *wavelets*

*Não devemos ter medo das ondas que agitam a
nossa alma. É isso, a vida.*

— Hwang Sok-Yong

DE um ponto de vista histórico, análise de sinais via *wavelets* é um método novo, apesar das bases da teoria estarem enraizadas no revolucionário trabalho de Jean Baptiste Joseph Fourier, durante o século XIX [14]. Fourier estabeleceu os fundamentos com a sua teoria sobre análise em frequência, que se revelou ser extremamente importante e influente nas ciências.

A atenção de pesquisadores da área de física e engenharia foi gradualmente migrando de análise frequencial à análise baseada em escalas, quando começou a ficar claro que uma abordagem a partir de medidas de oscilações médias em diferentes escalas provou ser menos sensível a ruído [11].

A primeira menção relacionada com o que hoje é denominado de *análise de wavelet* parece encontrar-se no ano de 1909, em uma tese escrita por um matemático húngaro, Alfred Haar [15]. Nesta abordagem, não é mostrado o conceito explicitamente, porém o conjunto de sinais usados constitui o primeiro sistema *wavelet* descoberto.

O conceito de *wavelets* e a sua forma teórica atual foi proposto por Jean Morlet, em colaboração posterior com a equipe do Centro de Física Teórica em Marseille, França, sob a

supervisão de Alex Grossmann [16].

Os métodos utilizados em análise de sinais via *wavelets* foram desenvolvidos principalmente por Yves Meyer e seus colaboradores [17] e o principal algoritmo data de 1989, em um trabalho de Stéphane Mallat [18]. Desde então, pesquisas sobre *wavelets* se tornaram internacionais. Tal pesquisa é particularmente ativa nos Estados Unidos e na França, com pesquisadores como Ingrid Daubechies, Ronald Coifman e Victor Wickerhauser [19].

Uma vasta gama de referências, com textos que descrevem detalhadamente o nascimento, a história e os conceitos seminais das *wavelets* podem ser encontrados na literatura [20, 21]. Cada vez mais, o mundo das *wavelets* se expande. Centenas de artigos científicos nas áreas de matemática e engenharia são publicados a cada mês.

Neste texto, serão apresentados os fundamentos básicos das *wavelets*. O capítulo é dividido em três seções. Na primeira, é apresentada uma transição entre a análise freqüencial de Fourier e a análise *wavelet*, destacando-se a importância desta última. Na segunda seção, são mostradas as bases da análise tempo-freqüência e são discutidas as transformadas *wavelet* contínua e discreta. Na terceira seção, finalmente, serão mostradas algumas *wavelets* conhecidas.

3.1 Da análise de Fourier à análise *wavelet*: uma transição

A expansão em séries infinitas constitui uma ferramenta extremamente eficiente e poderosa para representar sinais. Entre as diversas representações existentes, o presente trabalho fará apenas um breve comentário sobre as séries de Fourier, construindo com isto uma ponte para um estudo mais aprofundado das séries *wavelet*.

Em 1807, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) introduziu as séries que hoje levam o seu nome, para representar matematicamente ondas de calor se propagando em corpos sólidos, em uma monografia intitulada “*Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*”. O texto foi lido pelo próprio Fourier, no dia 21 de dezembro, perante a Primeira Classe do Instituto Nacional das Ciências e das Artes na França. Contrariamente ao que se pode pensar, o trabalho gerou grande controvérsia e um conselho foi escolhido para avaliá-lo. Diversas objeções foram feitas, primeiro por Joseph Louis de Lagrange e Pierre Simon de Laplace e, posteriormente, por Jean-Baptiste Biot, cujos resultados no assunto não concordavam com os de Fourier. A seção de geometria do Instituto abriu então um concurso para responder à questão de “dar uma teoria matemática às leis da propagação do calor e comparar o resultado

desta teoria com experimentos exatos”. Fourier submeteu seu trabalho, junto com trabalhos adicionais sobre resfriamento de sólidos infinitos e calor terrestre e de radiação. Com somente um único outro trabalho recebido, o Instituto entregou a Fourier o grande prêmio de matemática do Instituto, em 1812. O relatório, contudo, não foi inteiramente favorável.

Fourier mostrou assim que é possível decompor uma função periódica (mesmo descontínua) em uma soma de senos e cossenos, com frequências múltiplas de uma frequência fundamental. São as conhecidas séries trigonométricas de Fourier. No entanto, antes de mostrar de forma rigorosa uma expressão para a série, é importante definir uma classe de funções de interesse.

Definição 3.1 Uma função $f(t)$ é dita pertencer a $\mathcal{L}^2(a, b)$ se $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ ($f(t)$ possui energia finita).

Desta forma, de forma rigorosa, para um período T , a série trigonométrica de Fourier para uma função $f(t)$ pertencente a \mathcal{L}^2 , $t_0 < t < t_0 + T$, pode ser escrita como [11]:

$$f(t) \cong a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sen(k\omega_0 t)), t_0 < t < t_0 + T, \quad (3.1)$$

em que $\omega_0 \triangleq \frac{2\pi}{T}$ é a frequência fundamental de $f(t)$ e os coeficientes da série (chamados coeficientes de Fourier) são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt, \quad (3.2a)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt, k \geq 1, \quad (3.2b)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sen(k\omega_0 t) dt, k \geq 1. \quad (3.2c)$$

Note que o sinal \triangleq utilizado acima para definir a frequência fundamental significa aqui *igual por definição*.

Bem mais tarde, foi introduzida a forma exponencial da série de Fourier, mais utilizada hoje em dia. Ela é equivalente à série trigonométrica para sinais reais, mas pode, no entanto, ser aplicada a sinais complexos, sendo assim mais geral. Matematicamente, é possível escrever $f(t)$ como:

$$f(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, t_0 < t < t_0 + T, \quad (3.3)$$

em que os coeficientes de Fourier c_k são expressos por

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.4)$$

e $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ [39]. Doravante, será preferencialmente adotada a representação exponencial.

Existem duas características na representação por séries de Fourier que são interessantes de se destacar aqui. Primeiro, é de valia mencionar que $f(t)$ é decomposta em uma soma infinita de componentes ortogonais $g_k(t) \triangleq \{e^{jk\omega_0 t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$, ponderadas pelos coeficientes de Fourier c_k e onde a ortogonalidade destas componentes é consequência do fato que

$$\langle g_m, g_n \rangle = 0, \quad \forall m \neq n, \quad (3.5)$$

com o “produto interno” na equação 3.5 definido como

$$\langle g_m, g_n \rangle \triangleq \frac{1}{T} \int_T g_m(t) g_n(t)^* dt, \quad (3.6)$$

em que o símbolo $*$ denota o conjugado complexo¹. Para melhor entender o produto interno entre funções, é possível fazer-se uma analogia com o produto interno entre vetores: ao calcular o produto interno entre duas funções, $f(t)$ e $g(t)$, o resultado obtido mostra o valor da projeção ortogonal de $f(t)$ sobre $g(t)$.

Desta forma, ao se decompor uma função $f(t)$, $t_0 < t < t_0 + T$, sobre uma base de Riesz ortogonal $\{e^{jk\omega_0 t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ [22], estão sendo calculados os valores das projeções de $f(t)$ sobre cada uma das funções de base. Estes valores são representados pelos coeficientes de Fourier, que podem então ser representados por

$$c_k = \langle f(t), e^{jk\omega_0 t} \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (3.7)$$

A segunda característica da representação em séries de Fourier que será destacada aqui é que a base de Riesz ortogonal $\{e^{jk\omega_0 t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ é gerada por escalonamento de uma única função: $e^{j\omega_0 t}$ (a frequência ω_0 é chamada de fundamental). Com isto, observa-se uma ampla gama de funções, pertencentes a \mathcal{L}^2 , $t_0 < t < t_0 + T$, que pode ser representada por uma superposição de versões escalonadas (com fator de escalonamento k inteiro) de uma mesma função básica $e^{j\omega_0 t}$ [40].

Por outro lado, é notável que esta função básica

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \text{sen}(\omega_0 t) \quad (3.8)$$

seja uma função senoidal e que esta única função seja suficiente para “gerar” todas estas funções pertencentes a \mathcal{L}^2 , para $t_0 < t < t_0 + T$. É interessante ressaltar que a representação resultante é periódica, com período T .

¹Na equação 3.6, utilizou-se uma definição alternativa de produto interno, com a intenção de simplificar os cálculos subsequentes.

Considerando agora funções pertencentes a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, isto é para $t \in (-\infty, \infty)$, é possível seguir a mesma linha anteriormente descrita e procurar funções que gerem o espaço $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ de funções não periódicas. Para isto, relembra-se que estas funções são de energia finita e, portanto, devem decair para zero em $\pm\infty$. As funções exponenciais $\{e^{jk\omega_0 t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ acima citadas não pertencem a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e portanto não são adequadas para gerar o espaço. Existe, no entanto, uma outra classe de funções que possui características ideais para uma melhor representação das funções pertencentes a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: as *wavelets*. As *wavelets* são funções de energia finita, que possuem um rápido decaimento para zero. Isto as torna potenciais candidatas para a construção do espaço $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Formalmente, uma função $\psi(t)$, de tempo contínuo, define uma *wavelet* se:

- i. pertence ao espaço de sinais de energia finita, isto é, \mathcal{L}^2 ;
- ii. satisfaz à condição de admissibilidade: $C_{\Psi} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\Omega)|^2}{|\Omega|} d\Omega < \infty$, onde $\Psi(\Omega)$ é a transformada de Fourier de $\psi(t)$ e C_{Ψ} é a constante de admissibilidade de $\psi(t)$ [41].

Da mesma forma que antes, deseja-se representar as funções de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, a partir de versões de uma única *wavelet*, $\psi(t)$. No entanto, o rápido decaimento de $\psi(t)$ não permite que se trabalhe com funções ao longo de toda a reta real. Por isso, é preciso utilizar versões deslocadas de $\psi(t)$, ao longo da reta real. O fator de deslocamento é chamado b . Por outro lado e semelhantemente ao caso das funções periódicas, faz-se necessária a representação das várias freqüências do sinal. Por isso, escalona-se $\psi(t)$ de um fator a . Obtém-se com isto uma forma geral para representar uma família de *wavelets*

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Chama-se a função básica $\psi(t)$ de *wavelet-mãe* e as funções $\psi_{a,b}(t)$ de *wavelets-filhas*. O termo $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ normaliza as *wavelets-filhas* de tal forma que $\|\psi_{a,b}(t)\|^2 = \|\psi(t)\|^2$, isto é, de modo que todas as *wavelets* de uma mesma família possuam a mesma energia. É importante ressaltar que a norma utilizada aqui, $\|f(t)\|^2$ para uma função $f(t)$, é

$$\|f(t)\|^2 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t)^* dt. \quad (3.10)$$

Para a expansão em séries, no entanto, a base de funções tal que é mostrada na equação 3.9, com $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$, é altamente redundante no que concerne a decomposição de funções. De forma a se obter uma representação mais eficiente para este tipo de representação, a e b são discretizados. Neste caso, as *wavelets-filhas* (que são as funções de base) não são

versões de uma *wavelet-mãe* transladada nem escalonada continuamente, mas sim em intervalos discretos. Isto pode ser feito com uma pequena modificação na *wavelet* contínua [11]:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \Rightarrow \psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a_0^{-j}|}} \psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^{-j}}{a_0^{-j}}\right), \quad (3.11)$$

em que j e k são inteiros, $a_0 > 1$ é um parâmetro de dilatação (ou compressão) fixo, b_0 é o fator de translação fixo e b depende agora do fator de dilatação.

Para se fixar o valor dos passos, tem-se:

$$a = a_0^{-j}, \quad a_0 > 1, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.12a)$$

$$b = kb_0 a_0^{-j}, \quad b_0 > 0, \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (3.12b)$$

Tradicionalmente, adota-se o caso diádico, em que a_0 e b_0 assumem os seus menores valores inteiros, isto é, $a_0 = 2$ e $b_0 = 1$. É interessante ressaltar a escolha exponencial para as escalas discretas e a escolha linear para as translações discretas. Esta escolha será elucidada na próxima seção.

Finalmente então, é possível definir uma representação em séries *wavelets* para uma função $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ [40].

Proposição 3.1 *Dada uma família de wavelets $\{\psi_{j,k}(t)\}$ que forma uma base de Riesz ortonormal de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, isto é,*

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m}(t) \rangle = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}, \quad (3.13)$$

em que $\delta_{j,k}$ é o símbolo de Kronecker, então toda função $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pode ser decomposta (decomposição homogênea) como

$$f(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (3.14)$$

em que os coeficientes wavelet são dados por

$$c_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle. \quad (3.15)$$

3.2 Análise tempo-freqüência

No campo da engenharia, os fenômenos naturais precisam ser transformados em estímulos compreensíveis, de tal forma que se possa trabalhar com eles e obter resultados desejados.

Isto é feito através de equipamentos e ferramentas matemáticas. Transformados, desta forma, em sinais mecânicos, elétricos, ou de alguma outra natureza, fenômenos naturais tornam-se tratáveis (ou processáveis).

Neste contexto, existem os sinais temporais, que dão informações sobre a variação de grandezas físicas com o tempo. Certas características destes sinais, no entanto, não são óbvias “a olho nu” e o sinal precisa ser observado por outro ângulo. Para isto, cientistas e engenheiros fazem uso de transformadas. Transformadas são operadores que, aplicados a funções matemáticas (neste caso representando sinais temporais), permitem revelar características invisíveis na representação original destas funções. A transformada de Fourier, amplamente conhecida, é, de longe, a ferramenta mais utilizada para tratamento de sinais estacionários [22].

Por exemplo, uma função $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pode ser considerada como um sinal analógico de energia finita, definido no domínio temporal. A sua transformada de Fourier representará então o seu espectro, definido no domínio freqüencial [40]. Por definição, a transformada de Fourier de um sinal $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, para uma dada freqüência contínua Ω , é o produto interno entre $f(t)$ e uma exponencial complexa $e^{j\Omega t}$. Uma forma de se entender melhor a essência desta mudança de domínio é, a partir da idéia de produto interno, considerar a transformada de Fourier de $f(t)$ como a projeção desta sobre um sinal senoidal $e^{j\Omega t}$, de freqüência Ω , isto é, a “quantidade” de $f(t)$ concentrada na freqüência Ω . Desta forma, a expressão de análise da transformada de Fourier de um sinal $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ é definida como

$$F(\Omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt. \quad (3.16)$$

Conhecendo $F(\Omega)$, é possível obter $f(t)$ usando a transformada de Fourier inversa (expressão de síntese de $f(t)$), dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega, \quad (3.17)$$

em que Ω é a freqüência contínua do sinal.

Uma outra alternativa para se entender a transformada de Fourier pode ser abordando a equação 3.16 como um cálculo de uma espécie de correlação entre o sinal $f(t)$ e uma função senoidal complexa $e^{j\Omega t}$. No entanto, como o suporte de $e^{j\Omega t}$ cobre todo o eixo real, $F(\Omega)$ depende dos valores de $f(t)$ em todos os instantes $t \in \mathbb{R}$. Isto torna difícil a análise das propriedades locais de $f(t)$, a partir de $F(\Omega)$. Com efeito, a noção temporal se perde e a expressão de $F(\Omega)$ não reflete a informação sobre a concentração das freqüências com o tempo.

Como alternativa surge então a análise tempo-freqüência, com a transformada de Fourier de curta duração (ou transformada “janelada” de Fourier, ou transformada de Gabor), proposta pelo físico Dennis Gabor² em 1946 [42]. Neste trabalho, com a ajuda do seu conhecimento em mecânica quântica, Gabor propõe a análise de sinais de áudio a partir de “átomos” elementares, que são funções de base bem localizadas em tempo e em freqüência [22], isto é, as funções e seus espectros respectivos são de pequeno valor fora de um intervalo limitado de tempo e freqüência, dentro do limite permitido pelo princípio da incerteza de Gabor-Heisenberg. De forma simplificada, este princípio (que é uma formulação do conhecido princípio da incerteza de Heisenberg) afirma que “*não é possível obter localizações precisas de uma função simultaneamente no tempo e na freqüência*”. De outra maneira, é possível dizer que “*a energia de uma função e de sua transformada de Fourier não podem estar simultaneamente concentradas em intervalos arbitrariamente pequenos*”. Assim, aplicando argumentos típicos da mecânica quântica, Gabor estabeleceu uma relação de incerteza do tipo:

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{2}, \quad (3.18)$$

em que as quantidades Δt e Δf , definidas por Gabor [42], correspondem à duração *rms* do sinal e à sua banda passante *rms*, respectivamente. Nesta expressão, a igualdade é atingida apenas e somente quando o sinal é uma gaussiana. Uma demonstração pode ser encontrada em [11].

Desta forma, introduzindo esta *decomposição atômica* de sinais, os importantes resultados de Gabor estão na base da análise tempo-freqüência.

3.2.1 A transformada de Fourier de curta duração

Como mencionado acima, a transformada de Fourier de curta duração possibilita o cálculo da variação do conteúdo freqüencial de um sinal com o tempo. Formalmente, é possível conhecer a densidade de freqüência de um sinal, de uma forma localizada no domínio do tempo.

Assim, tomando-se uma função $g(t)$, chamada janela, os “átomos” de Gabor são obtidos realizando-se uma translação de $g(t)$ em tempo e em freqüência:

$$g_{t_0, \Omega_0}(t) = g(t - t_0)e^{j\Omega_0 t}. \quad (3.19)$$

É importante comentar que a energia de $g_{t_0, \Omega_0}(t)$ está situada na vizinhança de t_0 em um

²Prêmio Nobel de Física de 1971, pela invenção e aperfeiçoamento da *holografia*.

intervalo que dependerá da função $g(t)$. Por isso, é interessante que esta função tenha boas propriedades de localização temporal.

Da mesma forma, a energia do espectro de $g(t)$ está situada na vizinhança de Ω_0 . Isto pode ser visualizado através da transformada de Fourier da função, dada por:

$$G_{t_0, \Omega_0}(\Omega) = G(\Omega - \Omega_0)e^{-j(\Omega - \Omega_0)t}. \quad (3.20)$$

O intervalo dentro do qual será concentrada a energia de $G_{t_0, \Omega_0}(\Omega)$ dependerá da função escolhida. Então, da mesma maneira que acima, boas propriedades de localização freqüencial são desejadas.

A expressão da transformada de Fourier de curta duração é então definida pelo produto interno de uma função conhecida $f(t)$ e cada átomo $g_{t_0, \Omega_0}(t)$:

$$\mathcal{F}_J\{f(t)\} = F_J(t_0, \Omega_0) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_{t_0, \Omega_0}^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - t_0)e^{-j\Omega_0 t}dt. \quad (3.21)$$

Aplicando o teorema de Parseval-Plancherel [39], é possível reescrever a expressão 3.21 da seguinte forma:

$$F_J(t_0, \Omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)G_{t_0, \Omega_0}^*(\Omega)d\Omega. \quad (3.22)$$

Então, como é possível observar, a transformada de Fourier de curta duração só depende de $f(t)$ e de $F(\Omega)$ nas vizinhanças temporal e freqüencial, respectivamente, onde $g_{t_0, \Omega_0}(t)$ e $G_{t_0, \Omega_0}(\Omega)$ estão concentradas. Sabe-se que a medida de concentração de $g(t)$ é dada por σ_t , medido pelo desvio padrão de $|g(t)|^2$, e que corresponde a um intervalo de largura σ_t , no qual $|g(t)|^2$ não é desprezível [22]. Analogamente, uma medida do espalhamento de $G(\Omega)$ é dada por σ_Ω , medido pelo desvio padrão de $|G(\Omega)|^2$. É então possível reescrever a equação 3.23. Tem-se:

$$\sigma_t \cdot \sigma_f \geq \frac{1}{2}. \quad (3.23)$$

Por outro lado, as equações 3.21 e 3.22 mostram que, se $g(t)$ possui boas propriedades de localização no tempo e na freqüência, será da mesma forma para $F_J(t_0, \Omega_0)$ (daí o interesse por átomos com estas propriedades).

É então possível decompor o plano tempo-freqüência (a transformada de Fourier de curta duração transforma o domínio temporal de uma função $f(t)$ para um domínio bidimensional, chamado domínio tempo-freqüência) em “retângulos”, onde será representado o conteúdo freqüencial de um sinal, para dados intervalos de tempo. Esta decomposição é mostrada na

Figura 3.1. Note-se que a divisão do plano por “retângulos” é apenas uma forma de facilitar a visualização, desde que estes apenas representam a maior concentração de energia e não estão precisamente definidos. Uma visualização tridimensional mais precisa pode ser vista na Figura 3.2. Com isto, é possível observar a razão pela qual o plano é dividido em retângulos.

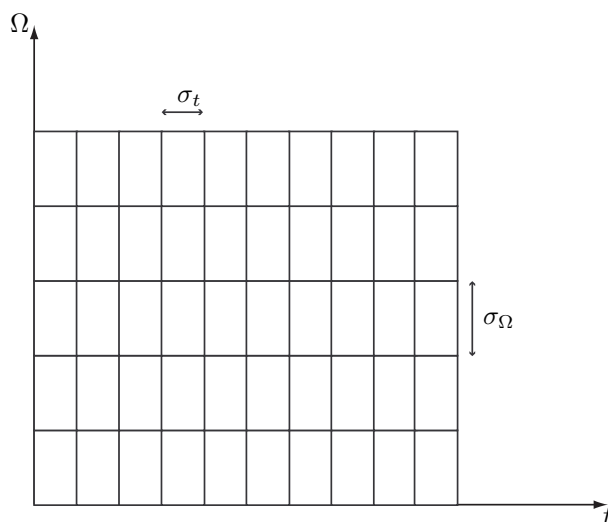


Figura 3.1: Decomposição do domínio tempo-frequência (transformada de Fourier de curta duração).

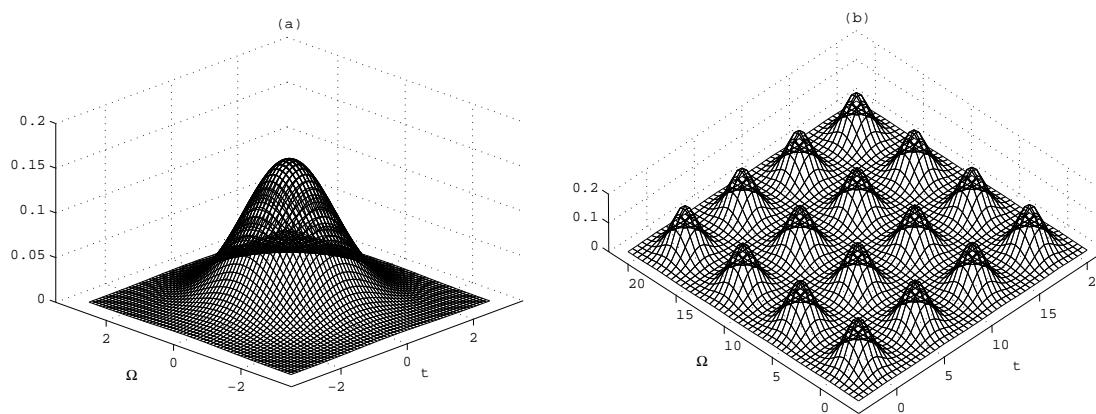


Figura 3.2: (a) Densidade de probabilidade gaussiana, (b) Decomposição do domínio tempo-frequência, utilizando a gaussiana como janela.

Como é possível ver na Figura 3.1, a medida que o tempo e a frequência aumentam, o tamanho dos retângulos permanece constante. Em outras palavras, a resolução de tempo-

freqüência permanece a mesma. Isto pode causar certos problemas na análise: na região de altas freqüências, a janela contém um número de ciclos muito maior que nas baixas freqüências. Desta forma, dependendo do sinal analisado (como sinais sísmicos, por exemplo), componentes de altas freqüências (terremotos) não são bem analisadas, pois estão “diluídas” no resto do sinal (sinal de base, de baixa freqüência), o mesmo problema que ocorre na transformada de Fourier tradicional. De forma análoga, para freqüências muito baixas, ou seja que variam muito lentamente, a janela não tem “tempo” suficiente para analisar o sinal.

Para resolver este problema, a solução é analisar o sinal não com uma única resolução tempo-freqüência, mas com resoluções diferentes, dependendo da faixa de freqüências analisada. Uma colaboração entre o físico teórico Alex Grossmann e o engenheiro geofísico Jean Morlet resultou na definição formal de uma nova transformada que, como a transformada de Fourier de curta duração, permite medir as variações temporais das componentes freqüenciais de um sinal, mas com uma resolução tempo-freqüência diferente: a transformada *wavelet* contínua [16].

3.2.2 A transformada *wavelet* contínua

À semelhança das transformadas vistas anteriormente, a transformada *wavelet* contínua de uma função $f(t)$ também é obtida calculando o produto interno entre $f(t)$ e outra função. Desta vez, no entanto, a função é uma *wavelet*, $\psi(t)$. De uma forma semelhante à transformada de Fourier de curta duração, $\psi(t)$ sofre deslocamento; aqui, no entanto, não se fala mais em modulação de $\psi(t)$ (ou deslocamento na freqüência) e sim em escalonamento: $\psi(t)$ é então escalonada por um parâmetro de escala a e deslocada por um parâmetro b , resultando em

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}. \quad (3.24)$$

É fácil reconhecer a equação 3.9. Da mesma forma, foi introduzida uma constante de normalização à *wavelet*, de tal forma que $\|\psi_{a,b}(t)\|^2 = \|\psi(t)\|^2$. A expressão para a transformada *wavelet* contínua é então, para a escala a e na posição b ,

$$CWT(b, a) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (3.25)$$

Utilizando o teorema de Parseval-Plancherel, é possível reescrever a equação 3.25 da forma seguinte:

$$CWT(b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \Psi_{a,b}^*(\Omega) d\Omega, \quad (3.26)$$

onde a transformada de Fourier de $\psi_{a,b}(t)$ pode ser calculada, resultando em

$$\Psi_{a,b}(\Omega) = e^{-j\Omega b} \sqrt{a} \Psi(a\Omega). \quad (3.27)$$

Neste ponto, cabe comentar certos aspectos da análise. O que se tem aqui é uma única função (a *wavelet-mãe*) sendo deslocada e escalonada (obtendo *wavelets-filhas*). Como é possível observar na equação 3.25, o deslocamento é semelhante ao deslocamento da janela na transformada de Fourier de curta duração, isto é, linear. Por outro lado, a *wavelet* não é mais modulada e sim escalonada. O que difere da transformada de Fourier de curta duração é a idéia de que um reescalonamento no tempo implica em um reescalonamento na frequência. Isto resulta em uma janela de largura diferente para faixas de frequências diferentes.

Por isso, observando as equações 3.25 e 3.26, é possível concluir que a transformada *wavelet* de uma função $f(t)$ dependerá essencialmente de $f(t)$ e de $F(\Omega)$, apenas nas vizinhanças onde $\psi_{a,b}(t)$ e $\Psi_{a,b}(\Omega)$ estão respectivamente concentradas.

O plano tempo-frequência é agora decomposto de outra forma. Com efeito, a concentração de $\psi_{a,b}(t)$ na frequência é agora proporcional ao parâmetro a (uma compressão no tempo equivale a uma dilatação na frequência). Reciprocamente, a concentração no tempo é proporcional a $1/a$. Assim, é notável que mesmo que a escala a varie, as dimensões do retângulo onde se encontram as informações relativas ao sinal, para faixas de frequências e períodos de tempo específicos, permanecem constantes. A Figura 3.3 ilustra a decomposição do plano tempo-frequência, utilizando a transformada Wavelet contínua.

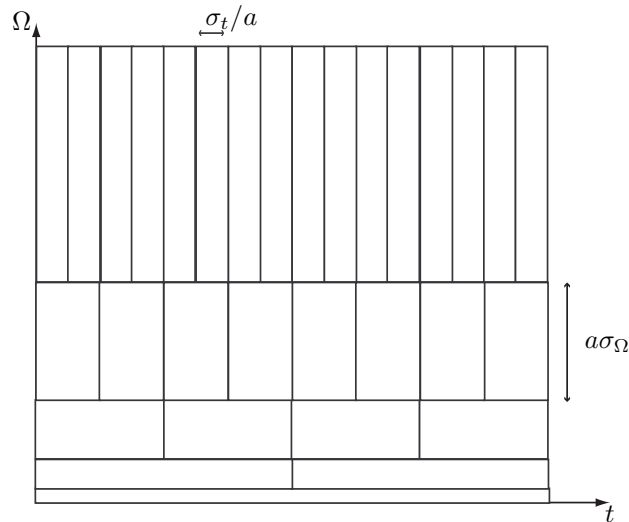


Figura 3.3: Decomposição do domínio tempo-frequência (transformada wavelet contínua).

Esta decomposição não uniforme do plano tempo-freqüência permite à transformada *wavelet* contínua analisar faixas de freqüências diferentes de forma adequada: para as baixas freqüências, a resolução da transformada é mais sintonizada, ou seletiva em freqüência. A janela de tempo também é maior. Para freqüências maiores, a resolução vai se tornando mais fina.

Para entender este conceito, é possível imaginar dois moduladores de freqüência. O primeiro modula sinais em torno de $100Hz$ e o segundo de $1MHz$. Supondo uma deriva no oscilador local de $10Hz$, é fácil compreender como esta mudança na freqüência do oscilador afeta muito mais o primeiro oscilador que o segundo, sendo para este, uma mudança relativa muito menor. O mesmo acontece para análise de sinais. Componentes espectrais de baixa freqüência variam lentamente e precisam de janelas de tempo maiores para serem analisadas. Entretanto, é necessário uma maior seletividade na freqüência. Para faixas espectrais maiores, que variam rápido, o tempo da janela torna-se menor e a faixa freqüencial de análise maior.

Contudo, como já visto na seção 3.1, as *wavelets* são altamente redundantes na sua forma contínua, dentro do contexto da decomposição de funções.

3.2.3 A transformada wavelet discreta

Tradicionalmente, uma forma de reduzir a redundância é discretizando-se os parâmetros a e b , como visto na seção 3.1. Obtém-se, com isto, a transformada *wavelet* discreta de tempo contínuo (CTDWT). Do ponto de vista computacional e de implementação, transformadas discretas são mais interessantes que transformadas contínuas, pois não precisam de um número infinito de translações e escalonamentos. A expressão da CTDWT, de acordo com as expressões 3.11 e 3.12, da seção 3.1, é então:

$$CTDWT(k, j) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}^*(t) dt = \frac{1}{\sqrt{a_0^{-j}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t - kb_0 a_0^{-j}}{a_0^{-j}}\right) dt, \quad (3.28)$$

em que os valores da CTDWT, para j e k dados, são os coeficientes *wavelet* discretos, $j, k \in \mathbb{Z}$, $a_0 > 1$ e $b_0 > 0$.

No caso em que o sinal f é de tempo discreto, tem-se que as *wavelets-filhas* serão definidas apenas em argumentos inteiros. Desta forma, obtém-se a expressão da transformada *wavelet* discreta de tempo discreto, abreviada por *DWT*. A sua expressão é mostrada a seguir:

$$DWT(k, j) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \psi_{j,k}^*[n] = \frac{1}{\sqrt{a_0^{-j}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \psi^*\left[\frac{n - kb_0 a_0^{-j}}{a_0^{-j}}\right], \quad (3.29)$$

em que $j, k \in \mathbb{Z}$, $a_0 > 1$ e $b_0 > 0$.

Tomando-se o caso diádico, mais usual, em que $a_0 = 2$ e $b_0 = 1$, obtém-se a construção mais simples para a representação *wavelet* de um sinal [19]. Como é possível ver na Figura 3.4, os coeficientes wavelets passam a formar uma grade reticulada no domínio tempo-freqüência (Figura 3.4a) ou no domínio tempo-escala (Figura 3.4b). Os pontos do reticulado representam os diferentes coeficientes dados pelo conjunto $\Delta_{a_0, b_0} = \{a_0^{-j}, k a_0^{-j} b_0\}$, em que $j, k \in \mathbb{Z}$. No caso diádico, tem-se que $\Delta_{2,1} = \{2^{-j}, k \cdot 2^{-j}\}$, em que $j, k \in \mathbb{Z}$. A grade é indexada pelos inteiros j e k , onde j está associado aos passos no parâmetro freqüência/escala e k , aos passos no parâmetro translação [41].

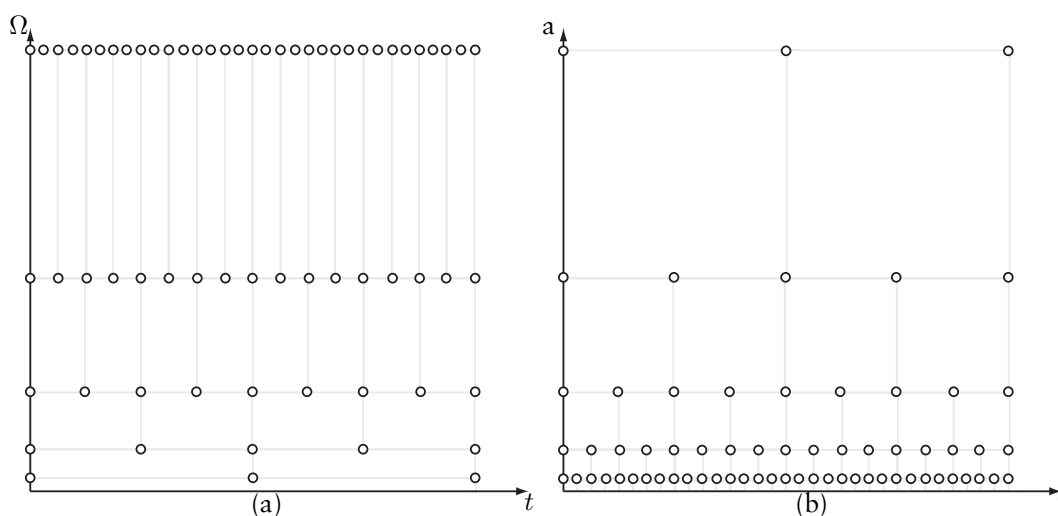


Figura 3.4: Reticulado diádico (a) tempo-freqüência, (b) tempo-escala.

A partir da expressão da transformada *wavelet* discreta e do mapeamento da Figura 3.4, pode-se observar que à medida que a escala aumenta, isto é, que a freqüência diminui, a quantidade de coeficientes *wavelet* para representar o sinal naquela escala é reduzida à metade em relação à escala anterior. Com isso pode-se afirmar que à medida que o parâmetro escala aumenta, o intervalo de amostragem aumenta por um fator de 2. Conseqüentemente, a freqüência com que o sinal é amostrado diminui à metade, em relação à que foi utilizada na escala anterior [41]. Isto acontece naturalmente, pois o fator de escalonamento, de uma escala para outra, é igual a 2.

Esta representação é semelhante à representação pela transformada *wavelet* contínua, na qual o plano tempo-freqüência é dividido de forma não uniforme. Neste caso, no entanto, obtém-se uma representação mais eficiente do sinal, pois apenas alguns valores, tomados na

representação contínua e redundante do plano tempo-freqüência, são suficientes para representar perfeitamente o sinal original. Estes pontos formam um reticulado e estão localizados de acordo com o mostrado na Figura 3.4.

3.3 Algumas *wavelets*

Nesta seção, serão rapidamente comentadas algumas funções que podem ser escolhidas como *wavelets-mãe*. Em alguns casos, a apresentação envolve a função escala, relacionada com a *wavelet*; detalhes sobre esta função serão apresentados mais tarde neste texto. Esta função escala é por vezes referida como *wavelet-pai* [11].

Antes de começar a descrição das *wavelets* propriamente ditas, no entanto, cabe definir alguns termos de uso corrente.

Definição 3.2 (suporte) *O suporte de uma função f é o menor conjunto fechado S de argumentos de f fora do qual f é idênticamente igual a zero [43].*

Corolário 3.1 (suporte compacto) *A função f possui suporte compacto se o conjunto S é limitado e fechado [44].*

Definição 3.3 (suporte efetivo) *O suporte efetivo de uma função é definido como o menor intervalo dentro do qual está concentrada 90% da energia da função.*

3.3.1 *Wavelet de Haar*

A *wavelet* de Haar é o exemplo mais simples e mais antigo de *wavelet*. Ela possui suporte compacto e é definida como a seguir

$$\psi_H(t) \triangleq \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.30)$$

A *wavelet* de Haar pode ser utilizada como base para a representação de sinais com descontinuidades, tais como imagens contendo fronteiras pronunciadas (mudanças abruptas de luminância); nestes casos, a análise e síntese de Fourier não são muito apropriadas para acomodar os termos de alta freqüências, os quais não têm efeitos localizados nesta análise [11].

A *wavelet* é ilustrada na Figura 3.5.

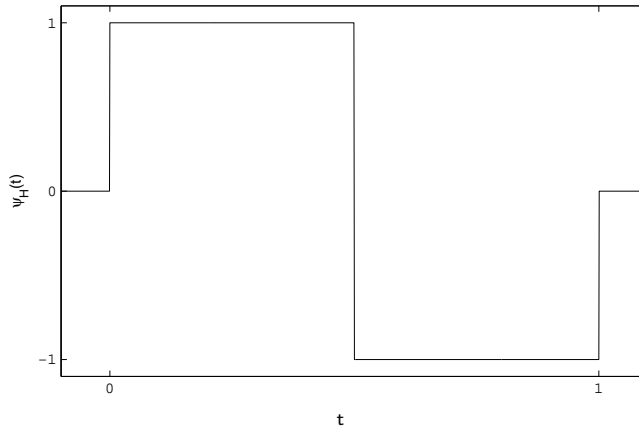


Figura 3.5: *Wavelet de Haar.*

3.3.2 *Wavelet Chapéu Mexicano*

A *wavelet* “chapéu mexicano”, ou *wavelet* “sombbrero” (ver Figura 3.6), é definida como a segunda derivada da densidade de probabilidade gaussiana $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$. Desta forma, esta *wavelet* tem uma expressão analítica tal que $\psi_{mex}(t) \triangleq c \cdot \rho''(t)$, onde a constante c normaliza a *wavelet*, de tal maneira que $\|\psi_{mex}(t)\|^2 = 1$. Então,

$$\psi_{mex}(t) \triangleq c \cdot \rho''(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3}} \cdot (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (3.31)$$

A *wavelet* “sombbrero” não possui suporte compacto, seu suporte efetivo sendo o intervalo $[-5, 5]$. Ela é ilustrada na Figura 3.6.

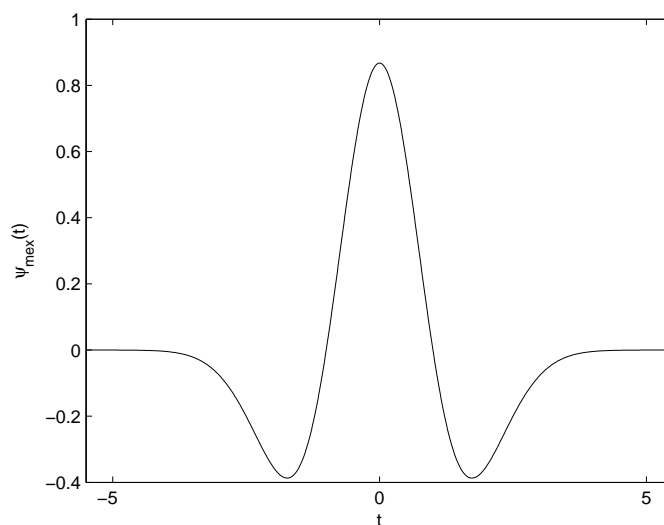


Figura 3.6: *Wavelet Sombbrero.*

3.3.3 Wavelets de Daubechies

As *wavelets* de Daubechies de ordem N , $\psi_{Daub}^{(N)}(t) = dbN$, possuem características interessantes por serem ortogonais, de suporte compacto e diferenciáveis. É interessante destacar que até 1987, na teoria de *wavelets* não se tinha conhecimento de uma família de *wavelets* com tais características [45]. As *wavelets* de Meyer e de Battle-Lemarié são ortogonais, porém não possuem suporte compacto; por outro lado, as *wavelets* de Haar são ortogonais e de suporte compacto, mas não são diferenciáveis.

Como é possível se inferir da Figura 3.7, a regularidade das *wavelets* aumenta com N , a custo de um intervalo maior para o suporte. Este suporte é o intervalo $[1 - N, N]$ [19].

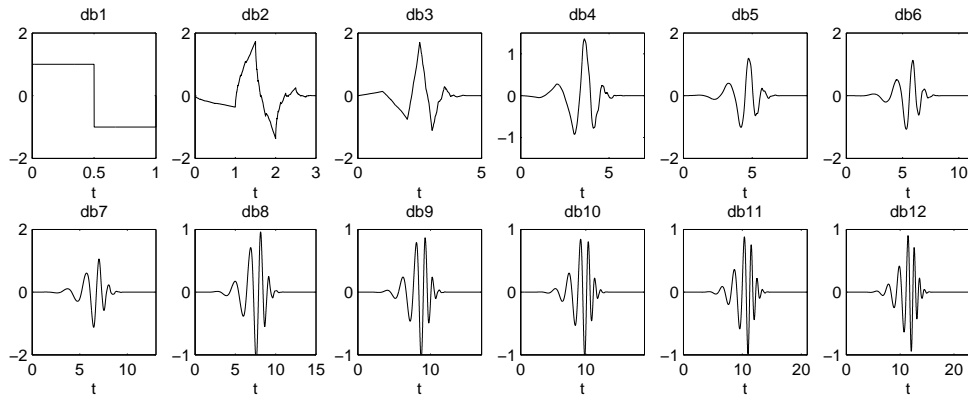


Figura 3.7: Wavelets de Daubechies de ordem N (dbN), $N = 1, 2, \dots, 12$.

Note-se como a *wavelet* $db1$ é igual à *wavelet* de Haar. Também vale a pena ressaltar que as *wavelets* de Daubechies não possuem expressão analítica, como quase todas as *wavelets* de suporte compacto (com a exceção da *wavelet* de Haar e a *wavelet* Beta [46]). Elas são geradas a partir de um algoritmo iterativo, o algoritmo em cascada [10].

3.3.4 Wavelet complexa de Shannon

A *wavelet* complexa de Shannon possui um espectro real, descrito por uma função porta. Ela possui expressão analítica, dada a seguir:

$$\psi_{Shan}(t) \triangleq \sqrt{f_b} \cdot \text{sinc}(f_b t) \cdot e^{j2\pi f_c t}, \quad (3.32)$$

em que o parâmetro f_b ajusta a largura de banda utilizada pela *wavelet* e o parâmetro f_c determina a frequência central. A função $\text{sinc}(t)$ na equação 3.32 é definida como

$$\text{sinc}(t) \triangleq \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t} \quad (3.33)$$

A Figura 3.8 ilustra esta *wavelet*.

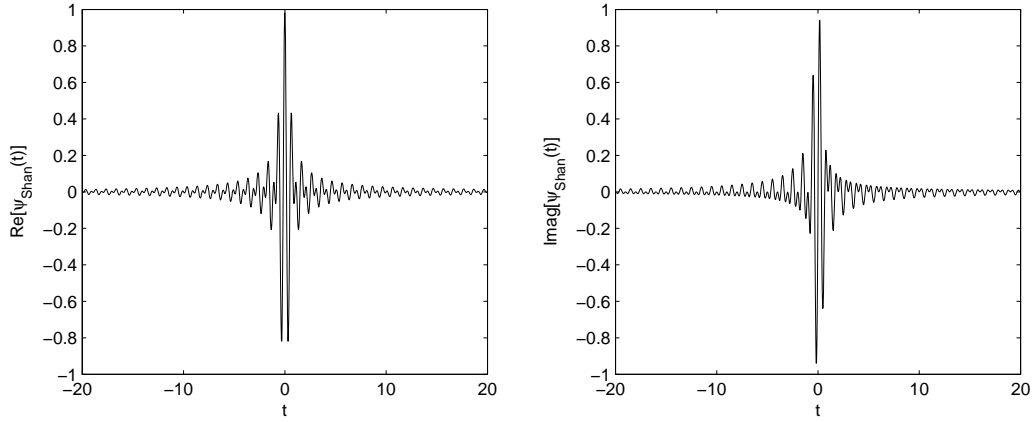


Figura 3.8: *Wavelet complexa de Shannon (partes real e imaginária), $f_c = 1$, $f_b = 1, 5$.*

3.3.5 *Wavelet complexa de Morlet*

As *wavelets* de Morlet foram introduzidas em 1984 [11] e tinham por finalidade a análise de sinais geofísicos. Possuem expressão analítica complexa, dada por

$$\psi_{Mor}(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{\pi f_c}} \cdot e^{j2\pi f_c t} \cdot e^{-\frac{t^2}{f_b}}, \quad (3.34)$$

em que o parâmetro f_b ajusta a largura de banda utilizada pela *wavelet* e o parâmetro f_c determina a frequência central. Curiosamente, estas *wavelets* não são *wavelets* no sentido rigoroso, pois o valor da sua integral ao longo do eixo real não é zero. No entanto, para valores de f_c suficientemente grandes, o valor da integral é desprezível e pode ser considerado igual a zero. A expressão exata para a *wavelet* de Morlet é

$$\psi(u) = C e^{-j\omega_0 u} (e^{-u^2/2} - \sqrt{2} e^{-\omega_0^2/4} e^{-u^2}), \quad (3.35)$$

em que C e ω_0 são constantes [47].

A *wavelet* complexa de Morlet não possui suporte compacto e sua envoltória é gaussiana, sua principal característica. Ela é ilustrada na Figura 3.9.

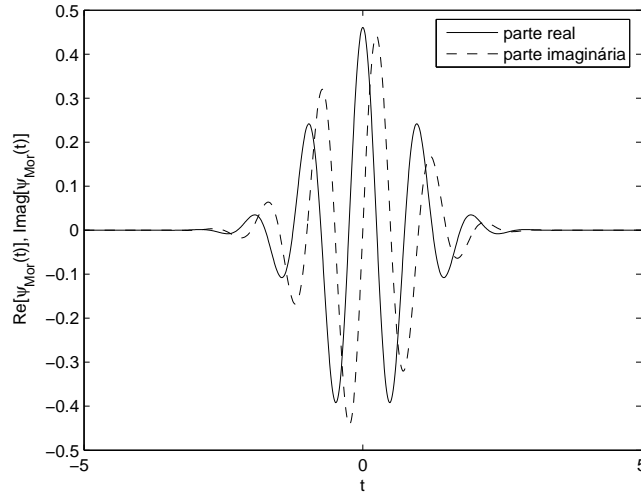


Figura 3.9: Wavelet complexa de Morlet (partes real e imaginária), $f_c = 1$, $f_b = 1, 5$.

3.3.6 Wavelets gaussianas

As *wavelets* gaussianas de ordem n , $\psi_{gauss}^{(n)}(t)$, são as derivadas de ordem n da densidade de probabilidade gaussiana, multiplicadas por um fator de normalização. As *wavelets* gaussianas não possuem suporte compacto (suporte efetivo no intervalo dentro do $[-5, 5]$) e não são ortogonais. Na Figura 3.10, alguns exemplos de *wavelets* gaussianas. Um caso particular, já citado, é a *wavelet* sombrero.

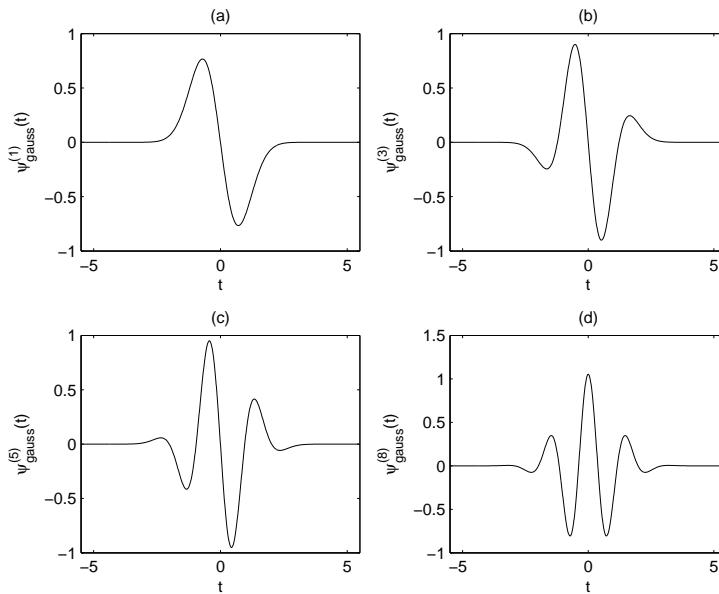


Figura 3.10: Wavelets gaussianas de ordem (a) $n = 1$, (b) $n = 3$, (c) $n = 5$ e (d) $n = 8$.

Além das famílias de *wavelets* comentadas anteriormente, existe uma quantidade enorme de tipos de *wavelets*, como *wavelets* generalizadas de Shannon, *wavelet* de Meyer, *wavelets* lineares por partes, *wavelet* complexa de Chaaris, Coiflets e Symmlets, *wavelet* de Battle-Lemarié ou *wavelets* B-Splines. Existem também *wavelets* bidimensionais. Uma descrição mais detalhada destas *wavelets* pode ser encontrada em [11].

CAPÍTULO 4

ANÁLISE MULTIRRESOLUÇÃO

*Où finit le télescope, le microscope commence.
Lequel des deux a la vue la plus grande?*

— Victor Hugo

O conceito de resolução, no sentido do entendimento dos efeitos de mudança de escala, tem se revelado uma ferramenta fundamental na interpretação das *wavelets*, tanto do ponto de vista matemático como prático. As *wavelets* permitem construir bases de Riesz do espaço de sinais de quadrado integrável $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Uma construção elegante e interessante para implementação é a *análise multirresolução* (AMR), introduzida por Stéphane Mallat¹ em 1989 [18].

A AMR permite construir bases completas no espaço $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, de forma recursiva, a partir de uma única função: a função escala ou a *wavelet-mãe*. Desta forma, é possível observar como esta formulação é útil na representação de funções. Com efeito, a operação básica da AMR é a decomposição de um dado sinal, $f(t)$, em duas partes: aproximação e detalhe. A aproximação é obtida realizando-se a projeção de $f(t)$ sobre versões deslocadas de uma função de “baixa frequência”, chamada função escala². Esta projeção realiza uma filtragem passa-baixa, que só armazena as variações lentas do sinal. De forma análoga, os detalhes de

¹Stéphane G. Mallat (1962–). Engenheiro francês, professor da Ecole Polytechnique, França.

²Alguns autores adotam a nomenclatura *wavelet-pai* para se contrapor a *wavelet-mãe*.

$f(t)$ são obtidos realizando-se a sua projeção sobre uma função de alta frequência, a *wavelet*. Esta projeção realiza uma filtragem passa-alta, que armazena as altas frequências, isto é, as variações rápidas do sinal.

Se desejado, o sinal de aproximação é em seguida decomposto novamente na sua aproximação e nos seus detalhes. E assim por diante. Os detalhes, nas diferentes escalas, fornecem as componentes de $f(t)$ em diferentes resoluções. Daí, a denominação de análise multirresolução. Estas diferentes operações levam a um preenchimento sucessivo do plano tempo-frequência. É possível interpretar a AMR como um *microscópio matemático*, que permite a visualização do sinal com diferentes graus de resolução.

Estas operações são contudo reversíveis, isto é, o sinal pode ser reconstruído a partir da aproximação e dos detalhes, se algumas restrições matemáticas forem impostas. A reconstrução é possível a partir dos coeficientes de detalhe nas diferentes escalas e da última aproximação.

Outro aspecto de interesse na AMR é a flexibilidade com a qual se pode trabalhar, graças ao fato de que estas múltiplas bases em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ podem ser colocadas em concorrência para determinar a base mais adequada a um sinal ou a um processamento dado. Esta comparação permite, então, a realização de diferentes processamentos na tentativa de otimizar efeito como, por exemplo, redução de ruído ou detecção de transitórios.

Este capítulo descreverá os rudimentos da AMR, tratando de proporcionar um entendimento intuitivo do desenvolvimento destas idéias, assim como um tratamento matemático um pouco mais rigoroso. O capítulo é então dividido em três seções. Na primeira, são mostrados aspectos matemáticos da AMR; nela, são introduzidos os espaços de sinal, a função escala e o conceito de construção de *wavelets*. Na segunda seção, são apresentados os bancos de filtros e é mostrado o algoritmo de Mallat, que pode ser visto como um método piramidal de Laplace, muito útil e elegante na implementação da AMR. Na terceira seção, finalmente, são mostrados alguns exemplos e aplicações da AMR.

4.1 Aspectos matemáticos preliminares

Nesta seção, são tratados os *espaços de funções*, que por serem espaços vetoriais (de dimensão infinita), são gerados por bases. Estas bases são formadas por funções. É também definido o *produto interno* de funções, de forma semelhante ao capítulo 3. Aqui, o produto interno entre

duas funções, $f(t)$ e $g(t)$, é definido como

$$\langle f(t), g(t) \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)^* dt. \quad (4.1)$$

O produto interno também induz uma norma, igual à equação 3.10, isto é,

$$\|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t)^* dt. \quad (4.2)$$

Finalmente, duas funções de norma diferente de zero são ditas serem ortogonais se o seu produto interno é igual a zero.

O espaço de funções de interesse é o espaço das funções de quadrado integrável, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

4.1.1 A função escala e espaços de aproximação

O princípio fundamental da AMR é a decomposição formal de sinais em escalas. Dito de outra forma, a AMR pode ser vista como uma representação aproximada de sinais em diferentes resoluções. Rigorosamente, o sinal será analisado, para cada resolução, dentro de espaços de funções diferentes. São assim geradas aproximações sucessivas, cada vez mais próximas do sinal original, à medida que o espaço de funções utilizado para a representação se torna mais sofisticado. Estes espaços de funções são referidos como *espaços de aproximação*.

Para poder utilizar a idéia de multirresolução, é preciso primeiramente definir a *função escala*³. Seja então uma função escala $\varphi(t)$ e um conjunto de versões deslocadas de $\varphi(t)$, tais que

$$\varphi_k(t) = \varphi(t - k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}). \quad (4.3)$$

As funções mostradas acima geram um subespaço fechado de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, chamado de \mathcal{V}_0 . Desta forma, o conjunto de funções $\{\varphi_k(t)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, é uma base de \mathcal{V}_0 ; é então possível representar todo $f(t) \in \mathcal{V}_0$ da forma

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi(t - k). \quad (4.4)$$

Com isto, é possível observar como se pode representar uma dada classe de sinais, pertencente a algum subespaço de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Uma definição formal de $\varphi(t)$ é enunciada abaixo.

³Esta função possui um papel fundamental na AMR, pois ela define univocamente a multirresolução que ela gera.

Definição 4.1 (função escala) *Seja uma função $\varphi(t)$, de norma limitada, pertencente ao subespaço $\mathcal{V}_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Se o conjunto das suas versões deslocadas*

$$\varphi_k(t) = \varphi(t - k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

*forma uma base de \mathcal{V}_0 , então $\varphi(t)$ é chamada de **função escala**.*

É possível englobar uma quantidade maior de sinais, aumentando o “tamanho” do subespaço. Uma forma de se fazer isto é comprimindo as funções escala do subespaço já conhecido. Escolhendo um fator de escala igual a 2^j e mantendo constante a norma das funções, obtém-se um conjunto de funções tais que

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

O conjunto de funções $\{\varphi_{j,k}(t)\}$, para j dado e $k \in \mathbb{Z}$, geram o subespaço de funções \mathcal{V}_j . Assim, para todo $f(t) \in \mathcal{V}_j$, para um dado j , é possível escrever

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi(2^j t - k). \quad (4.6)$$

Para $j > 0$, estas funções geram subespaços de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ maiores que \mathcal{V}_0 e, portanto, permitem representar uma classe de funções mais abrangente. Isto pode ser entendido pelo fato de que, para $j > 0$, $\varphi_{j,k}(t)$ é mais estreita e avança a passos menores, devido aos deslocamentos; isto permite que as funções de base representem variações mais rápidas dentro dos sinais, mais precisamente. De forma análoga, para $j < 0$, os subespaços gerados estão incluídos em \mathcal{V}_0 e representam funções menos sofisticadas [10].

Estes conceitos proporcionam uma idéia intuitiva destes subespaços de funções e de como as suas bases geradoras são capazes de representar e aproximar sinais. É importante entender a maneira como os subespaços estão organizados. Como foi mencionado, tem-se que

$$\mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (4.7)$$

ou,

$$\cdots \subset \mathcal{V}_{-2} \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_3 \subset \cdots \quad (4.8)$$

Pode então ser observado que, no limite,

$$\mathcal{V}_{-\infty} = \{0\}, \quad (4.9a)$$

$$\mathcal{V}_{\infty} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}). \quad (4.9b)$$

A Figura 4.1 ilustra de forma simples a organização dos subespaços de aproximação. A partir das equações 4.9, torna-se então fácil de entender: à medida que j tende ao infinito positivo, o subespaço gerado tende a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e à medida que j tende ao infinito negativo, o subespaço gerado tende a 0. Assim, a única função que pode ser bem representada em todos os subespaços é a função nula.

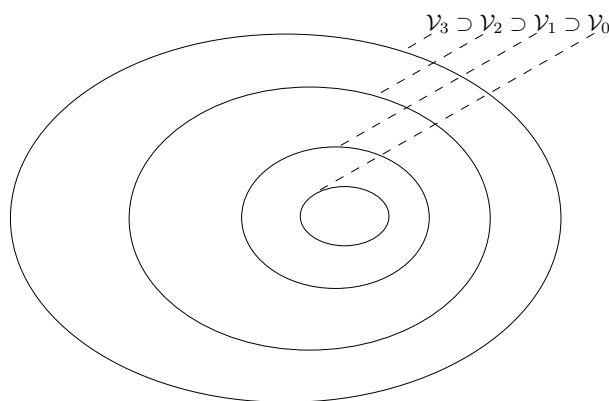


Figura 4.1: Espaços vetoriais gerados por funções escala. Observe-se o “aninhamento” dos espaços de aproximação.

Existem, no entanto, uma série de espaços “aninhados” que satisfazem às equações 4.9a e 4.9b, como na Figura 4.1, que nada têm a ver com multirresolução. O aspecto fundamental da multirresolução decorre da condição de escalonamento:

$$f(t) \in \mathcal{V}_j \Leftrightarrow f(2t) \in \mathcal{V}_{j+1}, \quad (4.10)$$

que diz que os elementos de um espaço de funções são versões escalonadas dos elementos do espaço vizinho. É também possível escrever a equação 4.10 da seguinte forma:

$$f(t) \in \mathcal{V}_j \Leftrightarrow f(2^{-j}t) \in \mathcal{V}_0. \quad (4.11)$$

Isto é, todos os subespaços são versões escalonadas do espaço central \mathcal{V}_0 [19].

Desta forma, a partir das informações acima, é possível enunciar uma definição formal da AMR [48].

Definição 4.2 (Análise multirresolução) Uma análise multirresolução em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ consiste em uma seqüência de subespaços fechados \mathcal{V}_j , $j \in \mathbb{Z}$, de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- i. $\mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j+1}$, $\forall j$;
- ii. $\forall f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e $j \in \mathbb{Z}$, $f(t) \in \mathcal{V}_j \Leftrightarrow f(2t) \in \mathcal{V}_{j+1}$;

- iii. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_j = \{0\}$;
- iv. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_j} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, onde a barra superior indica fechamento (união incluindo as fronteiras);
- v. existe uma função $\varphi(t) \in \mathcal{V}_0$, tal que o conjunto $\{\varphi(t-k); k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de \mathcal{V}_0 . Esta função, $\varphi(t)$, é a função escala.

Vale a pena comentar que, na realidade, estas condições são, de certa forma, redundantes. Com efeito, pode ser demonstrado [19] que a propriedade (iii.) é uma consequência das condições (i.), (ii.) e (v.) e poderia ser suprimida.

De acordo com a Figura 4.1, é facilmente observável que, se $\varphi(t) \in \mathcal{V}_0$, então $\varphi(t) \in \mathcal{V}_1$. Mas, como visto acima, o espaço de aproximação \mathcal{V}_1 é gerado pelo conjunto de funções $\{\varphi_{1,k}(t)\}$, em que $k \in \mathbb{Z}$ e $\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k)$. Logo, $\varphi(t)$ pode ser representada como uma soma de versões deslocadas e escalonadas dela mesma. Então, existe uma seqüência $g[n]$, tal que

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n] \sqrt{2} \varphi(2t - n), \quad (4.12)$$

em que os valores de $g[n]$ são tais que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g[n]|^2 < +\infty$. Os coeficientes de $g[n]$ formam uma seqüência de números reais ou complexos e são chamados de *coeficientes do filtro de escala* ou de *vetor de escalonamento* [11].

A equação 4.12 é a equação principal da AMR e é fundamental para a teoria das funções de escalonamento. Ela é referida por vários nomes, que descrevem diferentes interpretações e pontos de vista. É chamada de *equação de refinamento*, *equação de dilatação* ou *equação da AMR* [10].

4.1.2 Os espaços de detalhes e a construção de wavelets

Existe uma outra forma de representar sinais de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, que consiste em utilizar como base um conjunto de funções que gera o espaço de funções resultante da diferença entre dois espaços de aproximação vizinhos, \mathcal{V}_j e \mathcal{V}_{j+1} , e não o conjunto de funções escala dentro dos subespaços de funções \mathcal{V}_j . O espaço gerado é denotado por \mathcal{W}_j e é chamado de *espaço wavelet* ou *espaço de detalhes*.

Esta maneira de decompor sinais de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ foi proposta por Mallat em 1989 [18]. Segundo Mallat, esta decomposição define uma representação multirresolução completa e ortogonal, chamada de *representação wavelet*. De fato, as funções que geram estes espaços são *wavelets*,

denotadas $\psi_{j,k}(t)$, discutidas no capítulo 3. Esta representação pode ser utilizada, não apenas para representar sinais, mas também para a construção de bases de *wavelets* ortogonais⁴.

De forma rigorosa, um espaço de detalhes, \mathcal{W}_j , é definido como sendo o complemento ortogonal de \mathcal{V}_j em \mathcal{V}_{j+1} [48]. Tem-se então,

$$\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j, \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (4.13)$$

em que \oplus denota a ortogonalidade das funções pertencentes aos respectivos subespaços \mathcal{V}_j e \mathcal{W}_j . O conjunto de *wavelets* $\{\psi_{j,k}(t)\}$, para um dado j e $k \in \mathbb{Z}$, é uma base de \mathcal{W}_j . De fato, é possível mostrar [48] que, para cada $j \in \mathbb{Z}$, existe uma base ortonormal de *wavelets* $\{\psi_{j,k}(t)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, do subespaço \mathcal{W}_j . Além disto, para os subespaços de detalhes, também aparecem a condição de escalonamento e de invariância ao deslocamento,

$$g(t) \in \mathcal{W}_j \Leftrightarrow g(2^{-j}t) \in \mathcal{W}_0, \quad (4.14)$$

$$g(t) \in \mathcal{W}_j \Leftrightarrow g(t-k) \in \mathcal{W}_j, \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (4.15)$$

Por outro lado, à diferença dos espaços de aproximação, que são aninhados, os espaços de detalhes são essencialmente disjuntos. A Figura 4.2 ilustra de forma simples a organização dos subespaços de funções *wavelet*.

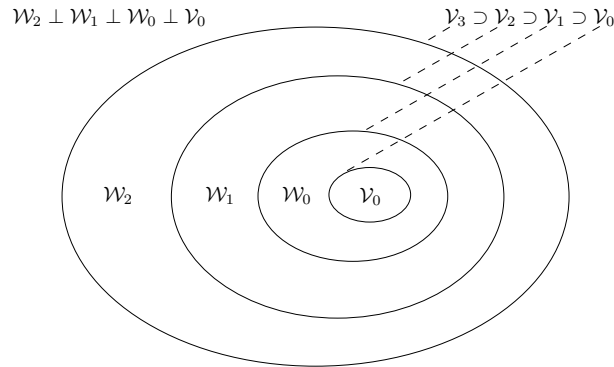


Figura 4.2: Subespaços de funções *wavelet*. Note-se a ortogonalidade entre os subespaços.

Na figura, é possível observar a ortogonalidade entre as funções de cada espaço. Isto significa que *wavelets* que se encontram em subespaços diferentes são ortogonais; ou, de acordo com a equação 4.1,

$$\langle \psi_{j,k}(t), \psi_{l,m}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{l,m}(t) dt = 0, \quad (4.16)$$

⁴Este método permite construir a maioria das *wavelets* ortogonais.

para $j \neq l$ e $j, k, l, m \in \mathbb{Z}$. Na realidade, o resultado acima implica, com já foi dito, que *wavelets* em diferentes escalas sejam ortogonais. Isto não significa, no entanto, que duas *wavelets* na mesma escala o sejam. Desta forma, duas *wavelets* ortogonais em escalas diferentes, mas não na mesma escala, são chamadas de *semi-ortogonais*. *Wavelets* ortogonais, por sua vez, possuem um grande interesse, pois constituem uma base ortonormal do seu espaço de sinais, o que facilita a inversão de transformações realizadas dentro deste espaço.

O resultado acima também vale para funções escalas e *wavelets*, para valores adequados dos índices. Assim,

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \psi_{j,m}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j,k}(t) \psi_{j,m}(t) dt = 0, \quad (4.17)$$

em que $j, k, m \in \mathbb{Z}$.

Por outro lado, tendo em mente a equações 4.8 e 4.13, pode-se escrever

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0. \quad (4.18)$$

Como, da mesma forma, $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{W}_1$, tem-se

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1. \quad (4.19)$$

Por indução, chega-se à forma geral

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \dots \quad (4.20)$$

Note-se que foi utilizado o índice $j = 0$, como espaço inicial de aproximações. É possível, no entanto, utilizar qualquer índice inicial, podendo eliminar qualquer espaço de aproximação e obtendo a expressão

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \dots \oplus \mathcal{W}_{-2} \oplus \mathcal{W}_{-1} \oplus \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \dots \quad (4.21)$$

De um ponto de vista prático, foi visto que o espaço \mathcal{V}_j representa uma aproximação de um sinal $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Esta aproximação pode ser melhor ou pior, dependendo do valor de j . Se o mesmo $f(t)$ for representado no espaço \mathcal{V}_{j+1} , a aproximação será melhor. Desta forma, com o auxílio da equação 4.13, fica claro que o espaço \mathcal{W}_j representa os detalhes de $f(t)$, que aparecem em \mathcal{V}_{j+1} e não em \mathcal{V}_j ⁵.

Do seu lado, as *wavelets* que geram os respectivos espaços \mathcal{W}_j podem ser representadas por uma soma de versões deslocadas e escalonadas da função escala, $\varphi(t)$, que gera o espaço

⁵Daí, o nome *espaços de detalhes*.

de aproximação inicial. Com efeito, a Figura 4.2 mostra claramente que, se $\psi(t) \in \mathcal{W}_0$, então $\psi(t) \in \mathcal{V}_1$. Mas, como visto acima, o espaço de aproximação \mathcal{V}_1 é gerado pelo conjunto de funções $\{\varphi_{1,k}(t)\}$, em que $k \in \mathbb{Z}$ e $\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k)$. Então, existe uma seqüência $h[n]$, tal que

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\sqrt{2}\varphi(2t - n), \quad (4.22)$$

em que os valores de $h(n)$ são tais que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|^2 < +\infty$. Além disto, as restrições impostas, por definição, aos espaços de detalhes e a sua ortogonalidade com os espaços de aproximação resultam em uma relação entre os coeficientes de $g[n]$ e $h[n]$, tal que

$$h[n] = (-1)^n g[1 - n]. \quad (4.23)$$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrado em [10]. A *wavelet* gerada é chamada de *wavelet-mãe*; as *wavelets-filhas*, $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, são construídas a partir de escalonamentos e deslocamentos da $\psi(t)$.

É então possível, de forma semelhante à seção anterior, representar um sinal $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ em função dos conjuntos respectivos de funções escala e *wavelets*. Assim, de acordo com a equação 4.20, os conjuntos de funções $\{\varphi_{0,k}(t)\}$ e $\{\psi_{j,k}(t)\}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$, podem gerar todo o espaço de funções de quadrado integrável⁶. Assim, é possível escrever

$$f(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_0[k]\varphi_{0,k}(t) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_j[k]\psi_{j,k}(t). \quad (4.24)$$

A equação acima mostra a separação do sinal em aproximação e detalhes. A convergência se dá em média quadrática, como ocorre na representação em série de Fourier. A primeira parte da equação resulta no sinal aproximado, ou uma versão de baixa resolução deste. A segunda parte, para cada j , dá os detalhes do sinal no espaço de detalhes respectivo. A soma de todas as partes reconstrói o sinal original.

Os coeficientes $c_j[k]$ e $d_j[k]$ são chamados de *transformada wavelet discreta* (DWT⁷). Os coeficientes $c_j[k]$ são os coeficientes de aproximação e os coeficientes $d_j[k]$ são os coeficientes de detalhes, em um nível j . Se o sistema *wavelet* é ortogonal, é possível calcular os coeficientes a partir do produto interno, à semelhança do cálculo dos coeficientes na série de Fourier. Existem algoritmos computacionalmente eficientes para o cálculo destes coeficientes. Na próxima seção, um destes algoritmos é ilustrado.

⁶Para facilitar o entendimento, foi utilizado como espaço de aproximação inicial \mathcal{V}_0 ; poderia, no entanto, ser utilizado qualquer \mathcal{V}_j .

⁷Do inglês, *Discrete Wavelet Transform*.

4.2 O algoritmo piramidal e bancos de filtros

Em diversas aplicações, não há necessidade de se trabalhar diretamente com funções escala ou *wavelets* para se fazer a AMR de um sinal. É possível utilizar unicamente os coeficientes de $g[n]$ e $h[n]$, das equações 4.12 e 4.22⁸, e os coeficientes $c_j[k]$ e $d_j[k]$. Eles podem ser vistos como filtros e sinais de tempo discreto, respectivamente. De fato, a AMR está intimamente relacionada com o algoritmo piramidal usado na decomposição e reconstrução de wavelets [23], com o qual é possível obter os coeficientes da DWT de um sinal. Este algoritmo possui um papel importante, pois realiza uma AMR de maneira rápida, eficiente e elegante.

4.2.1 O algoritmo piramidal de Laplace

Para se entender o princípio do algoritmo, considere-se, por exemplo, a decomposição por multirresolução de um sinal $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Seja então o sinal $f_J(t) \in \mathcal{V}_J$ a melhor aproximação de $f(t)$, dentro de um subespaço de aproximação \mathcal{V}_J , para um dado $J \in \mathbb{Z}$. Dado que este sinal pertence a \mathcal{V}_J , foi visto anteriormente como é possível representá-lo como uma soma de versões deslocadas e escalonadas da função escala que define a AMR de $f(t)$. Tem-se

$$f_J(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_J[k] \varphi_{J,k}(t). \quad (4.25)$$

Tendo em mente a equação 4.13, é possível escrever $\mathcal{V}_J = \mathcal{V}_{J-1} \oplus \mathcal{W}_{J-1}$ e este sinal pode ser representado como

$$f_J(t) = f_{J-1}(t) + g_{J-1}(t), \quad (4.26)$$

em que o sinal $f_{J-1}(t) \in \mathcal{V}_{J-1}$ representa a aproximação de $f(t)$ no subespaço de aproximação \mathcal{V}_{J-1} e $g_{J-1}(t)$ representa os detalhes do sinal no subespaço de detalhes \mathcal{W}_{J-1} .

É possível repetir o procedimento anterior para esta nova aproximação, resultando em

$$f_J(t) = [f_{J-2}(t) + g_{J-2}(t)] + g_{J-1}(t), \quad (4.27)$$

em que $f_{J-2}(t) \in \mathcal{V}_{J-2}$, $g_{J-2}(t) \in \mathcal{W}_{J-2}$ e $g_{J-1}(t) \in \mathcal{W}_{J-1}$.

Iterando o processo, obtém-se

$$f_J(t) = f_{j_0}(t) + \sum_{j=j_0}^{J-1} g_j(t), \quad (4.28)$$

⁸Estes coeficientes definem univocamente a AMR realizada.

em que $f_{j_0}(t) \in \mathcal{V}_{j_0}$ e $g_j(t) \in \mathcal{W}_j$. O valor de j_0 é escolhido de forma que $f_{j_0}(t)$ tenha energia suficientemente pequena com relação à energia total do sinal original [11].

A partir da decomposição dos sinais $f_{j_0}(t)$ e $g_j(t)$ nos respectivos subespaços \mathcal{V}_{j_0} e \mathcal{W}_j , é possível reescrever a equação 4.28. Tem-se desta forma

$$f_J(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{j_0}[k] \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=j_0}^{J-1} d_j[k] \psi_{j,k}(t), \quad (4.29)$$

em que o primeiro somatório corresponde à aproximação de $f(t)$ no subespaço de aproximação \mathcal{V}_{j_0} e o segundo somatório corresponde aos diversos níveis de detalhe, nos subespaços de detalhe \mathcal{W}_j . Note-se que a equação 4.29 é uma generalização da equação 5.1, apenas mudando o espaço de aproximação inicial.

A partir da informação acima, é então possível formar uma idéia do princípio de funcionamento do algoritmo: primeiramente, é realizada uma decomposição, a partir de uma função inicial, resultando em aproximação e detalhe; a nova aproximação é então decomposta, resultando novamente em aproximação e detalhe. E assim por diante, até um nível limite, no qual a quantidade de níveis de resolução seja suficiente para uma dada aplicação. Em outras palavras, novas funções são obtidas a partir de funções conhecidas, através de decomposições sucessivas.

Na prática, utiliza-se apenas os coeficientes $c_J[k]$, para representar uma aproximação de um dado sinal $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Considerando um sistema ortogonal, estes coeficientes são obtidos a partir do produto interno entre o sinal $f(t)$ e a respectiva função de base $\varphi_{J,k}(t)$, $J, k \in \mathbb{Z}$, J conhecido. Por outro lado, para um valor de J suficientemente elevado, as funções escala que geram o subespaço de aproximação funcionam como “deltas de Dirac”. Assim, o produto interno funciona apenas como uma amostragem do sinal e os coeficientes $c_J[k]$ aproximam os valores do sinal em instantes de tempo definidos. O algoritmo piramidal é então aplicado diretamente às seqüências de coeficientes, obtendo-se assim a DWT do sinal. A Figura 4.3 ilustra como a decomposição do sinal pode ser expressa.

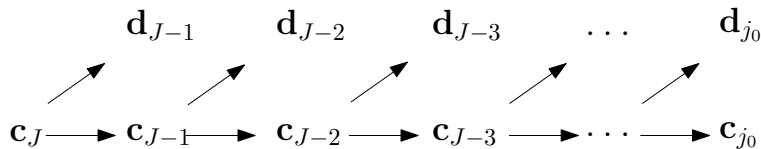


Figura 4.3: Decomposição de $f(t)$ pelo algoritmo piramidal. Note-se como os coeficientes são obtidos a partir dos coeficientes de aproximação iniciais.

De uma forma exatamente inversa, é possível reconstruir o sinal original a partir dos coeficientes de aproximação e detalhes. A Figura 4.4 mostra como a recomposição do sinal pode ser expressa.

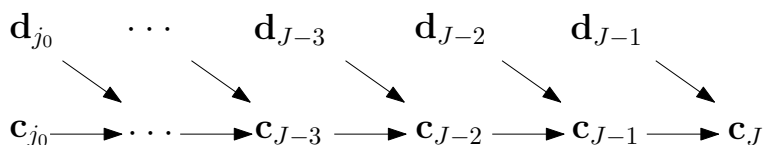


Figura 4.4: *Recomposição de $f(t)$ pelo algoritmo piramidal. Note-se como os coeficientes de aproximação são obtidos a partir dos coeficientes (de aproximação, na mais baixa resolução, e de detalhes, nos diversos níveis de resolução) da decomposição.*

É interessante ressaltar a baixa complexidade computacional do algoritmo piramidal. Com efeito, é possível calcular a DWT de um sinal de comprimento N com apenas $O(N)$ multiplicações. Do seu lado, o cálculo da DFT do mesmo sinal exige $O(N^2)$ multiplicações, se calculado diretamente pela expressão da DFT, ou $O(N \log N)$ se calculada através de um algoritmo rápido (FFT) [38].

4.2.2 Bancos de filtros

Uma forma de visualizar a implementação prática do algoritmo piramidal para a AMR de um sinal é uma abordagem via *bancos de filtros*. Um banco de filtros é um sistema composto de diversos filtros e de operadores de retardo, subamostragem (ou dizimação) e sobreamostragem [48]. O processo de filtragem de um sinal de tempo discreto por um filtro linear e invariante no tempo consiste no cálculo da convolução entre o sinal e a resposta ao impulso do filtro. A expressão da convolução é dada por

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k], \quad (4.30)$$

em que $x[n]$, $h[n]$ e $y[n]$ são a entrada, a resposta ao impulso do filtro e a saída do sistema, respectivamente.

O processo de subamostragem realiza a operação matemática mostrada abaixo:

$$y[n] = x[2n], \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.31)$$

Por sua vez, o processo de sobreamostragem resulta em uma saída dada por:

$$y[n] = \begin{cases} x[n/N], & n = 0, N, 2N, \dots \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.32)$$

Simbolicamente, os blocos que representam a sub e a sobreamostragem são mostrados na Figura 4.5⁹.

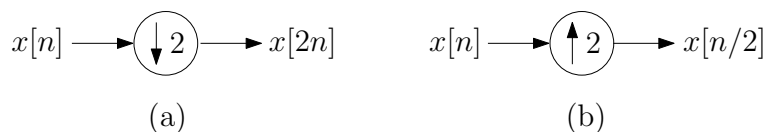


Figura 4.5: Diagramas dos blocos de (a) subamostragem e (b) sobreamostragem. Note-se que, na letra (b), a igualdade só vale para valores pares de n .

Uma explicação sucinta sobre cada bloco pode ser encontrada em [10]. Em [38], é possível encontrar um desenvolvimento detalhado e aprofundado de cada um dos blocos que compõe o banco.

Por outro lado, a partir das equações 4.12 e 4.22, tendo em mente a expressão para aproximar uma função $f(t)$ dentro de um subespaço de aproximação \mathcal{V}_{j+1} , é possível mostrar que [10]

$$c_j[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{j+1}[m]g[m - 2k] \quad (4.33)$$

e que

$$d_j[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{j+1}[m]h[m - 2k]. \quad (4.34)$$

A análise da equação 4.33 mostra que o sinal de saída $c_j[k]$ é o resultado da convolução entre o sinal de tempo discreto $c_{j+1}[n]$ e o filtro cuja resposta ao impulso é dada por $g[-n]$. De forma análoga, a equação 4.34 mostra que o sinal de saída $d_j[n]$ resulta da convolução entre o sinal de tempo discreto $c_{j+1}[k]$ e o filtro cuja resposta ao impulso é dada por $h[-n]$. Em outras palavras, os coeficientes em uma dada escala j são filtrados e resultam, após dizimação, nos coeficientes da escala seguinte, de menor resolução. É possível mostrar que o filtro $g[-n]$ é um filtro passa-baixa e que o filtro $h[-n]$ é um filtro passa-alta [49]. A Figura 4.6 ilustra o processo de obtenção dos coeficientes c_j e d_j .

⁹Na figura, foi utilizado o valor 2 para a ilustração dos processos; no entanto, pode ser utilizado qualquer valor pertencente a \mathbb{N}^*

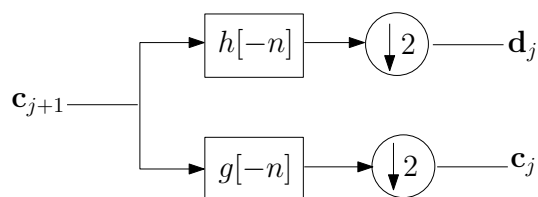


Figura 4.6: Banco de filtros de análise de duas bandas.

Desta forma, o algoritmo piramidal de Laplace pode ser implementado utilizando bancos de filtros sucessivos, como mostra a Figura 4.7. É importante notar que este procedimento é uma implementação do processo de cálculo da DWT de um sinal, de maneira semelhante à ilustrada na Figura 4.3.

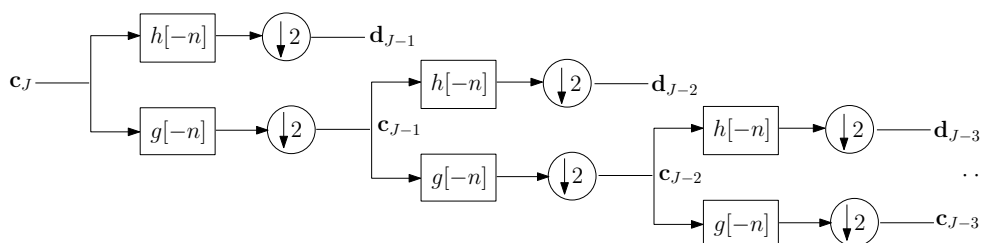


Figura 4.7: Bancos de filtros de análise de duas bandas, implementando a DWT de um sinal. Observe-se que somente são mostrados três níveis de decomposição; no entanto, a árvore segue até encontrar as seqüências de coeficientes $c_{j_0}[k]$ e $d_{j_0}[k]$.

Para a recomposição do sinal, utiliza-se um procedimento inverso, a partir das seqüências de coeficientes calculadas (detalhes e aproximação). É então possível mostrar, a partir de uma manipulação das duas equações da AMR e da equação 4.29, que uma seqüência de aproximação $c_{j+1}[k]$ pode ser obtida a partir dos coeficientes de aproximação e detalhe de um nível menor de resolução, de acordo com a seguinte expressão:

$$c_{j+1}[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_j[m]g[k-2m] + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_j[m]h[k-2m]. \quad (4.35)$$

A relação acima mostra que as seqüências de entrada $c_j[m]$ e $d_j[m]$ passam por um processo de sobreamostragem e depois são filtradas, pelos filtros $g[-n]$ e $h[-n]$ respectivamente. Finalmente, os resultados são somados, obtendo assim a seqüência de coeficientes de aproximação da escala de maior resolução imediatamente superior. As Figuras 4.8 e 4.9 ilustram os processos de obtenção dos coeficientes $c_{j+1}[k]$ e o processo de reconstrução do sinal $f_J(t)$.

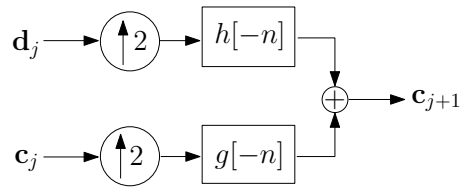


Figura 4.8: Banco de filtros de síntese de duas bandas: obtendo novamente o coeficiente de aproximação do nível $j + 1$, a partir do detalhe e aproximação do nível j .

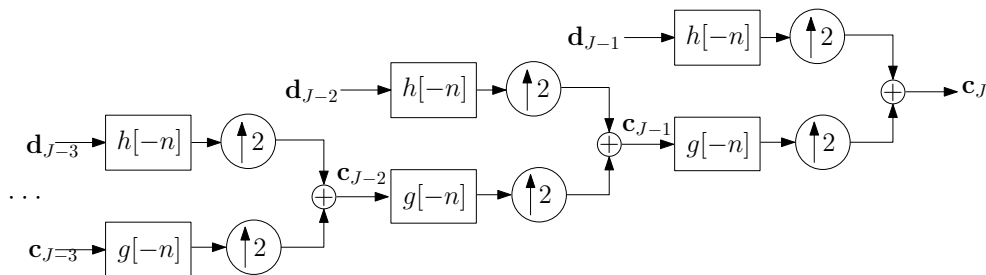


Figura 4.9: Bancos de filtros de síntese de duas bandas, recuperando os coeficientes de aproximação $c_j[k]$.

A teoria dos bancos de filtros aplicados às *wavelets* é muito extensa. Uma descrição detalhada pode ser encontrada em [49] e [50].

4.3 Exemplos e aplicações

Nesta seção, serão comentados rapidamente alguns exemplos e aplicações da AMR, que ilustram o seu grande atrativo como ferramenta de análise e processamento de sinais.

4.3.1 Sinal de eletrocardiograma

No exemplo abaixo, é mostrada a AMR de um sinal de um eletrocardiograma (ECG) padrão, gerado utilizando o *software* Matlab[®].

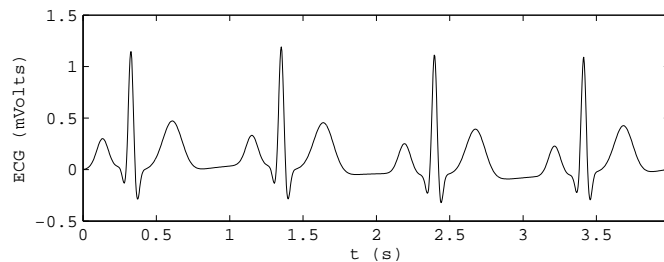


Figura 4.10: Sinal de ECG original. Trecho de 4 segundos, incluindo 4 pulsos do complexo QRS.

São então mostrados a forma com a qual a AMR decompõe sinais e o resultado desta decomposição em cada escala. Na expansão, é utilizada como *wavelet-mãe* a *wavelet* de Haar, mostrada no capítulo 3. É possível, no entanto, escolher um outro tipo de sistema *wavelet*, sendo justamente este um grande atrativo da AMR. Cada sistema possui características diferentes e pode, para um dado tipo de processamento, revelar características desejadas de um sinal. De fato, a Figura 4.11 proporciona uma melhor localização das partes do sinal de rápida variação (as altas freqüências), à medida que a escala aumenta. Em escalas menores, observa-se como esta localização se espalha. Isto dá uma idéia do potencial da AMR na detecção de transitórios, em sinais elétricos, por exemplo. Por outro lado, é possível notar a grande quantidade de coeficientes de muito baixo valor (em escalas maiores), quase nulos, mostrando assim como a AMR pode ser utilizada para a compactação de dados. Desta forma, pode-se notar como a expansão *wavelet* permite uma localização temporal das freqüências de um sinal, de uma forma mais clara e efetiva que na análise de Fourier. Isto torna a AMR uma ferramenta muito poderosa e útil.

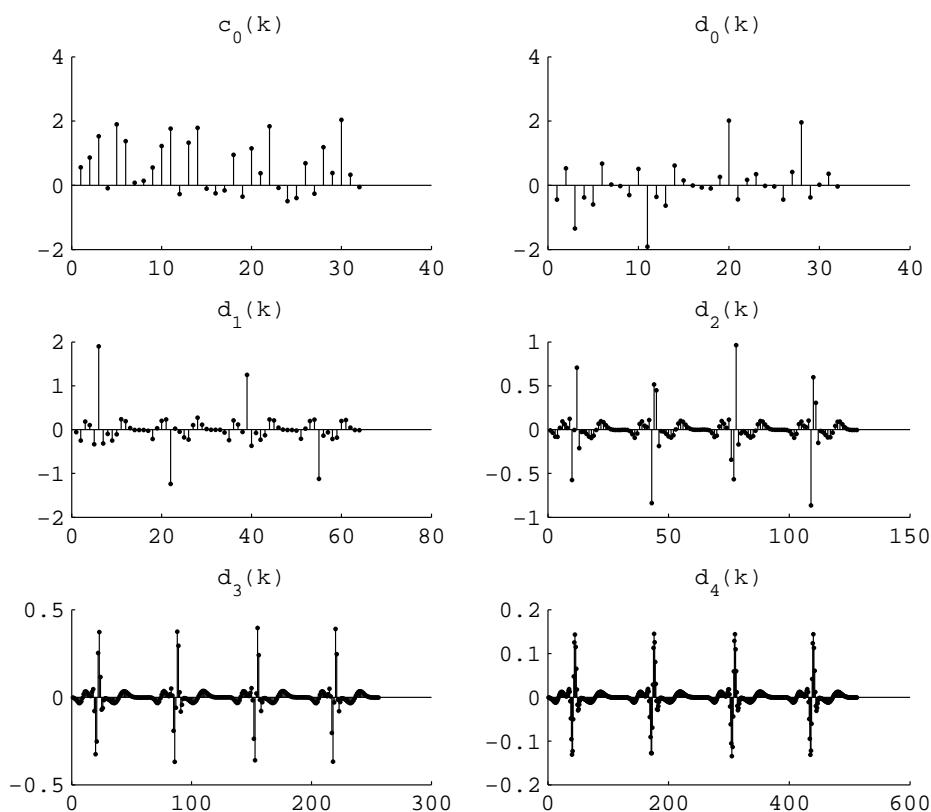


Figura 4.11: Coeficientes da decomposição de um trecho de sinal de ECG. Os coeficientes de aproximação são denotados por $c_0(k)$ e os coeficientes de detalhes por $d_j(k)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$; cada j mostra uma escala diferente.

Na Figura 4.12, são mostradas as diferentes projeções do ECG original nos respectivos subespaços de aproximação \mathcal{V}_j , $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Note-se como, nas baixas resoluções, aparece um esboço do sinal, mostrando apenas as suas grandes estruturas. As variações rápidas, por sua vez, só são resolvidas nos subespaços de aproximação maiores. Como se pode observar, para a aproximação em \mathcal{V}_5 , o erro de aproximação é invisível ao olho nu.

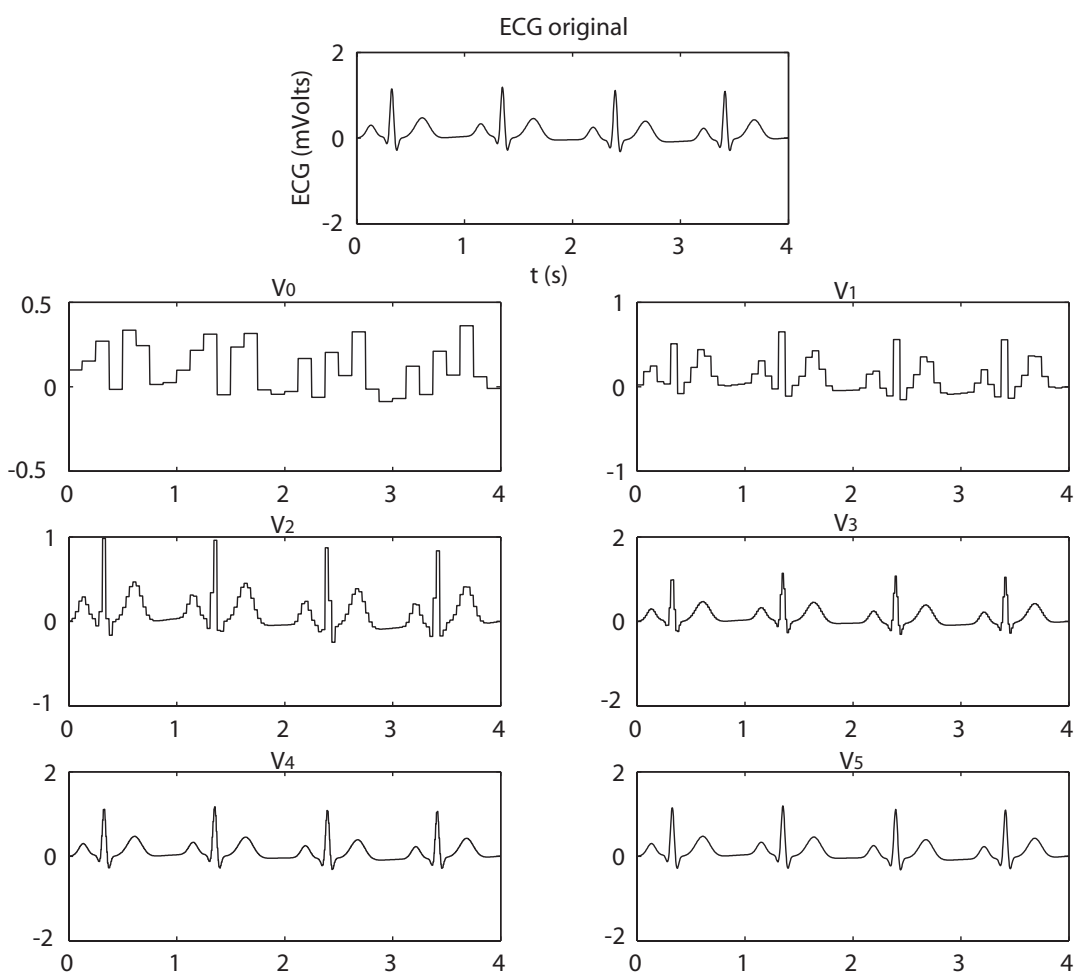


Figura 4.12: Aproximações sucessivas do sinal de ECG. São mostrados: no topo, o ECG original; as versões descrevem aproximações cada vez mais próximas do sinal original (embaixo, à direita). Note-se que a resolução da aproximação é cada vez melhor.

4.3.2 Sinais multidimensionais

Uma aplicação também interessante da AMR pode ser vista na análise de sinais de várias variáveis. Para ilustrar isto, o texto se limitará às imagens planas, que são sinais de duas dimensões¹⁰.

Seja então uma imagem $f[x, y]$, dependente das duas variáveis x e y . Para se fazer a AMR desta imagem, isto é, calcular a sua DWT, as filtragens passa-baixa (pela função escala) e passa alta (pelas *wavelets*), com suas dizimações respectivas, são realizadas sucessivamente sobre as variáveis x e y . Isto pode ser visto na Figura 4.13.

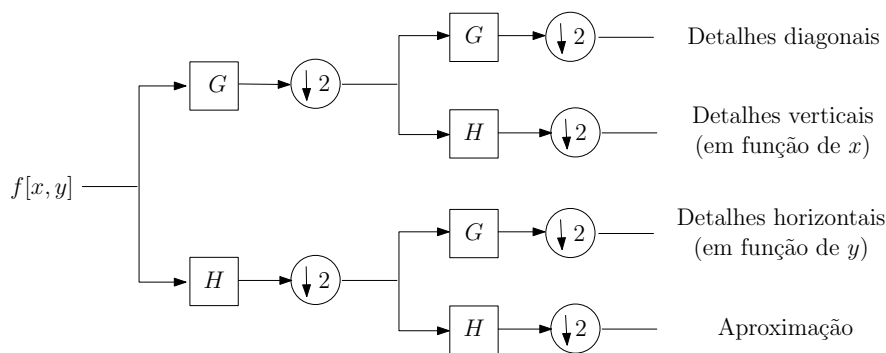


Figura 4.13: Análise multirresolução (cálculo da DWT) de uma imagem em duas dimensões. Quatro sinais são gerados em cada escala.

Assim, a partir de uma imagem com N^2 pixels, é possível obter quatro imagens com, cada uma, $N^2/4$ pixels:

- ▷ a imagem de aproximações,
- ▷ a imagem dos detalhes horizontais, em função de y ,
- ▷ a imagem dos detalhes verticais, em função de x ,
- ▷ a imagem dos detalhes diagonais.

É possível explicar, de uma forma mais clara, a denominação de cada uma destas imagens geradas. Com efeito, é possível observar na Figura 4.13 que a imagem de aproximações é gerada pela filtragem passa baixa em x e em y . As imagens dos detalhes verticais (em função de x) e horizontais (em função de y), por sua vez, são geradas a partir de uma filtragem passa alta unicamente em função de x e y , respectivamente; a outra variável sofre apenas filtragem passa baixa e por isso não aparecem os detalhes. Finalmente, a imagem dos detalhes diagonais

¹⁰Imagens tridimensionais, como projeções de tomografias, também podem ser abordadas pelo mesmo método.

é gerada a partir de uma filtragem passa alta nas duas variáveis. Este procedimento equivale à decomposição em um único nível.

É então possível continuar a AMR fazendo-se a decomposição da imagem da aproximação em três novas imagens de detalhes (verticais, horizontais e diagonais) e uma imagem de aproximações. E assim por diante.

No exemplo a seguir, faz-se a AMR da imagem *Lena*, amplamente conhecida na comunidade de processamento de sinais¹¹. Uma parte da imagem original pode ser vista na Figura 4.14.



Figura 4.14: Imagem padrão *Lena*. Uma versão digitalizada da imagem original, completa, pode ser encontrada em <http://www.lenna.org>.

¹¹Lena Sjooblom posou para a revista *Playboy* em Novembro de 1972. Os direitos da imagem foram liberados pela revista em 1992, devido ao impacto causado pela fotografia, que tornou-se padrão *de facto* para o processamento digital de sinais.

A Figura 4.15 mostra versões aproximadas da imagem original (Figura 4.15a), geradas a partir de decomposições em 1 nível (Figura 4.15b), 2 níveis (Figura 4.15c) e 3 níveis (Figura 4.15d).



Figura 4.15: Imagem Lena original (a) e aproximações de 1 (b), 2 (c) e 3 (d) níveis. Note-se que a imagem é apresentada com diferentes graus de resolução, um dos princípios da AMR.

Na Figura 4.16, é mostrada a AMR de um nível da imagem. Como pode ser visto, são geradas quatro novas imagens: a imagem de aproximações (Figura 4.16a) e as imagens dos detalhes horizontais (Figura 4.16b), verticais (Figura 4.16c) e diagonais (Figura 4.16d). Com a ilustração, fica clara a denominação de cada uma das novas imagens.

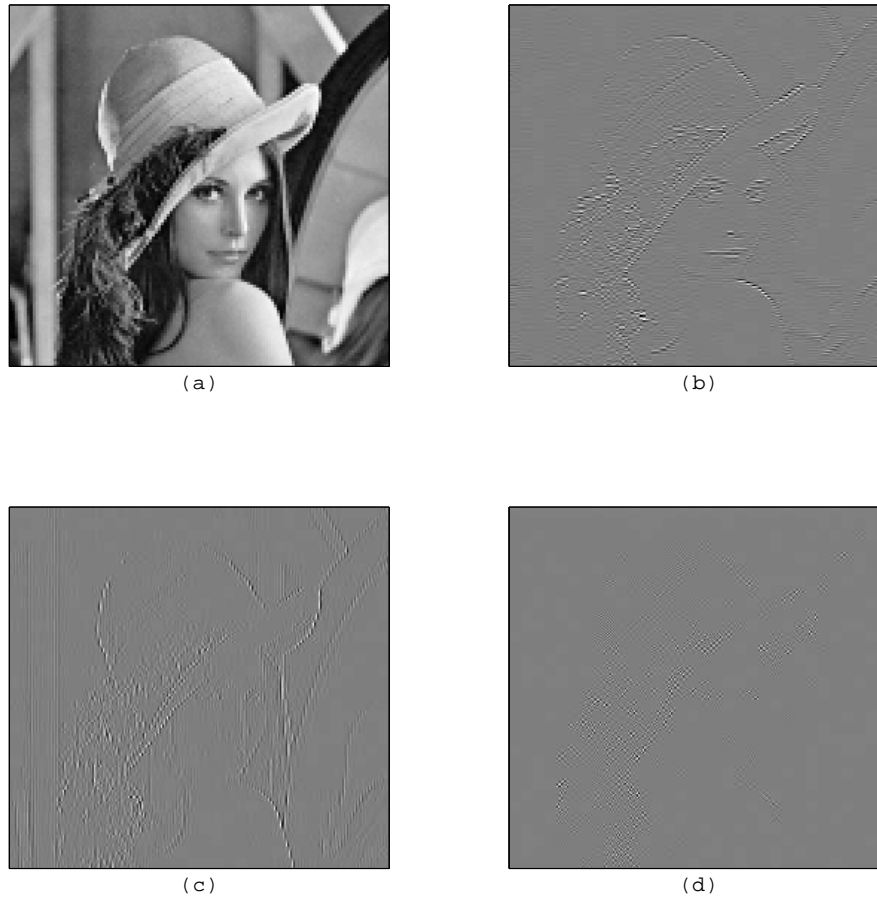


Figura 4.16: *Imagens geradas a partir da AMR da imagem Lena; aproximação (a), detalhes horizontais (b), verticais (c) e diagonais (d). A cor cinza é numericamente representada por um coeficiente nulo. Note-se como, para cada uma das imagens, tem-se a impressão de que foi colocado um filtro, de tal sorte que só apareçam os detalhes desejados.*

Com este tipo de análise, é possível seleccionar estruturas dentro de uma imagem que tenham variações rápidas, segundo os eixos verticais, horizontais e diagonais. Exemplos de estruturas de variação rápida são letras e contornos em figuras. Além disto, o primeiro exemplo mostra o grande número de coeficientes de pequeno valor (ou nulos), que aparecem no cálculo da decomposição. Isto dá uma idéia de como a AMR pode ser utilizada na detecção de contornos ou na compressão de imagens e sinais [10].

Outras aplicações da AMR envolvem assuntos tão variados como redução de ruído (acústico, de imagem, em microscopia, ressonância magnética, etc...), detecção de transitórios (si-

nais sísmicos, transitórios elétricos, sinais biomédicos, por exemplo), observação astronômica (separando as imagens em camadas) ou modelagem e previsão financeira [51]. Em telecomunicações, a AMR tem sido utilizada na transmissão eficiente de vídeo, compactação e codificação de dados, modelos para visão computacional e humana, projeto de transmultiplexadores, entre outros. No capítulo seguinte, apresentada-se uma nova técnica de multiplexação com base em técnicas de multirresolução, a qual será referida como *multiplexação por divisão em multirresolução* (MRDM)¹².

¹²Do inglês, *Multiresolution Division Multiplex*.

CAPÍTULO 5

MULTIPLEXAÇÃO POR DIVISÃO EM MULTIRRESOLUÇÃO

*We all agree that your theory is crazy, but is it
crazy enough?*

— Niels Bohr

5.1 Preliminares e história

MULTIPLEXAÇÃO e técnicas de acesso múltiplo são, hoje, peças centrais de quase todos os sistemas de comunicação modernos. O termo multiplex surgiu originalmente do nome do artefacto chamado Multiplexor, idealizado pelo engenheiro de telégrafos francês Jean Émile Baudot, por volta do ano de 1876. Este aparelho tinha a capacidade de realizar a transmissão simultânea de seis sinais de telegrafia por um único canal de transmissão. A técnica foi utilizada basicamente para telegrafia, até o começo do século XX, quando o impressionante crescimento da telefonia necessitou da introdução de multiplexação nos sinais de voz. Com o aparecimento de novas técnicas de modulação, Banda Lateral Única notavelmente, surgiu um novo sistema de multiplexação: a multiplexação por divisão em frequência (FDM), que rapidamente alcançou uma tremenda popularidade em centrais telefônicas [2].

De um ponto de vista histórico, redes telefônicas utilizavam FDM para transmitir vários canais de voz por um único circuito físico desde 1910. Sistemas FDM se expandiram rapidamente pelo mundo. Em 1920, o engenheiro de telecomunicações George Valensi (ITT, Paris) lançou os fundamentos da multiplexação por divisão temporal (TDM) para canais de voz¹.

¹George Valensi é mais reconhecido pelo seu método de transmissão de imagens coloridas.

De acordo com a história da Bell Labs [2], ele presenteou a sua nova idéia aos Estados Unidos da América, como seu agradecimento particular pela ajuda durante a Primeira Guerra Mundial. O manuscrito original foi posteriormente analisado por J. Carson, quem corretamente argumentou que tal inovação era impossível de ser implementada com o estado da arte da tecnologia da época. Assim, a idéia de Valensi só voltou a ser evocada novamente nos anos 40, por Maurice Deloraine (ITT, Paris) e John Bennett (Bell Labs), que redescobriram a multiplexação TDM independentemente [3, 4]. Os dois são reconhecidos como os inventores da multiplexação digital.

Desde o monumental trabalho de Shannon [5], técnicas digitais têm substituído técnicas analógicas tradicionais em sistemas de comunicação e outros mais. Via de regra, a multiplexação digital é levada a cabo através de multiplexação temporal (TDM), utilizando tanto o padrão plesiócrono (PDH) como o mais recente modo de transmissão síncrono (SDH) [52]. No entanto, também é possível efetuar multiplexação de dados por códigos (CDM); recentemente, esta técnica tem sido foco de interesse, especialmente após a padronização do sistema CDMA pelo padrão IS-95 para telefonia celular (hoje, o padrão em vigor é o IS-2000) [6] e W-CDMA [7].

De um ponto de vista técnico, os esquemas de multiplexação tradicionais aumentam simultaneamente a taxa de transmissão e a banda passante pelo mesmo fator, mantendo assim a mesma eficiência espectral. De forma a conseguir (sensíveis) melhoras na eficiência espectral, o CDMA clássico utiliza formas de onda que possuem uma correlação residual entre si, diferente de zero. Por outro lado, com o advento das fibras ópticas para sistemas de comunicação, uma técnica de multiplexação inovadora viu a luz: a multiplexação por divisão em comprimento de onda (WDM), que implementa um sistema FDM no domínio óptico. De fato, em telecomunicações via fibra óptica, o esquema WDM é uma tecnologia que multiplexa portadoras ópticas em uma única fibra óptica, utilizando diferentes comprimentos de onda (cores) de luz laser, para transportar diferentes sinais.

Em 1999, uma nova abordagem, chamada de multiplexação por divisão em corpos finitos (GDM) foi introduzida por Hélio Magalhães, Ricardo Campello e André Kauffman, do Departamento de Eletrônica e Sistemas da UFPE, como um esquema espectralmente eficiente para canais de banda estreita [8]. Este esquema pode ser implementado com ajuda de algoritmos rápidos para cálculo de transformadas e oferece requisitos compactos de uso de banda passante. Sistemas GDM são verdadeiramente digitais e utilizam técnicas de espalhamento

espectral baseadas em transformadas de corpo finito [9], como a transformada de Fourier de corpo finito, introduzida por Pollard [25]. Seqüências de informação vindas de diferentes usuários são combinadas utilizando uma expansão do alfabeto de entrada (à semelhança da premiada técnica de modulação codificada [53]). As seqüências dos usuários ν são então definidas sobre um corpo finito $GF(p)$. Assim, o multiplexador envolve um conjunto expandido de sinais, cujos símbolos estão definidos sobre o corpo de extensão $GF(p^m)$. Seqüências ortogonais de corpo finito para espalhamento espectral [54] são uma nova ferramenta para a realização de comunicações por espalhamento espectral de seqüência direta multi-nível (DS-SS). Sistemas que utilizam as seqüências geradas são chamados de Acesso por Multiplexação por Divisão em Corpos Finitos (GDMA) [55].

Desde a fantástica evolução das técnicas de processamento de sinais (PS) [56], sistemas de multiplexação baseados em PS, particularmente os baseados em algoritmos rápidos, têm sido bem vindos, especialmente de um ponto de vista da implementação. Os avanços mais impressionantes em PS são talvez os relacionados à teoria de *wavelets* [10]. Especificamente, as *wavelets* mostraram-se ferramentas poderosas para o tratamento eficiente de sinais, devido as suas diferentes características, como a sua grande flexibilidade e versatilidade na escolha do sistema *wavelet* utilizado ou o seu forte poder computacional. De fato, se a entrada de um sistema requer N pontos, a complexidade computacional da transformada wavelet utilizada é tipicamente $O(N)$. Uma grande contribuição à teoria de *wavelets* foi dada por Stéphane Mallat, em 1987, com uma técnica elegante e interessante de multirresolução para decomposição de sinais [18]. De fato, uma ampla variedade de estruturas organizacionais, incluindo sistemas sensoriais biológicos, são organizados em “níveis” ou “escalas”. Esta ferramenta de representação multi-escala é assim um ingrediente essencial para a extração eficiente de informações, a partir da observação [12, 22].

O principal objetivo deste capítulo é introduzir uma técnica original de multiplexação, com tais características. Estes novos esquemas serão doravante denominados de Multiplexação por Divisão em Multirresolução (MRDM) e famílias de DSP's avançados podem ser de grande utilidade para a sua implementação. É importante ressaltar que o propósito aqui é meramente introduzir os conceitos-chave destes sistemas inovadores.

5.2 O multiplexador por multirresolução: conceitos-chave

De acordo com a decomposição *wavelet* heterogênea de Mallat [18], dado um sistema *wavelet*, foi visto no capítulo 4 que um sinal pode ser escrito como

$$f(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_0[k] \varphi_{0,k}(t) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_j[k] \psi_{j,k}(t), \quad (5.1)$$

em que $c_0[k]$ e $d_j[k]$ são os coeficientes de aproximação e detalhes da decomposição, respectivamente. De acordo o que foi estudado no capítulo 4, à medida que j aumenta, a seqüência $d_j[k]$ representa os detalhes de $f(t)$ de mais alta freqüência. É possível retirar estas componentes, obtendo assim uma representação aproximada do sinal. Em outras palavras, tem-se a projeção de $f(t)$ em um dado espaço de aproximação \mathcal{V}_J . Matematicamente, escreve-se

$$f(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_0[k] \varphi_{0,k}(t) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_j[k] \psi_{j,k}(t). \quad (5.2)$$

Tradicionalmente, a AMR acima é usada na decomposição de sinais para *análise* de diferentes características. A presente abordagem, porém, propõe utilizar a decomposição de Mallat para gerar um sinal multiplexado, proveniente de um número de usuários diferentes. Pretende-se então utilizar a AMR para a *síntese* do sinal multiplexado². Como é possível observar na equação 5.2, o sinal é composto por J níveis de detalhe e 1 nível de aproximação; em outras palavras, tem-se $J + 1$ seqüências diferentes para representar o sinal. Estas $J + 1$ seqüências podem ser interpretadas como $J + 1$ sub-canais ou $J + 1$ usuários de um canal.

Seja então um sistema de comunicação, onde se deseja multiplexar $J + 1$ usuários. Seja também $f_i(t)$ o sinal analógico proveniente do i -ésimo usuário. As amostras de cada um destes sinais podem ser atribuídas a cada uma das seqüências que representam as escalas de aproximação e de detalhes. Tem-se então

$$c_0[k] = f_0[k], \quad (5.3a)$$

$$d_j[k] = f_{j+1}[k], \quad (5.3b)$$

em que $j = 0, 1..J - 1$. Um sinal contínuo multiplexado pode então ser gerado, escrevendo-se

$$\varphi_{mux}(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_0[k] \varphi_{0,k}(t) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{j+1}[k] \psi_{j,k}(t). \quad (5.4)$$

²De uma forma análoga ao sistema ODFM visto no capítulo 2, o sistema proposto também pode ser visto como uma técnica de modulação.

Nesta expressão, ao contrário da AMR tradicional, cada seqüência de coeficientes é originária de um usuário diferente. A demultiplexação deste sinal composto pode ser realizada a partir do algoritmo de Mallat, que recupera os coeficientes de aproximação e diferentes escalas de $\varphi_{mux}(t)$ que, na realidade, são as amostras dos sinais de cada usuário. Assim, uma “pseudo-AMR” de síntese é utilizada para gerar o sinal multiplexado e a demultiplexação deste é realizada através de uma decomposição por AMR tradicional. Esta técnica será doravante denominada de Multiplexação por Multirresolução (MRDM³).

5.2.1 Multiplexação de sinais de banda limitada

De acordo com a teoria de multirresolução, os comprimentos das seqüências de aproximação, $c_0[k]$, e de detalhes nas diferentes escalas, $d_j[k]$, não são iguais. Levando-se em consideração um sistema analógico com J níveis de decomposição, duas situações são, a princípio, possíveis:

- ▷ Cada usuário tem acesso a um único nível na pseudo-AMR: tem-se então 1 canal na seqüência de coeficientes de aproximação e J canais nas seqüências de coeficientes de detalhes. Neste caso, as taxas de amostragem dos $J + 1$ usuários não são idênticas e assim são dependentes das suas respectivas escalas.
- ▷ Em cada escala, usuários diferentes podem ser primeiro multiplexados no tempo, utilizando a técnica de multiplexação temporal síncrona (TDM analógico) tradicional, para gerar a seqüência de coeficientes correspondente à dada escala. Neste caso, as taxas de amostragem dos usuários podem ou não ser iguais.

Usuários com diferentes taxas de amostragem

Considerando o primeiro caso (isto é, usuários analógicos a diferentes taxas de amostragem), um único usuário é alocado por escala. Seja então N o comprimento do sinal de tempo discreto na saída do multiplexador. Seja também $J \leq \log_2 N$ o número de escalas da pseudo-AMR. É então possível dizer que os comprimentos dos diferentes sinais de entrada do multiplexador são $N/2^j$, em que $j = 1, 2, \dots, J$. A entrada analógica do esquema de MRDM é baseado no teorema da amostragem de Shannon-Nyquist-Koteln’kov (teorema SNK) e é assim aplicado a sinais de banda limitada. Se J é o número de níveis da pseudo-AMR, o multiplexador pode tratar com sinais de freqüência máxima $f_m, 2f_m, 4f_m, \dots, 2^{J-1}f_m$. O valor dos

³Do inglês, Multiresolution Division Multiplex.

coeficientes *wavelet* $f_j[k]$ é dado de acordo com o valor de uma amostra do sinal analógico, no j -ésimo canal.

Com relação aos requisitos de banda no canal, C , fixadas as frequências máximas f_m e o número de níveis J , é possível obter

$$C = 2^J f_m. \quad (5.5)$$

Por outro lado, caso se tenha um canal de comunicação de banda conhecida e se conheça a frequência máxima dos sinais, o número de níveis a ser usado seria

$$\lceil \log_2\left(\frac{C}{f_m}\right) \rceil. \quad (5.6)$$

A Figura 5.1 ilustra as equações 5.5 e 5.6.

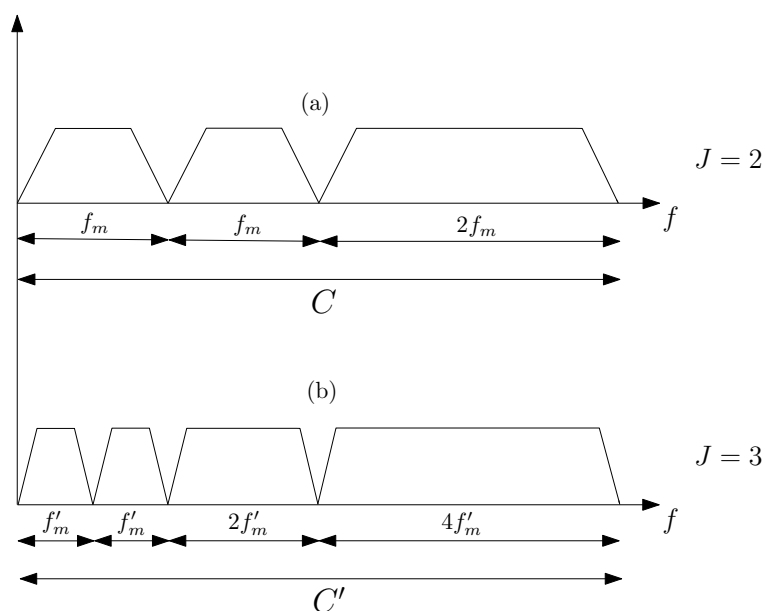


Figura 5.1: Esquema de dois sistemas MRDM com bandas passantes C e C' . Em (a), a banda máxima definida é f_m . Neste caso, $J = 2$ e portanto $C = 2^2 f_m = 4f_m$. Em (b), é mostrado um esquema semelhante com frequência máxima $f'_m = f_m/2$; aqui, $J = 3$ e assim $C' = 2^3 f'_m = 8f'_m$. Tem-se, desta forma, $C = C'$.

Por outro lado, vale ressaltar que a multiplexação de sinais digitais também é possível. Com efeito, em sistemas MRDM de entrada digital, um conversor D/A é utilizado e a seqüência de dados de cada canal é segmentada de acordo com o número de bits do conversor. Cada palavra binária é então representada por uma amostra de valor real que é atribuída a um coeficiente (de aproximação ou de detalhe) $f_j[k]$. Neste caso, a taxa de transmissão de cada usuário será diferente e estará ligada ao número de bits do conversor.

Usuários com taxas de amostragem iguais

Considerando o segundo caso, onde todos os usuários possuem a mesma taxa de amostragem, o entendimento da filosofia do sistema fica mais fácil. Neste caso, é importante lembrar que vários usuários podem ser alocados por nível de decomposição, fazendo-se anteriormente uma multiplexação temporal síncrona analógica para gerar a seqüência de coeficientes correspondente à escala específica. Como no caso anterior, certos parâmetros definem o sistema: em primeiro lugar, o número de usuários (ou o número de sub-canais disponíveis), que é relacionado ao número de níveis da síntese da pseudo-AMR (J) e, assim, define o número de usuários com a mesma taxa de amostragem, sendo este igual a 2^J ; em segundo lugar, a frequência máxima f_m dos sinais de entrada que, em conjunto com o parâmetro J , define a largura de banda do sinal multiplexado no canal, C (Hz). A Figura 5.2 ilustra a alocação dos usuários no sistema.

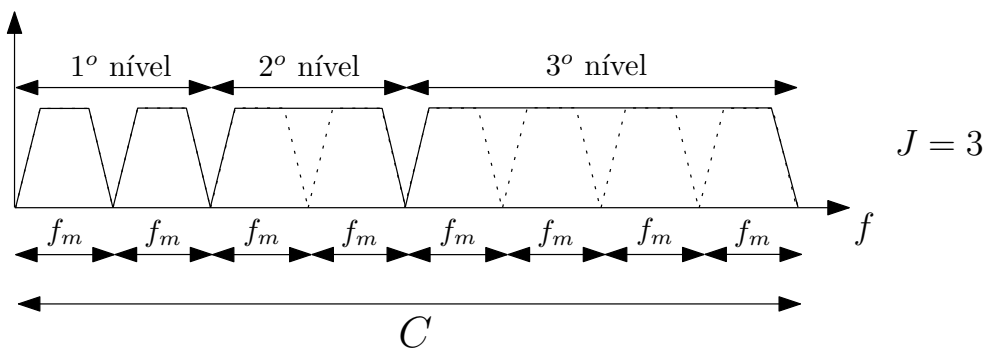


Figura 5.2: Alocação dos usuários em um sistema MRDM com $J = 3$, em que todos possuem mesma taxa de amostragem. No primeiro nível de decomposição, tem-se dois usuários, um na seqüência de aproximação e outro no primeiro nível de detalhe; no segundo nível, tem-se dois usuários, multiplexados anteriormente; no terceiro nível, tem-se quatro usuários. A utilização da banda disponível pelos usuários dentro de cada nível de decomposição é meramente ilustrativa, pois ela depende da multiplexação anterior à MRDM.

É também possível analisar o sistema por outro ângulo. Da mesma forma que no caso anterior, se a banda disponível no canal e a frequência máxima dos sinais de entrada são conhecidas, o número de níveis de decomposição pode então ser obtido. De fato, as equações que regem este sistema são as mesmas que quando os usuários possuem taxas de amostragem diferentes (equações 5.5 e 5.6).

De forma a colocar o sistema em funcionamento, alguns parâmetros devem ser prefixados: de forma a facilitar o desenvolvimento do trabalho, são escolhidos o número de usuários simultâneos e a frequência máxima do sinal proveniente de cada usuário. Estes são respec-

tivamente representados pelo número de níveis da síntese da pseudo-AMR (J) e pelo comprimento dos blocos de informação de cada usuário. Outros parâmetros podem, no entanto, ser escolhidos, como a banda passante total disponível no canal, que, na prática, é um fator determinante em um sistema de comunicação.

O número total de usuários simultâneos de mesma taxa é de 2^J e é distribuído ao longo da pseudo-AMR, de acordo com a idéia mostrada na tabela 5.1 e já ilustrada na Figura 5.2.

Tabela 5.1: *Número total de usuários em um sistema MRDM com J níveis de decomposição.*

$J^{\text{ésimo}}$ nível	2^{J-1} usuários
$J - 1^{\text{ésimo}}$ nível	2^{J-2} usuários
...	...
2º nível	2 usuários
1º nível	1 usuário (aproximação) + 1 usuário (detalhe)

A configuração geral do sistema é semelhante à AMR tradicional, com a exceção de que a operação de síntese faz a multiplexação e a operação de análise faz a demultiplexação. Além disto, uma adaptação pode ser precisa para a implementação anterior da multiplexação temporal, no caso em que os usuários devam ter a mesma taxa de transmissão; no caso em que um único usuário é alocado por escala, a taxa de transmissão de cada usuário é diferente e a adaptação não é necessária. As Figuras 5.3 e 5.4 mostram diagramas de blocos do modulador e do demodulador do sistema MRDM, respectivamente.

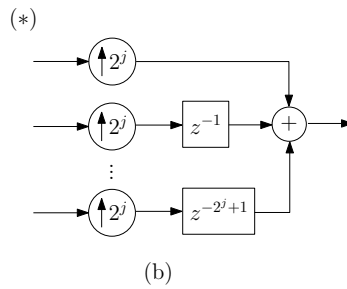
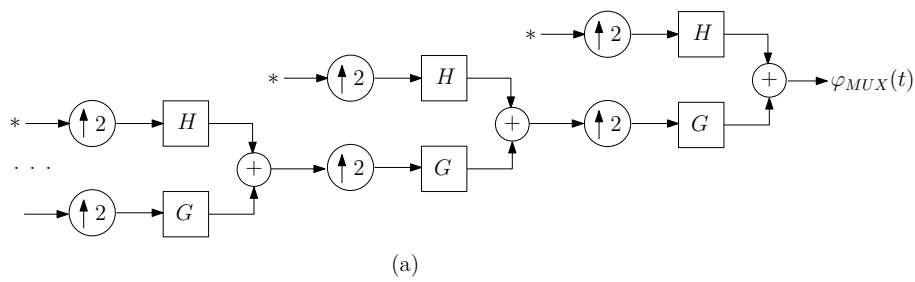


Figura 5.3: (a) Sistema MRDM de três níveis. G e H são os filtros escala e wavelet, respectivamente. (b) hardware extra necessário para implementar multiplexação TDM nos níveis de detalhe; a figura mostra o hardware utilizado no nível j de detalhe. Na escala adjacente, o número de blocos de sobreamostragem é escalonado por um fator de dois, assim como o fator de sobreamostragem, e assim por diante.

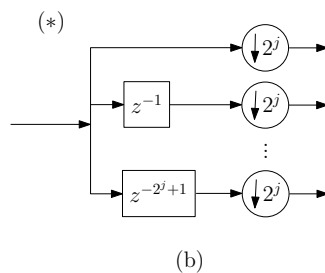
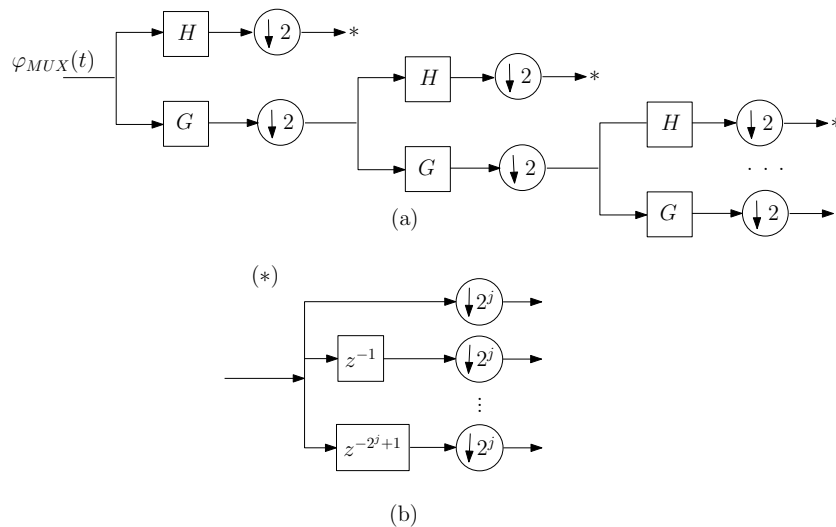


Figura 5.4: (a) Sistema de demultiplexação baseado em AMR, através de filtros G e H . (b) hardware adicional necessário para separar informações provenientes de diferentes usuários em um dado canal j de detalhes.

Uma abordagem mais geral sugere que diferentes usuários podem ter taxas de transmissão diferentes, de acordo com as suas necessidades específicas. Em outras palavras, os usuários podem ser alocados nos diferentes níveis de decomposição da AMR de uma forma mais heterogênea. Isto significa que em cada escala, pode haver um ou mais usuários simultâneos, sendo estes primeiramente multiplexados utilizando-se técnicas tradicionais, como a multiplexação temporal síncrona (TDM), de forma a gerar a seqüência a ser transmitida neste nível de decomposição. No entanto, usuários alocados na mesma escala devem ter a mesma taxa de transmissão e usuários em escalas adjacentes devem possuir taxas de transmissão relacionadas por um fator de 2. De fato, de uma forma totalmente generalizada, em um sistema MRDM com J níveis de decomposição, para blocos de informação de tamanho mínimo igual a m , a distribuição de canais pode ser feita de acordo com a equação 5.7, abaixo:

$$N_m \cdot m + N_{2m} \cdot 2m + \cdots + N_{2^{J-1}m} \cdot 2^{J-1}m + N_{2^J m} \cdot 2^J m = 2^J m, \quad (5.7)$$

em que N_x é o número de canais de comprimento x . De forma compacta, pode-se escrever

$$\sum_{j=0}^J N_{2^j m} \cdot 2^j m = 2^J m. \quad (5.8)$$

5.3 Especificações de sistemas MRDM

Esta seção trata de detalhes técnicos específicos em sistemas MRDM, como taxas de amostragem e transmissão (em sistemas digitais), especificações dos blocos de dados transmitidos e número de canais do sistema. São também apresentados alguns casos simples de multiplexação, de forma a proporcionar um melhor entendimento das operações envolvidas nos multiplexadores baseados em multirresolução. Unicamente são tratados os sistemas MRDM multitaxas, pelo seu caráter mais geral. A partir destes, especificações de sistemas de taxa única são mais facilmente deriváveis. De fato, é possível interpretar um sistema de taxa única como um sistema multitaxa, pois a multiplexação dos usuários que compartilham um único nível de decomposição na pseudo-AMR é feita anteriormente à MRDM propriamente dita; de forma análoga, a separação dos usuários só é feita posteriormente à demultiplexação do sinal recebido. Os exemplos deste texto tratam de sistemas digitais, que proporcionam uma melhor ilustração da aplicabilidade do sistema.

Seja então J o número de escalas da pseudo-AMR. Por outro lado, já foi visto que o multiplexador é inerentemente de tempo discreto. Desta forma, no canal básico de aproximação,

o multiplexador trata com sinais de frequência máxima f_m que, internamente, são sinais de tempo contínuo, amostrados. Em outras palavras, o sistema não reconhece a natureza do sinal de entrada e sim apenas valores reais, que correspondem às amostras de um sinal contínuo, “virtual”. O valor dos coeficientes *wavelet* $f_j[k]$ é atribuído de acordo com as amostras do sinal “virtual”, no j -ésimo canal.

Se os sinais de entrada forem analógicos, a multiplexação se faz de acordo com as definições mostradas na seção anterior, utilizando uma banda passante total C (Hz) igual a $2^J f_m$.

Caso os sinais de entrada estejam na forma digital, cada sinal é transformado em analógico por um conversor D/A de B -bits, é tratado internamente pelo sistema como se fosse um sinal contínuo, amostrado; o sinal é digitalizado novamente na demultiplexação, utilizando-se um conversor A/D de B -bits. Por isso, é preciso compatibilizar a taxa de transmissão dos usuários do sistema com a do multiplexador. Desta forma, o multiplexador assume a taxa de bit R para o canal básico de aproximação (uma taxa de referência). O sinal no menor nível de detalhe corresponde ao de menor taxa, em bits por segundo.

Como o sistema apenas reconhece amostras de um sinal “virtual” contínuo, de frequência máxima f_m , a taxa de amostragem será de, no mínimo, $2f_m$. São então processadas $2f_m$ amostras por segundo, em cada canal. Como a entrada é digital e o conversor D/A utilizado é de B -bits, a taxa de transmissão dos usuários, para ser compatível à taxa suportada pelo sistema, precisa ser de

$$R = B \cdot 2f_m \text{ bps.} \quad (5.9)$$

Na saída do sistema, após um número dado de operações de pseudo-AMR, o número de amostras multiplexadas no bloco de saída é N . Os principais parâmetros da MRDM são então (N, J, R) . Por outro lado, tem-se que T (o tempo necessário para a transmissão do bloco multiplexado) é dado por

$$T = \frac{NB}{2^J R} (s). \quad (5.10)$$

Canais tributários em diferentes taxas de bit também podem ser multiplexados em estes esquemas MRDM, como uma forma de flexibilizar ainda mais este tipo de sistema. Assim, as taxas dos tributários, em bps, podem assumir valores que vão de R_{min} a R_{max} . As diferentes taxas suportadas pelo sistema são então:

$$R_{min} = R, 2R, 4R, \dots, 2^{J-1}R = R_{max}, \quad (5.11)$$

com a restrição de que, se n_j é o número de canais de taxa $2^{J-j}R$, a seguinte relação precisa ser respeitada:

$$\sum_{j=1}^J \frac{n_j}{2^j} = 1, \quad (5.12)$$

de tal forma que a o número de usuários alocado no sistema seja compatível com sua capacidade.

Conseqüentemente, o número máximo de usuários com taxa R (*bps*) é $n_J = 2^J$. Este é exatamente o mesmo caso examinado nas seções anteriores (todos os usuários com a mesma taxa).

Um exemplo simples apresenta um canal básico limitado a $f_m = 4 \text{ kHz}$ (um canal de voz, por exemplo), utilizando uma modulação PCM ($R = 64 \text{ kbps}$). Assumindo uma MRDM com $J = 3$ e $N = 512$, o tempo do bloco de saída é $T = 8 \text{ ms}$. A notação é MRDM (512, 3, 64 *kbps*). Um esquema diferente, capaz de multiplexar o mesmo número de canais, pode ser implementado com um MRDM (64, 3, 64 *kbps*), utilizando um bloco com $T = 1 \text{ ms}$. Os dois sistemas utilizam conversores de 8 bits/amostra. Com base neste segundo exemplo, um sistema MRDM pode trabalhar com diversas configurações. A tabela 5.2 e as Figuras 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 ilustram os diferentes esquemas possíveis.

Tabela 5.2: Possível composição de um sistema MRDM; o valor A_i representa o número de canais multiplexados de cada tipo. A combinação admite tributários de 256, 128 e 64 *kbps*.

Tipo de multiplexador	256 <i>kbps</i> n_1	128 <i>kbps</i> n_2	64 <i>kbps</i> n_3
A_1	2	0	0
A_2	1	2	0
A_3	1	1	2
A_4	1	0	4
A_5	0	4	0
A_6	0	3	2
A_7	0	2	4
A_8	0	1	6
A_9	0	0	8

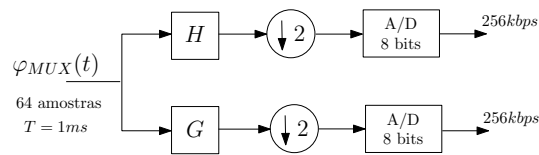


Figura 5.5: Multiplex tipo A_1 . Neste sistema, são recuperados dois usuários com taxas de transmissão de 256 kbps.

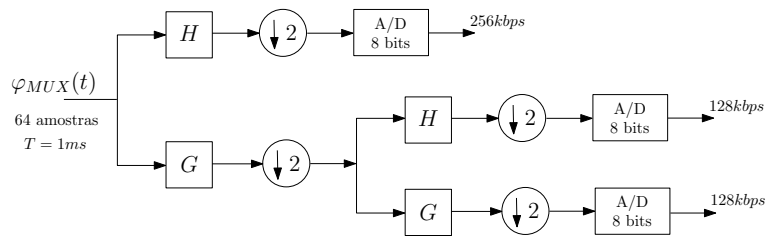


Figura 5.6: Multiplex tipo A_2 . Aqui, são multiplexados dois usuários com taxas de transmissão de 128 kbps, junto com um usuário de taxa igual a 256 kbps.

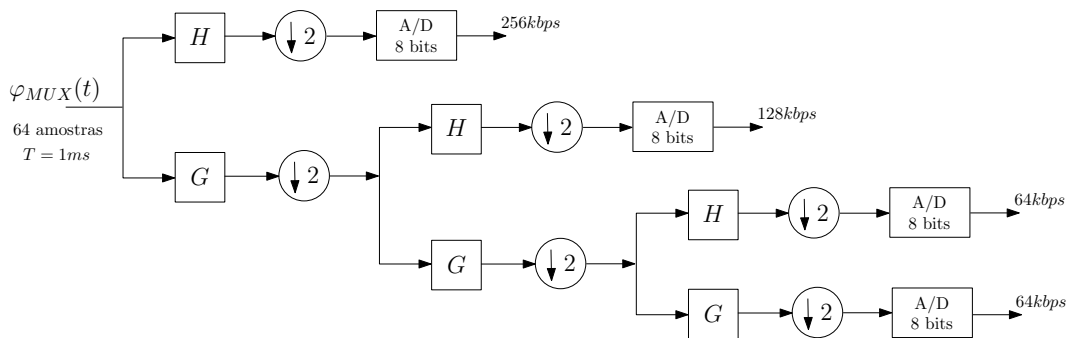


Figura 5.7: Multiplex tipo A_3 . São multiplexados dois usuários com taxas de transmissão de 64 kbps, um usuário à taxa de 128 kbps e um usuário à taxa de 256 kbps.

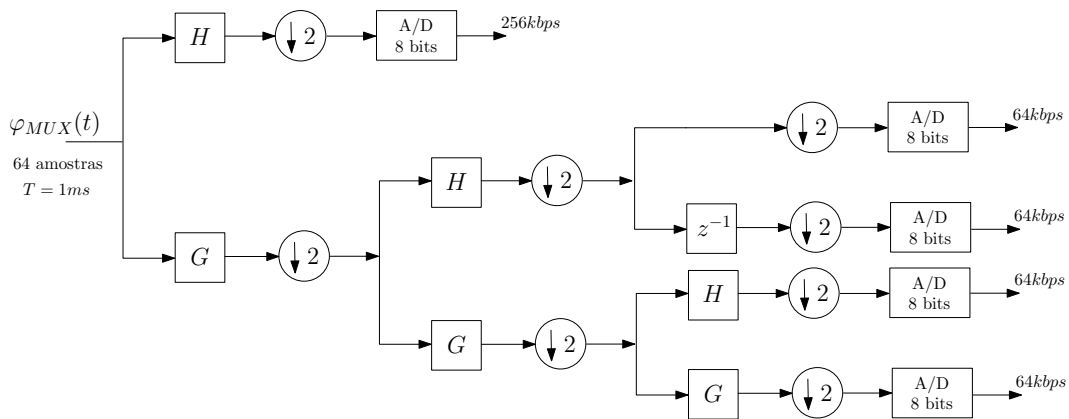


Figura 5.8: Multiplex tipo A_4 . São multiplexados quatro usuários com taxas de transmissão de 64 kbps, junto com um usuário de taxa igual a 256 kbps. Note a utilização do hardware adicional no segundo nível de decomposição, para recuperar dois usuários multiplexados anteriormente.

Assim, o sistema MRDM pode lidar com alguma das seguintes configurações (tabela 5.2): multiplexação de dois usuários de 256 kbps, ou um único usuário de 256 kbps e um par de usuários de 128 kbps, etc. É possível multiplexar canais a diferentes taxas (64, 128, 256 kbps) ou até multiplexar oito usuários síncronos idênticos a uma taxa de 64 kbps. Os valores encontrados na tabela 5.2 também podem ser utilizados para a MRDM (512, 3, 64 kbps), sendo a única diferença a duração de envio do bloco.

Um outro exemplo simples mostra uma MRDM (256, 5, 64 kbps), que utiliza um bloco com $T = 125 \mu s$ e conversores de 1 bit. A saída do multiplexador possui, então, uma taxa de 2,048 Mbps e pode assim ser utilizado para multiplexar canais de uma rede digital de serviços integrados (ISDN⁴). Outras configurações possíveis são MRDM (128, 5, 64 kbps) com conversores de 2 bits, MRDM (64, 5, 64 kbps) com conversores de 4 bits ou MRDM (32, 5, 64 kbps) com conversores de 8 bits. Em todos os casos, $T = 125 \mu s$ (quadro do sistema PCM30) e a taxa equivalente na linha é 2,048 Mbps (quadro E1).

É importante manter em mente que estes são unicamente exemplos simples, mas que sistemas sofisticados com um grande número de usuários também podem ser implementados.

5.4 Formas de onda de canal e comportamento espectral

Nesta seção, é apresentada uma ilustração sucinta da dependência do comportamento espectral do sinal multiplexado com as formas de onda presentes no canal. De fato, as for-

⁴Ou RDSI, em português.

mas de onda no canal de comunicação, na saída do multiplexador, aparentam ser fortemente dependentes do sistema *wavelet* escolhido para o processo de multiplexação. Alguns espectros são apresentados para o sistema MRDM baseado em Haar e dois possíveis cenários são oferecidos. Em todos os casos, dados dos diferentes usuários têm a mesma taxa. Um sinal $x_{mux}(t)$ é então gerado, correspondente à concatenação de todos os sinais dos usuários. A sua versão de tempo discreto, $x_{mux}[n]$, é uma versão multiplexada temporalmente, que possui o mesmo comprimento do sinal de saída $\varphi_{mux}[n]$. As Figuras 5.9 e 5.10 mostram as magnitudes dos espectros do sinal multiplexado de entrada, $|X_{mux}[k]|$, e do sinal MRDM de saída, $|\Phi_{mux}[k]|$. Primeiramente, o número de escalas da pseudo-AMR é mantido constante e as mudanças de espectro causadas pelo aumento do comprimento do bloco de saída são mostradas (Figura 5.9).

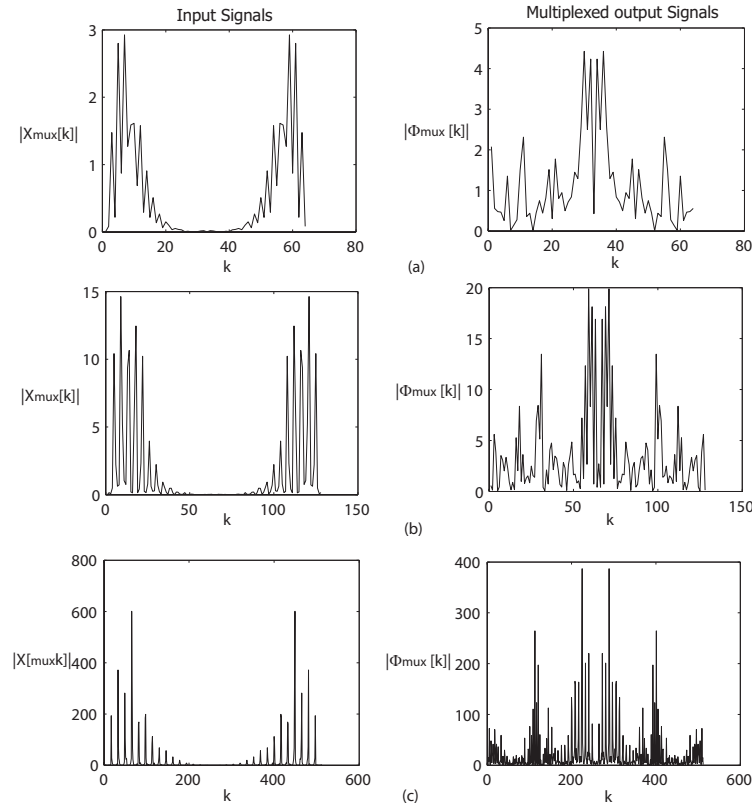


Figura 5.9: Efeitos espectrais ao aumentar a taxa de transmissão de usuários no MRDM baseado em Haar com um número fixo de $n_J = 2^J = 4$ usuários. O número de níveis de decomposição é $J = 2$. N é o comprimento do bloco de saída. (a) $N = 64$, $N/2^J = 16$ por usuário. (b) $N = 128$, $N/2^J = 32$ por usuário. (c) $N = 512$, $N/2^J = 128$ por usuário.

As conseqüências do aumento do número de níveis de decomposição (J), isto é, do número de usuários, também são ilustradas em sistema baseados em Haar, com usuários de igual taxa (Figura 5.10).

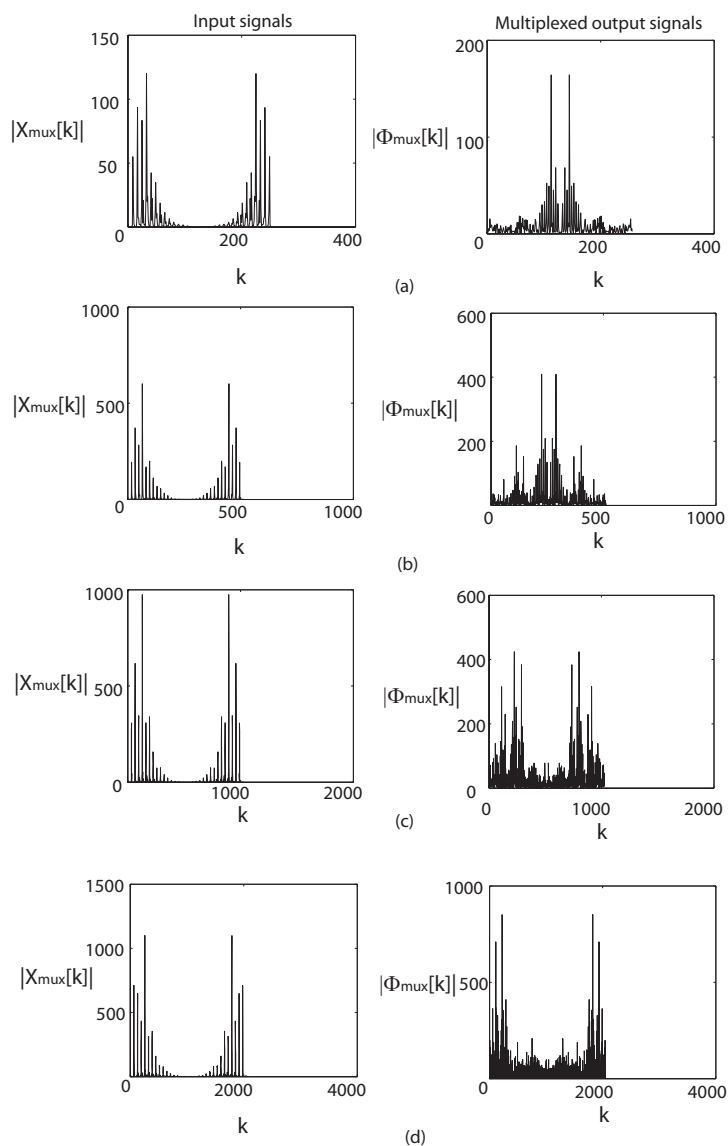


Figura 5.10: Efeitos espectrais ao aumentar o número de níveis de decomposição na AMR no MRDM baseado em Haar. (a) $J = 2$ ($n_J = 4$ canais), $N = 256$, $N/2^J = 64$ (b) $J = 3$ ($n_J = 8$ canais), $N = 512$, $N/2^J = 64$. (c) $J = 4$ ($n_J = 16$ canais), $N = 1024$, $N/2^J = 64$. (d) $J = 5$ ($n_J = 32$ canais), $N = 1048$, $N/2^J = 64$

5.5 Comentários finais

Este capítulo introduz os fundamentos de novos esquemas baseados em processamento de sinais, que são oferecidos como uma alternativa para a multiplexação de sinais analógicos e digitais. Nesta classe de multiplexação, usuários são separados no domínio “escala”. São considerados usuários de taxa constante e multi-taxas. Como previsto, os requisitos de banda são similares ao dos sistemas FDM, TDM ou CDM. A maior vantagem nesta técnica é que tanto a multiplexação como a demultiplexação podem ser assistidas por processadores de sinais (DSP) e nenhum tipo de *hardware* específico é necessário para a sua implementação. Sistemas *wavelet* ortogonais diferentes podem gerar MRDM com características de onda no canal diferentes, resultando em diferentes formas de preencher o espectro do canal de comunicação. Finalmente, diversos aspectos práticos do funcionamento deste sistema, incluindo sincronismo, simulações e desempenho nos diversos modelos de canais ruidosos utilizados hoje em dia, precisam ser investigados.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

*Hypothesen sind Netze; nur der wird fangen,
der auswirft.*

— Novalis

NESTE capítulo, são apresentadas de forma sucinta as conclusões dessa dissertação, são feitos alguns comentários relevantes ao trabalho e, finalmente, são propostos alguns trabalhos para futuras investigações.

6.1 Conclusões e comentários finais

O principal objetivo da dissertação é propor uma técnica de multiplexação original, utilizando técnicas de análise *wavelet*, especificamente análise multirresolução. Para isto, foram previamente estudados e explicados os fundamentos necessários à elaboração do trabalho.

Primeiramente, foi feita uma revisão sumária das principais técnicas de multiplexação e acesso múltiplo, especificamente FDM, TDM e CDM. Para cada uma, foi mostrada a maneira como são alocados os diferentes usuários no canal de comunicação e foram abordados alguns aspectos técnicos destes esquemas. Em seguida, foram introduzidas as modulações multi-portadoras, através de uma análise de sistemas OFDM. Foi realizada uma breve pesquisa histórica e os princípios da modulação OFDM foram apresentados. A utilização da transformada discreta de Fourier e a inserção de prefixo cíclico também foram abordadas, como um esforço para melhor esclarecer o funcionamento do sistema. Com efeito, apesar da ampla literatura disponível, esta é confusa e dispersa.

Posteriormente, foram estudadas as ferramentas principais deste trabalho: *wavelets* e análise multirresolução. Inicialmente, foram apresentados diversos aspectos relacionados às *wavelets* e relevantes ao tema da dissertação. Neste sentido, foi mostrada uma transição natural entre a tradicional análise de Fourier e a análise *wavelet*. Em seguida, foi dedicada uma atenção especial à análise tempo-frequência, tema amplamente estudado, mas de interpretação delicada. Foi feito um esforço para se dissecar de forma clara as idéias nas quais se baseia este tipo de análise, tentando mostrar a elegância, beleza e importância desta ferramenta. Finalmente, algumas *wavelets* foram apresentadas.

Como uma continuação natural do trabalho, foram estudadas, de forma detalhada, as bases da análise multirresolução. Seus aspectos matemáticos fundamentais foram expostos e foi explicado como o algoritmo piramidal de Laplace e os bancos de filtros podem ser aplicados à ferramenta. Hoje, estas técnicas de implementação da AMR são amplamente utilizadas. Finalmente, foram apresentados dois exemplos, nos quais puderam ser verificados o potencial e a aplicabilidade deste tipo de análise em análise e processamento de sinais.

Finalmente, a principal contribuição desta dissertação consiste na introdução de um novo sistema de multiplexação baseado em análise multirresolução. O esquema proposto é chamado de Multiplexação por Divisão em Multirresolução (MRDM) e pode ser implementado utilizando técnicas de processamento digital de sinais. De fato, esta é a maior vantagem nesta técnica, pois tanto a multiplexação como a demultiplexação podem ser assistidas por processadores de sinais (DSP's) e nenhum tipo de *hardware* específico é necessário para a sua implementação. Na dissertação, são apresentados os rudimentos do novo sistema, que pode ser oferecido como uma alternativa para a multiplexação de sinais analógicos e digitais. Desta forma, é mostrada uma visão histórica de sistemas de multiplexação e em seguida são explicados os conceitos-chave da técnica. É assim mostrada a maneira como os tributários são alocados no esquema de multiplexação e são introduzidos os diferentes tipos de configuração. É importante ressaltar a grande flexibilidade do sistema, que pode alocar usuários com taxas de amostragem iguais ou diferentes, analógicos ou digitais. Vários exemplos são realizados para ilustrar esta característica. Finalmente, uma análise preliminar foi realizada, tentando esclarecer o comportamento do multiplexador, em função do sistema *wavelet* escolhido para o processo de multiplexação. É notada uma forte dependência do comportamento espectral do sinal multiplexado com as formas de onda presentes no canal. Assim, é provável que sistemas *wavelet* ortogonais diferentes possam gerar MRDM com características de onda no canal di-

ferentes, resultando em diferentes formas de preencher o espectro do canal de comunicação. Esta questão resta a ser investigada com mais detalhes.

6.2 Contribuições futuras

O estudo desenvolvido nesta dissertação abre espaço para uma gama variada de trabalhos de pesquisa, todos relacionados a uma investigação mais profunda da multiplexação MRDM. Desta maneira, uma continuação natural e imediata deste trabalho é o estudo aprofundado da escolha de um sistema *wavelet* para o multiplexador e a sua implicação nas formas de onda geradas, no espectro do sinal produzido e nos seus requisitos de banda. É sugerida a implementação de simulações, de forma a conhecer melhor o efeito de tal escolha e o desenvolvimento de um *software* que, dados os parâmetros de entrada do sistema, permita a variação do sistema *wavelet* escolhido para o processo de multiplexação e, assim, a comparação nas características das diferentes configurações.

Por outro lado, um maior detalhamento do funcionamento prático deste sistema, incluindo aspectos de sincronismo e desempenho em canais ruidosos podem ser investigados. Também é sugerido o estudo dos diversos blocos do multiplexador, e como a alteração destes afeta o sistema. Mais especificamente, a utilização de conversores D/A's e A/D's com menos bits aparenta obter resultados mais eficientes. No entanto, esta questão precisa de uma análise mais profunda. Outrossim, é interessante investigar a possibilidade da criação um sistema baseado inteiramente em análise *wavelet*. Para isto, é interessante implementar a multiplexação prévia utilizando o próprio sistema MRDM ou utilizar a árvore completa na decomposição *wavelet*.

Por fim, a principal vantagem deste esquema de multiplexação é a sua grande flexibilidade, e as diversas pesquisas que ainda precisam ser feitas certamente comprovarão o grande potencial e aplicabilidade da multiplexação MRDM em sistemas de comunicação modernos.

REFERÊNCIAS

- [1] T. S. RAPPAPORT, **Wireless Communications - Principles and Practice**, segunda ed., T. S. RAPPAPORT, Ed. Prentice Hall PTR, 2002.
- [2] S. MILLMAN, Ed., **A History of Engineering & Science in the Bell System: Physical Sciences (1925-1980)**. AT&T Bell Laboratories, 1983.
- [3] W. BENNETT, Time division multiplex systems, *Bell Syst. Tech. J.*, v. 20, p. 199 – 221, Abril 1941.
- [4] F. L. H. M. STUMPERS, The history, development, and future of telecommunications in Europe, *IEEE Communications Magazine*, v. 22, Maio 1984.
- [5] N. J. A. SLOANE & A. D. WYNER, Eds., **Claude Elwood Shannon: collected papers (New York, 1993)**, New York, 1993.
- [6] QUALCOMM, **The CDMA Network Engineering Handbook**. San Diego, CA: Qualcomm Inc., 1992.
- [7] R. PRASAD, **CDMA For Wireless Personal Communications**. Boston-London: Artech House, 1996.
- [8] H. M. DE OLIVEIRA, R. M. C. DE SOUZA, & A. N. KAUFFMAN, Efficient multiplex for band-limited channels: Galois-field multiple access, *Proc. of the Workshop on Coding and Cryptography'99*, p. 235–241, 1999.
- [9] R. J. McELIECE, **Finite Fields for Computer Scientists and Engineers**. Kluwer Academics, 1987.
- [10] C. S. BURRUS, R. A. GOPINATH, & H. GUO, **Introduction to Wavelets and Wavelets Transforms, A Primer**, 1^a ed. Prentice Hall, Agosto 1997.

- [11] H. M. DE OLIVEIRA, **Análise de Sinais para Engenheiros: Wavelets**. Rio de Janeiro, RJ: Brasport Livros e Multimídia, Série da Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2006 (em edição).
- [12] A. BULTHEEL, Learning to swim in a sea of wavelets, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, v. 2, n. 1, p. 1 – 45, 1995. [Online]. Disponível: <http://www.cs.kuleuven.be/cwis/research/nalag/papers/ade/swim/index.html>
- [13] H. M. DE OLIVEIRA, T. H. FALK, & R. F. G. TÁVORA, Decomposição de wavelets sobre corpos finitos, *Revista Brasileira de Telecomunicações, número especial*, v. 17, p. 38 – 47, Julho 2002.
- [14] J. B. J. FOURIER, **Théorie analytique de la chaleur**. Editions Jacques Gabay, 1988, reimpressão do original.
- [15] A. HAAR, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Tese, Georg-August-Universität Göttingen, 1909.
- [16] J. MORLET & A. GROSSMANN, Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, v. 15, n. 4, p. 723–736, Julho 1984.
- [17] YVES MEYER ET AL., **Ondelettes et opérateurs**. Hermann, Outubro 1997, v. I, II, III.
- [18] S. G. MALLAT, A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 11, n. 7, p. 674–693, Julho 1989.
- [19] I. DAUBECHIES, **Ten Lectures on Wavelets**. Society for Industrial & Applied Mathematics, Maio 1992.
- [20] B. BURKE HUBBARD, **The World According to Wavelets: The Story of a Mathematical Technique in the Making**, 2^a ed. AK Peters, Ltd., Abril 1998.
- [21] I. DAUBECHIES, Where do wavelets come from, a personal point of view, *Proceedings of the IEEE*, v. 84, n. 4, p. 510 – 513, Abril 1996.
- [22] S. G. MALLAT, **Une exploration des signaux en ondelettes**. Éditions de l'École Polytechnique, 2000.

- [23] P. J. BURT & E. H. ADELSON, The Laplacian pyramid as a compact image code, *IEEE Transactions on Communications*, v. 31, n. 4, p. 532 – 540, Abril 1983.
- [24] A. P. WITKIN, Scale-space filtering - a new approach to multiscale description, *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '84*, v. 9, p. 150–153, Março 1984.
- [25] J. M. POLLARD, The fast Fourier transform in a finite field, *Math. Comput.*, v. 25, p. 365–374, Abril 1971.
- [26] J. G. PROAKIS, **Digital Communications**, quarta ed. McGraw-Hill, 2001.
- [27] R. R. MOSIER & R. G. CLABAUGH, Kineplex, a bandwidth-efficient binary transmission system, *AIEE Transactions (Part I: Communications and Electronics)*, v. 76, p. 723 – 728, Janeiro 1958.
- [28] P. SHELSWELL, The COFDM modulation system: the heart of digital audio broadcasting, *Electronics & Communication Engineering Journal*, v. 7, n. 3, p. 127 – 136, Junho 1995.
- [29] H. SARI, G. KARAM, & I. JEANCLAUDE, Transmission techniques for digital terrestrial TV broadcasting, *IEEE Communications Magazine*, v. 33, n. 2, p. 100 – 109, Fevereiro 1995.
- [30] S. KAPP, 802.11a. more bandwidth without the wires, *IEEE Internet Computing Magazine*, v. 6, n. 4, p. 75 – 79, Julho–Agosto 2002.
- [31] D. VASSIS, G. KORMENTZAS, A. ROUSKAS, & I. MAGLOGIANNIS, The IEEE 802.11g standard for high data rate WLANs, *IEEE Network Magazine*, v. 19, n. 3, p. 21 – 26, Maio–Junho 2005.
- [32] S. HARA & R. PRASAD, **Multicarrier Techniques for 4G Mobile Communications**. Artech House Publishers, Junho 2003.
- [33] R. VAN NEE & R. PRASAD, **OFDM for Wireless Multimedia Communications**. Artech House Publishers, Janeiro 2000.
- [34] M. S. ZIMMERMAN & A. L. KIRSCH, The AN/GSC-10 (KATHRYN) variable rate modem for HF radio, *IEEE Transactions on Communication Technology*, v. 15, n. 2, p. 197 – 204, Abril 1967.

- [35] S. B. WEINSTEIN & P. M. EBERT, Data transmission by Frequency-Division Multiplexing using the Discrete Fourier Transform, *IEEE Transaction on Communication Technology*, v. COM-19, n. 5, p. 628 – 634, Outubro 1971.
- [36] Orthogonal Frequency Division Multiplexing, U.S. patent n. 3,488,455, emitida em 6 de Janeiro 1970, preenchida em 14 de Novembro 1966.
- [37] J. A. C. BINGHAM, Multicarrier modulation for data transmission: An idea whose time has come, *IEEE Communications Magazine*, v. 28, n. 5, p. 5 – 14, Maio 1990.
- [38] A. V. OPPENHEIM, R. W. SCHAFER, & J. R. BUCK, **Discrete Time Signal Processing**, segunda ed. Prentice Hall, 1998.
- [39] A. V. OPPENHEIM, A. S. WILLSKY, & S. H. NAWAB, **Signals and Systems**, segunda ed. Prentice Hall, 1997.
- [40] C. K. CHUI, **An Introduction to Wavelets**, 1ª ed., ser. Wavelet Analysis and Its Applications, C. K. CHUI, Ed. Academic Press, Ltd., Janeiro 1992, v. 1.
- [41] L. REGINALDO SOARES, Wavelets na identificação e localização de faltas em linhas de transmissão, Dissertação, Universidade Federal de Pernambuco, 2001.
- [42] D. GABOR, Theory of communication, *Journal IEE (Londres)*, v. 93, p. 429 – 457, 1946.
- [43] E. W. WEISSTEIN, Compact support. [Online]. Disponível: <http://mathworld.wolfram.com/Support.html>
- [44] E. W. WEISSTEIN, ET AL., Support. [Online]. Disponível: <http://mathworld.wolfram.com/CompactSupport.html>
- [45] I. DAUBECHIES, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Communications on Pure & Applied Mathematics*, v. 41, n. 11, p. 909 – 996, Novembro 1988.
- [46] G. A. A. DE ARAÚJO & H. M. DE OLIVEIRA, Compactly supported one-cyclic wavelets derived from Beta distributions, *Anais do XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 2005.
- [47] D. B. PERCIVAL & A. T. WALDEN, **Wavelet Methods for Time Series Analysis**. Cambridge University Press, Julho 2000.
- [48] J. GOMES, L. VELHO, & S. GOLDENSTEIN, **Wavelets: teoria, software e aplicações**. Instituto de matemática pura e aplicada, Julho 1997.

- [49] M. VETTERLI & J. KOVAČEVIĆ, **Wavelets and Subband Coding**, ser. Signal Processing, A. V. OPPENHEIM, Ed. Prentice Hall PTR, 1995.
- [50] G. STRANG & T. NGUYEN, **Wavelets and Filter Banks**. Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [51] A. AUSSEM, J. CAMPBELL, & F. MURTAGH, Wavelet-based feature extraction and decomposition strategies for financial forecasting, *Journal of Computational Intelligence in Finance*, v. 6, n. 2, p. 5–12, Março/Abril 1998.
- [52] C. A. SILLER & M. SHAFI, Eds., **SONET/SDH: A Sourcebook of Synchronous Networking**. IEEE press, 1996.
- [53] G. UNGERBOECK, Channel coding with multilevel/phase signals, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. IT-28, p. 55–67, 1982.
- [54] H. M. DE OLIVEIRA & R. M. C. DE SOUZA, **Orthogonal Multilevel Spreading Sequence Design In: Coding, Communication and Broadcasting**. Hertfordshire: Research Studies Press (RSP), John Wiley, 2000.
- [55] J. P. C. L. MIRANDA & H. M. DE OLIVEIRA, On Galois-division multiple access systems: Figures of merit and performance evaluation, *Anais do XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 2001, companion paper: Some Properties of Orthogonal Galois-Field Spreading Sequences.
- [56] P. S. R. DINIZ, E. A. B. DA SILVA, & S. LIMA NETTO, **Digital Signal Processing: System Analysis and Design**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

SOBRE O AUTOR

O autor nasceu em João Pessoa, Paraíba, no dia 23 de julho de 1980. Formou-se em Engenharia Elétrica, modalidade Eletrônica, pela Universidade Federal de Pernambuco em 2003. É membro do *Institute of Electrical and Electronic Engineers*. Seus interesses de pesquisa incluem processamento digital de sinais, sistemas de comunicação digital, códigos corretores de erros e matemática aplicada.

Endereço: Rua André Cavalcante 67, Apto 1701

52060 – 090 Parnamirim

Recife – PE

Brasil

e-mail: ebouton@terra.com.br

Esta dissertação foi diagramada usando $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ ¹ pelo autor.

¹ $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ é uma extensão do \LaTeX . \LaTeX é uma coleção de macros criadas por Leslie Lamport para o sistema \TeX , que foi desenvolvido por Donald E. Knuth. \TeX é uma marca registrada da Sociedade Americana de Matemática (\mathcal{AMS}). O estilo usado na formatação desta dissertação foi escrito por Dinesh Das, Universidade do Texas. Modificado em 2001 por Renato José de Sobral Cintra, Universidade Federal de Pernambuco, e em 2005 por André Leite Wanderley.