

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**GUILHERME BOAVIAGEM RIBEIRO**

**UM ESTUDO SOBRE OPERADORES PARA DESLOCAMENTO DE  
SINAIS SOBRE GRAFOS**

Recife

2018

GUILHERME BOAVIAGEM RIBEIRO

**UM ESTUDO SOBRE OPERADORES PARA DESLOCAMENTO DE SINAIS SOBRE  
GRAFOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Comunicações.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Bandeira Lima

Recife

2018

Catálogo na fonte  
Bibliotecária: Rosineide Mesquita Gonçalves Luz / CRB4-1361 (BCTG)

R484e Ribeiro, Guilherme Boaviagem.  
Um estudo sobre operadores para deslocamento de sinais sobre grafos/Guilherme Boaviagem Ribeiro. – Recife, 2018.  
85 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Bandeira Lima.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2018.  
Inclui Referências, Apêndice e Anexo.

1. Engenharia Elétrica. 2. Processamento de sinais sobre grafos. 3. Deslocamento fracionário. 4. Interpolação. I. Lima, Juliano Bandeira (Orientador). II. Título.

621.3 CDD (22. Ed.)

UFPE/BCTG/2018 - 143



# Universidade Federal de Pernambuco

## *Pós-Graduação em Engenharia Elétrica*

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE  
DISSERTAÇÃO DO MESTRADO ACADÊMICO DE

# GUILHERME BOAVIAGEM RIBEIRO

TÍTULO

**“UM ESTUDO SOBRE OPERADORES  
PARA DESLOCAMENTO DE SINAIS SOBRE GRAFOS.”**

A comissão examinadora composta pelos professores: JULIANO BANDEIRA LIMA, DES/UFPE; DANIEL PEDRO BEZERRA CHAVES, DES/UFPE e HÉLIO MAGALHAES DE OLIVEIRA, DE/UFPE, sob a presidência do primeiro, consideram o candidato **GUILHERME BOAVIAGEM RIBEIRO APROVADO.**

Recife, 15 de fevereiro de 2018.

---

**MARCELO CABRAL CAVALCANTI**  
Coordenador do PPGE

---

**JULIANO BANDEIRA LIMA**  
Orientador e Membro Titular Interno

---

**HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA**  
Membro Titular Externo

---

**DANIEL PEDRO BEZERRA CHAVES**  
Membro Titular Interno

*A meus pais, este fruto de minha educação, pela qual sempre zelaram.*

## AGRADECIMENTOS

Que pena, viver praticando como ocupação a de matar o tempo, que é um tesouro de Deus! Não há desculpas para justificar essa conduta. [...] Não percas a tua eficácia, aniquila antes o teu egoísmo. A tua vida para ti? A tua vida para Deus, para o bem de todos os homens, por amor ao Senhor.

---

São Josemaría Escrivá, 09/01/1956

Agradeço ao bom Deus por ter-me permitido realizar este trabalho e frutificar parte do tempo que Ele me concedeu. Sua benignidade não tem fim.

Agradeço muito especialmente a meus pais e meu irmão, para com os quais minha dívida de amor nunca para de subir, a Babi (*toujours ensemble*) e sua/minha família, e aos amigos sempre presentes, seja de perto, seja de longe.

Agradeço imensamente ao prof. Dr. Juliano Bandeira Lima pela orientação ao longo deste curso de Mestrado. A dedicação ao trabalho e a atenção com que se dirigiu a mim em todos os momentos, posso dizer com extrema sinceridade, servem-me de modelo.

Agradeço aos professores e alunos do Grupo de Pesquisa em Processamento de Sinais do DES/UFPE, que contribuíram para o desenvolvimento deste projeto pela participação em apresentações e discussões a respeito do trabalho. Não posso deixar de agradecer também ao prof. Dr. Hélio Magalhães de Oliveira e ao prof. Dr. Daniel Chaves, membros da banca avaliadora do Mestrado, pelo tempo dedicado à leitura desta dissertação e pelas suas ricas sugestões.

Agradeço, por fim, ao CNPq e à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-graduação pelo auxílio financeiro ao longo do Mestrado, e ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da UFPE pela oportunidade concedida.

*“As long as a branch of science offers  
an abundance of problems, so long is it alive”  
(David Hilbert)*

## RESUMO

A teoria de processamento de sinais sobre grafos surgiu nos últimos anos com a proposta de generalizar o processamento clássico de sinais de tempo discreto para o caso em que o sinal é definido sobre uma estrutura irregular genérica, modelada por um grafo. Em vez do *tempo discreto* — um domínio unidimensional a que chamaremos *regular*, i. e. em que uma amostra é sempre adjacente a somente duas outras e para quaisquer duas amostras vizinhas a distância entre elas é a mesma — os sinais em questão são definidos sobre *grafos* e, por isso, podem ter a distância e as relações entre suas amostras variando de ponto a ponto. Um exemplo seria um sinal de temperatura obtido por uma rede de sensores, em topologia *mesh*: a distância entre sensores é diversa e o número de nós adjacentes a um sensor não é constante ao longo da rede. A generalização buscada no desenvolvimento desta teoria encontra, frequentemente, dificuldades mesmo em face a conceitos basilares, como o de deslocamento unitário de um sinal. Se uma amostra é adjacente a outras 3, como definir o atraso unitário? Neste contexto, o presente trabalho investiga os principais operadores de deslocamento de sinais sobre grafos na literatura e, em seguida, define um operador de deslocamento fracionário, estudando seu significado e possíveis aplicações. Para o caso de grafos em anel, que modelam o tempo discreto, o operador proposto é comparado com o filtro ideal de deslocamento não-inteiro, e uma rápida convergência é observada numericamente. Por fim, o operador proposto é utilizado para construir um método de interpolação de imagens, que apresentou eficácia satisfatória e comparável às principais técnicas computacionais empregadas para este fim, embora o algoritmo tenha apresentado um tempo de execução muito acima da média.

**Palavras-chave:** Processamento de sinais sobre grafos. Deslocamento fracionário. Interpolação.

## ABSTRACT

The framework of graph signal processing was conceived in the last decade with the ambition of generalizing the tools from classical digital signal processing to the case in which the signal is defined over an irregular structure modelled by a graph. Instead of *discrete time* — what one would call a *regular* 1-D domain, in which a signal sample is adjacent to only two neighbors and for any pair of contiguous samples the distance is the same — the signals here are defined over *graphs* and, therefore, the distance and relations between adjacent samples vary along the signal. For instance, one may consider the temperature signal defined from the data of a sensor mesh network: the distance between two nodes may vary widely, as does the number of neighbors at each node. When creating the tools of signal processing in this framework, however, many challenges arise, even with basic concepts, such as the notion of unit shift. If a signal sample is adjacent to three others, how does one perform a translation by one unit? In this context, this work aims to investigate the main graph shift operators found in literature and define the operation of fractional shift of graph signals, studying its meaning and possible applications. In the case of ring graphs, which are known to model the discrete time domain, the proposed operator was compared to the ideal fractional time shift filter, and numerical convergence was verified. Moreover, the proposed operator was used to create a method for image interpolation, which presented good results when compared to the performance of standard techniques, despite having an execution time above the average.

**Keywords:** Graph signal processing. Fractional shift. Interpolation.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Exemplo de sinal definido sobre um grafo. As arestas do grafo representam relações de dependência, ou semelhança, entre as amostras do sinal. . . . .	18
Figura 2	– Exemplos de grafos (a) direcionado e (b) não-direcionado, definidos sobre o mesmo conjunto de vértices. . . . .	21
Figura 3	– (a) Um grafo e, em vermelho, (b) o conjunto de vértices $\mathcal{N}(i, 2)$ em que $v_i$ é o vértice branco. . . . .	23
Figura 4	– Exemplos de representações de sinais sobre (a) um grafo em anel direcionado, (b) um grafo não-direcionado em forma de grade retangular uniforme e (c) um grafo formado por cidades do Nordeste brasileiro. . . . .	23
Figura 5	– Um mesmo sinal é definido sobre (a) um grafo não-direcionado em anel e (c) um grafo derivado daquele em anel, mas com topologia distinta. (b) Espectro de Fourier, segundo $\text{GSP}_L$ (segundo definido na Subseção 2.4.1), do sinal sobre o grafo em (a) e (d) em (c). . . . .	24
Figura 6	– (a) Sinal sobre um grafo em anel não-direcionado e (b) seu espectro em $\text{GSP}_A$ . . . . .	29
Figura 7	– Ordenamento das frequências de sinais sobre grafos, de baixa para alta, no plano complexo. . . . .	30
Figura 8	– Grafo de sensores direcionado, com 100 vértices, sem laços ou múltiplas arestas. . . . .	31
Figura 9	– (a) Número de mudanças de sinal e (b) variação total dos autovetores $(\mathbf{v}_i)_{i=0, \dots, N-1}$ da matriz $\mathbf{A}$ , ordenados de modo que os respectivos autovalores se disponham do mais próximo ao mais distante do ponto real $ \lambda_{max} $ no plano complexo. Ou seja, segundo (2.20) e a Fig. 7, os autovetores estão dispostos em ordem crescente de frequência. . . . .	31
Figura 10	– Em vermelho são mostrados os 12 menores valores de variação total, relativos aos autovetores associados aos autovalores representados em azul. . . . .	32
Figura 11	– Exemplo de filtragem passa-baixa e passa-alta em um (a) sinal artificial, constante por partes, sobre um grafo de sensores de 1000 vértices. Em (b) e (c) são mostradas as saídas dos filtros passa-baixa (LPF) e passa-alta (HPF), respectivamente, com esta última tendo sofrido binarização (limiar de 50%) do valor absoluto do sinal. Em (d) mostra-se a resposta em frequência dos filtros utilizados, e os espectros antes e após as filtrações passa-baixa e passa-alta são mostrados em (e) e (f), respectivamente. De (d) a (f) o eixo das abscissas foi invertido, de modo a facilitar a leitura em termos de frequência (componentes de maior frequência ficam à direita do gráfico). . . . .	33

Figura 12 – (a) Um grafo não-direcionado, ponderado e conexo, e (b) uma possível orientação sua. A função $\omega : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ mapeia a aresta $e$ no valor real não-negativo $w(e)$ . . . . .	36
Figura 13 – Alguns autovetores da matriz Laplaciana de um grafo de sensores com 1000 vértices: (a) $\mathbf{u}_0$ , (b) $\mathbf{u}_1$ e (d) $\mathbf{u}_{999}$ . Como $\mathbf{u}_{999}$ tem um pico difícil de discernir das demais amostras do sinal, em (e) é mostrada uma versão binarizada $\bar{\mathbf{u}}_{999}$ , valendo 1 em amostras positivas de $\mathbf{u}_{999}$ e $-1$ nas negativas. Em (c) e (f) são mostradas medidas de suavidade de um sinal: a norma da diferença $\ \mathbf{L}\mathbf{u}_i\ $ e o número de mudanças de sinal dos autovetores $\mathbf{u}_i$ . As entradas de $\mathbf{u}_0$ tem valor $1/\sqrt{1000} \approx 0,03$ . . . . .	39
Figura 14 – (a) Sinal suave sobre o grafo de Minnesota. (b) Resultado da adição de um ruído gaussiano com desvio padrão igual a 20% da amplitude do sinal original. (c) Espectro do sinal original, do ruído gaussiano e do filtro passa-baixa ideal. (d) Sinal resultante da filtragem passa-baixa. . . . .	41
Figura 15 – (a) Sinal sobre o grafo (sem arestas) dos 5570 municípios brasileiros, com amostras nulas exceto nos 609 vértices correspondendo ao banco de dados da Embrapa. (b) Sinal $\mathbf{s}^{(\text{known})}$ com 1000 amostras, 609 das quais provêm de base de dados pluviométricos e as demais são nulas. (c) Sinal $\mathbf{s}^{(\text{predicted})}$ , estimando as amostras anteriormente nulas de modo a obter um sinal suave. (d) Isoieta média do mês de janeiro, correspondente ao período de 1977 a 2006. O contorno do mapa do Brasil sobre os grafos é inexato, estando aqui apenas para guiar o leitor, sem a pretensão de alinhá-lo com as coordenadas corretas de cada cidade. Foi desenhado por Felipe Micaroni Lalli e está disponível sob licença CC By-SA no endereço < <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Contorno_do_mapa_do_Brasil.svg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Contorno_do_mapa_do_Brasil.svg</a> >. . . . .	42
Figura 16 – (a) Norma $\ \mathbf{L}\mathbf{u}\ $ e (a) número de mudanças de sinal dos autovetores do grafo direcionado da Fig. 8, ordenados de modo que os respectivos autovalores estejam em ordem crescente de módulo. . . . .	45
Figura 17 – Impulso sobre um grafo de Petersen com arestas de peso unitário e suas versões deslocadas uma e duas vezes. . . . .	48
Figura 18 – Exemplo de grafo acíclico direcionado, com fontes representadas por quadrados e sumidouros por círculos vazados. . . . .	50
Figura 19 – Impulso sobre um vértice-fonte de um DAG, e suas versões deslocadas uma e três vezes. Vértices vermelhos indicam amostras unitárias, e vértices azuis indicam amostras iguais a zero. O sinal $\mathbf{A}^4\mathbf{x}$ é nulo. . . . .	51
Figura 20 – (a) Espectro do <i>heat kernel</i> e (b) sinal no domínio dos vértices. Resultado da translação do <i>heat kernel</i> (c) $T_{100}\{\mathbf{s}\}$ , (d) $T_{200}\{\mathbf{s}\}$ e (e) $T_{2000}\{\mathbf{s}\}$ . Em (f), o resultado de $T_{2000}\{T_{100}\{\mathbf{s}\}\}$ . . . . .	53

Figura 21 – (a) Sinal suave fracamente localizado e o (c) impulso $\delta_{201}$ (o vértice $v_{201}$ se encontra dentro do círculo verde), com suas respectivas versões deslocadas por $T_{2000}\{\cdot\}$ em (b) e (d). O círculo vermelho em (c) contém o vértice $v_{2000}$ .	53
Figura 22 – Deslocamento unitário realizado sobre o impulso $\delta_{20}$ pela (a) matriz de adjacência e pela (b) matriz de translação de Girault.	56
Figura 23 – Deslocamento do impulso $\delta_0$ pela matriz de adjacência e pela matriz de translação de Girault, em grafos em anel direcionados e não-direcionados.	57
Figura 24 – Diagrama de blocos representando as etapas do modelo matemático de um conversor digital-analógico perfeito.	59
Figura 25 – Respostas ao impulso do filtro de (a) deslocamento nulo (operador identidade) e (b) de deslocamento não-inteiro $\text{sinc}(n - 0,3)$ .	60
Figura 26 – Deslocamento fracionário ( $a = 0,7$ ) e unitário de um sinal sobre um grafo de sensores direcionado e outro não-direcionado.	62
Figura 27 – Deslocamento fracionário ( $a = 0,7$ ) e unitário de um sinal sobre um grafo em anel direcionado e outro não-direcionado.	63
Figura 28 – (a) As $N = 8$ raízes da unidade, entradas da diagonal da matriz $\Lambda_C$ , $N \times N$ , e (b) uma possível escolha das fases das entradas de $\hat{\mathbf{h}}_a$ para $a = 0,3$ . Circulada em vermelho, a entrada de $\hat{\mathbf{h}}_a$ que quebra a simetria.	64
Figura 29 – Amostras das respostas ao impulso $\mathbf{h}_{LPF}$ e $\mathbf{h}_a$ para $a = 0,3$ e $N = 10$ .	65
Figura 30 – Erro relativo percentual, em termos da energia da diferença em relação a $\mathbf{h}_{LPF}$ . O operador $E\{\cdot\}$ calcula a energia do sinal, $E\{\mathbf{x}\} = \sum_{n=0}^{N-1}  x_n ^2$ . Em (b) e (c), são mostrados os erros para $N$ par, considerando ora apenas a parte real de $\mathbf{h}_a$ , ora seu valor complexo integral. (d) Erro relativo percentual médio, calculado sobre todos os valores de $N$ ímpar em (a), para diversos valores de parâmetro não-inteiro $a$ .	66
Figura 31 – Grafo em grade regular.	67
Figura 32 – (a) Modelo de uma grade regular com <i>feedback</i> simples. (b) Em branco, as novas amostras geradas após a interpolação. (c) Novo grafo, após a interpolação.	68
Figura 33 – Interpolação de um sinal bidimensional utilizando o algoritmo proposto. (b) Em verde (amostras nulas), estão os novos vértices onde serão estimados os valores de $\mathbf{Y}_\bullet$ e $\mathbf{Y}_\bullet$ .	70
Figura 34 – Energia percentual do erro cometido ao restaurar imagens $255 \times 255$ pixels via os métodos de deslocamento fracionário (DF), <i>nearest-neighbor</i> (NN), interpolação linear, interpolação cúbica e <i>spline</i> .	72
Figura 35 – Tempo de execução (em segundos) da interpolação em cada algoritmo.	72
Figura 36 – Nova célula unitária do grafo em grade direcionado com <i>feedback</i> , obtida a partir de 32a, com parâmetro de deslocamento fracionário $a = 1/3$ e $a = 2/3$ .	73
Figura 37 – Imagens em escala de cinza, $256 \times 256$ pixels, utilizadas para os testes de qualidade de interpolação.	86

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Energia do erro cometido na interpolação de um sinal artificial como o da Fig. 33c, utilizando o algoritmo proposto e outros métodos típicos de interpolação de imagem. . . . .	70
Tabela 2 – Energia do erro entre a imagem reconstruída por interpolação e sua versão original, consideradas as dimensões de $255 \times 255$ pixels. . . . .	71

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{V}$	Conjunto dos $N =  \mathcal{V} $ vértices de um grafo.
$\mathcal{E}$	Conjunto das $E =  \mathcal{E} $ arestas de um grafo.
$\mathcal{N}_i$	Conjunto dos vértices adjacentes ao vértice $v_i$ de um grafo.
$\mathbf{A}$	Matriz de adjacência. Se diagonalizável, $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$ .
$\mathcal{G}$	Um grafo qualquer. Pode ser representado como $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ou, como será comum ao longo da dissertação, $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ .
$\mathcal{S}$	Espaço de sinais definidos sobre um certo grafo $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ .
$\{\mathbf{v}_\ell\}$	Conjunto dos autovetores da matriz de adjacência, com $\ell = 0, \dots, N - 1$ .
$\lambda_i$	Autovalor da matriz de adjacência associado ao autovetor $\mathbf{v}_i$ , satisfazendo $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ .
$\mathbf{L}$	Matriz Laplaciana. Se diagonalizável, $\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^{-1}$ .
$\{\mathbf{u}_\ell\}$	Conjunto dos autovetores da matriz Laplaciana, com $\ell = 0, \dots, N - 1$ .
$\gamma_i$	Autovalor da matriz Laplaciana associado ao autovetor $\mathbf{u}_i$ , satisfazendo $\mathbf{L}\mathbf{u}_i = \gamma_i\mathbf{u}_i$ .
$\mathbf{F}$	Matriz da transformada discreta de Fourier (DFT), com entradas $F_{n,k} = \exp(-j\frac{2\pi}{N}nk)$ , com $j \triangleq \sqrt{-1}$ .
$\mathbf{B}$	Matriz de incidência orientada de um grafo.
$\hat{\mathbf{x}}$	Transformada de Fourier sobre grafos de $\mathbf{x}$ segundo $\text{GSP}_A$ : $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$ .
$\tilde{\mathbf{x}}$	Transformada de Fourier sobre grafos de $\mathbf{x}$ segundo $\text{GSP}_L$ : $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}$ .
$\text{diag}(\cdot)$	Função que cria uma matriz diagonal com o vetor-coluna que lhe serve de argumento, ou toma uma matriz diagonal e retorna sua diagonal principal em forma de vetor-coluna. É uma notação informal emprestada de <i>softwares</i> de computação numérica, como o Matlab <sup>®</sup> .
$\odot$	Produto de Hadamard, ou produto ponto-a-ponto, entre vetores, de modo que, dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{C}^N$ , $\mathbf{a} = \mathbf{b} \odot \mathbf{c} \iff a_i = b_i c_i$ .
$\mathbf{M}^T$	Versão transposta da matriz $\mathbf{M}$ .

$M^H$  Versão transposta conjugada da matriz  $M$ .

$\omega : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$  Função de ponderação das arestas de um grafo, usada ao comentar a teoria de  $\text{GSP}_L$ .

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS SOBRE GRAFOS</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Teoria dos grafos: apresentando a terminologia</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Definindo o sinal e seu domínio</b>	<b>23</b>
2.2.1	Inferindo grafos	25
<b>2.3</b>	<b>GSP<sub>A</sub>: grafos e o processamento algébrico de sinais</b>	<b>25</b>
2.3.1	Filtros sobre grafos	26
2.3.2	A transformada de Fourier sobre grafos	27
2.3.3	O domínio da frequência	28
2.3.4	Aplicação	33
<b>2.4</b>	<b>GSP<sub>L</sub>: a teoria espectral de grafos em GSP</b>	<b>34</b>
2.4.1	O operador diferença e a GFT	36
2.4.2	Filtragem	38
2.4.3	Aplicações	40
<b>2.5</b>	<b>Algumas oportunidades de estudo</b>	<b>44</b>
<b>3</b>	<b>OPERADORES PARA DESLOCAMENTO DE SINAIS SOBRE GRAFOS</b>	<b>47</b>
<b>3.1</b>	<b>A matriz de adjacência</b>	<b>47</b>
3.1.1	O caso para grafos acíclicos direcionados	49
<b>3.2</b>	<b>O operador <i>translação generalizada</i></b>	<b>50</b>
<b>3.3</b>	<b>A matriz de translação de Girault</b>	<b>54</b>
<b>3.4</b>	<b>Discussão</b>	<b>56</b>
<b>4</b>	<b>DESLOCAMENTO FRACIONÁRIO DE SINAIS SOBRE GRAFOS</b>	<b>58</b>
<b>4.1</b>	<b>A abordagem clássica para o deslocamento não-inteiro de sinais</b>	<b>58</b>
<b>4.2</b>	<b>Deslocamento fracionário de sinais sobre grafos</b>	<b>61</b>
4.2.1	Interpretando o operador $A^a$	62
4.2.2	O caso para grafos em anel: sinais de tempo discreto	63
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO: INTERPOLAÇÃO EM IMAGENS</b>	<b>67</b>
<b>5.1</b>	<b>Descrição matricial</b>	<b>68</b>
<b>5.2</b>	<b>Resultados e limitações</b>	<b>70</b>
<b>5.3</b>	<b>Possíveis melhorias</b>	<b>72</b>

<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>74</b>
<b>6.1</b>	<b>Trabalhos futuros</b> . . . . .	<b>74</b>
<b>6.2</b>	<b>Trabalhos publicados</b> . . . . .	<b>75</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>76</b>
	<b>APÊNDICE</b> . . . . .	<b>80</b>
	<b>ANEXO</b> . . . . .	<b>86</b>

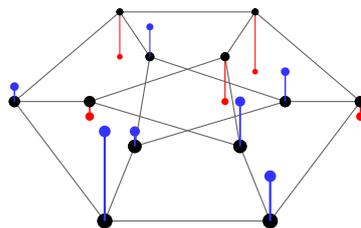
## 1 INTRODUÇÃO

Dados de variáveis multidimensionais definidos sobre estruturas de rede são a todo instante gerados, armazenados e processados em sistemas relacionados às diversas áreas da engenharia e da tecnologia. Medições em um conjunto de sensores e dispositivos de Internet das Coisas (ALAM; SAINI; SADDIK, 2015; GUO et al., 2016; MA; YAO; YAO, 2016; YU et al., 2016), número de citações em uma rede de colaboração científica ou relações em mídias sociais (*collaboration graph*, ou *social graph*) (CHUNG, 2010), interações entre indivíduos em um ecossistema (*ecological networks*) (GOLUBSKI et al., 2016), são alguns exemplos de aplicações em que os dados obtidos estão intimamente ligados à topologia da rede sobre a qual estão definidos.

Estes sistemas, que geram dados multivariados, não somente estão presentes em várias aplicações, mas estão crescendo exponencialmente em número, com a miniaturização e barateamento de diversos tipos de sensores e a consolidação de conceitos como *cloud storage/computing* e *Big Data*, como indica um relatório do McKinsey Global Institute (MCKINSEY et al., 2011). Este mesmo estudo demonstra que, aliada à abundância dos dados, está a importância crescente da informação que deles pode ser extraída, uma vez que o processamento adequado destes dados massivos e multivariados será um requisito fundamental para o bom desempenho de empresas na economia daqui em diante. Outro fator que alimenta a necessidade pelo bom manuseio de dados definidos sobre estruturas irregulares é o crescimento da pesquisa em *smart cities*, que busca aproveitar o imenso fluxo de dados (que já são ou que ainda podem ser) gerados nas cidades para prover ou otimizar soluções para problemas urbanos (JAIN; MOURA; KONTOKOSTA, 2014).

Todos esses exemplos trazem sistemas com uma característica comum: sua estrutura em rede pode naturalmente ser modelada por um grafo (MEI; MOURA, 2016), a cujos vértices estejam associadas variáveis de interesse, como na Fig. 1. É com essa ótica que surgiu e tem se desenvolvido o campo de *processamento de sinais sobre grafos* (referido doravante pelo acrônimo GSP, do inglês *graph signal processing*), um ferramental teórico criado na última década para estender os métodos clássicos de processamento de sinais para os casos em que o domínio em questão é irregular, representado por um grafo arbitrário. O campo de pesquisa ainda é amplo, e muitas têm sido as contribuições, mas duas grandes abordagens ganharam corpo ao longo dos anos. A primeira baseia-se na teoria espectral de grafos e analisa sinais definidos sobre grafos não-direcionados com pesos reais não-negativos, utilizando a matriz Laplaciana do grafo para construir uma base para o espaço de sinais (SHUMAN et al., 2013); e a segunda é baseada em processamento algébrico de sinais, utilizando a matriz de adjacência ponderada como bloco elementar. Esta abordagem considera sinais definidos tanto em grafos direcionados como não-direcionados, e com pesos de valores reais ou complexos (SANDRYHAILA; MOURA, 2014a).

**Figura 1** – Exemplo de sinal definido sobre um grafo. As arestas do grafo representam relações de dependência, ou semelhança, entre as amostras do sinal.



Fonte: o autor.

Uma das razões pelas quais a área de pesquisa de GSP é tão fecunda, é que a definição do domínio de um sinal como sendo um grafo leva a uma série de dificuldades em conceitos fundamentais de processamento de sinais. Tomemos como exemplo a translação unitária de um sinal  $x[n]$  para a direita, feita em DSP<sup>1</sup> por uma simples substituição de variáveis  $x[n - 1]$ . Para o sinal da Fig. 1, o que significa deslocá-lo para a direita? Evidentemente o sentido de direita e esquerda é inexistente para grafos em geral. Sobre este problema, Shuman *et al.* comentam que uma possibilidade ingênua seria rotular os  $N$  vértices do grafo, de  $v_0$  até  $v_{N-1}$ , de modo que a amostra  $x[n]$  seja definida sobre o vértice  $v_n$ , pois dessa forma o sinal deslocado de uma unidade poderia ser definido como o resultado da atribuição cada amostra  $x[n]$  do sinal original ao vértice  $v_{(n-1) \bmod N}$ . Tal opção, no entanto, não é adequada, porque sua repetibilidade depende da forma como os vértices são nomeados (SHUMAN *et al.*, 2013). Este exemplo ilustra como um conceito tão simples em DSP, como o deslocamento unitário do sinal, pode merecer estudo e atenção particulares em GSP.

O filtro de deslocamento unitário de um sinal de tempo discreto está intimamente ligado ao filtro de deslocamento fracionário, uma vez que ambos são resultado da amostragem da função  $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$  deslocada (como será visto no Capítulo 4). Isso sugere que o estudo de operadores de deslocamento de sinais sobre grafos pode revelar algum método para interpolação de sinais em GSP, um problema cujas soluções, até agora, geralmente consideram a recuperação de amostras perdidas em certos vértices do grafo (CHEN *et al.*, 2015; SEGARRA *et al.*, 2015). Pensando em termos de um deslocamento incompleto, uma difusão intermediária do sinal sobre o grafo, vislumbra-se a possibilidade de ter a interpolação do sinal *entre dois vértices*. Isso poderia encontrar aplicações em problemas envolvendo sinais variantes no tempo e propagação de distúrbios em sinais sobre grafos, que ainda apresentam várias questões em aberto (GRASSI; PERRAUDIN; RICAUD, 2016).

Com estas motivações, o presente trabalho tem por objetivos

- realizar um estudo comparativo entre os principais operadores de deslocamento de sinais sobre grafos,
- escolher um dos operadores para fundamentar a criação de um operador de deslocamento

<sup>1</sup> Acrônimo de *digital signal processing*, utilizado para se referir à teoria clássica de processamento digital de sinais de tempo discreto.

fracionário em GSP,

- avaliar a consistência entre o operador proposto e o filtro de deslocamento fracionário ideal, de DSP, utilizando para isso o grafo direcionado em anel, que modela o domínio de tempo discreto e duração finita, e
- estudar a viabilidade da aplicação do operador proposto na interpolação de sinais sobre grafos, encontrando novas amostras para o sinal que residam sobre as arestas (i.e., entre os vértices) do grafo.

Tendo em vista a aplicação do deslocamento fracionário na interpolação de um sinal sobre um grafo, vista como uma difusão intermediária de suas amostras, foi escolhida a matriz de adjacência como operador de deslocamento unitário, e o resultado foi que o operador proposto apresentou interpretações levemente diferentes para grafos direcionados e não-direcionados, sugerindo que a aplicação em interpolação seja mais promissora para grafos direcionados. Embora não tenha sido possível aplicar o operador para este fim, obtendo novas amostras sobre as arestas do grafo, um algoritmo utilizando o deslocamento fracionário em grafos em anel foi criado para interpolação de imagens. Também foi verificada boa concordância entre o operador proposto e aquele da teoria clássica.

Esta dissertação está dividida como segue. O Capítulo 2 traz uma revisão breve da literatura de GSP, apresentando as suas duas principais abordagens e algumas aplicações. O Capítulo 3 dedica-se a apresentar os principais operadores de deslocamento, ou translação, de sinais sobre grafos, mostrando suas características e fundamentando a escolha de um deles para criar o operador de deslocamento fracionário, que é apresentado no Capítulo 4, onde suas propriedades e limitações são discutidas. O Capítulo 5 traz uma aplicação do operador proposto, na criação de um algoritmo para interpolação de imagens, e uma avaliação da sua qualidade em comparação com outros métodos conhecidos para interpolação, em termos do erro do sinal interpolado e do tempo de execução. Por fim, são elencadas possibilidades de trabalhos futuros, e as conclusões deste estudo. Nos Apêndices, foram incluídas as demonstrações (produzidas pelo autor, a menos que explicitamente indicado) de alguns teoremas e afirmações colocadas no texto, e nos Anexos estão as imagens utilizadas para teste do algoritmo proposto de interpolação de imagens.

Finalmente, cabe neste ponto mencionar as ferramentas utilizadas neste trabalho, para que o leitor interessado as conheça e utilize se julgar apropriado. Há duas *toolboxes* para Matlab criadas com a finalidade de implementar as operações em GSP. A primeira chama-se GSPBox, desenvolvida pelo *Signal Processing Laboratory LTS2 da Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne EPFL*, e está disponível no endereço <<https://lts2.epfl.ch/gsp/>>. O segundo pacote para Matlab é o GraSP, criado por Benjamin Girault, que implementa algumas ferramentas da sua teoria de sinais estacionários sobre grafos (que não cobriremos neste trabalho), inclusive o seu operador de *graph translation*, discutido na Seção 3.3. O pacote GraSP está disponível em <<https://gforge.inria.fr/projects/grasp/>>.

---

Por não dispor do Matlab, e por problemas de incompatibilidade ao tentar executar o GSPBox no Octave (alternativa *open source* ao Matlab, utilizado aqui para executar os códigos escritos para o Capítulo 5), todos os códigos para visualização e análise espectral de sinais sobre grafos, para esta dissertação, foram escritos pelo autor em Python (exceto quando explicitamente indicado), utilizando os pacotes Numpy, Scipy e Matplotlib. Todas as imagens foram feitas pelo autor, exceto quando explicitamente indicado, e para muitas delas foi utilizado o programa LaTeXDraw.

## 2 PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS SOBRE GRAFOS

A área de GSP herda e mescla todos os conceitos basilares da teoria clássica de processamento de sinais e da teoria de grafos, visando construir uma estrutura coesa de definições e ferramentas útil para os desafios mencionados anteriormente. Neste capítulo, serão apresentadas as principais definições e conceitos introdutórios, necessários para as discussões seguintes.

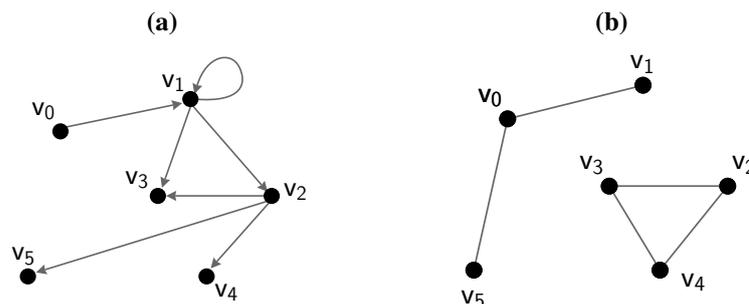
### 2.1 Teoria dos grafos: apresentando a terminologia

Um *grafo* é definido em sua forma mais geral como sendo o par  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , onde  $\mathcal{V}$  é um conjunto qualquer (cujos elementos chamam-se *vértices*) e  $\mathcal{E}$  (conjunto das *arestas*) é um subconjunto de  $\mathcal{V}^2$  (FEOFILOFF; KOHAYAKAWA; WAKABAYASHI, 2011). Para os propósitos de GSP, convém definir um grafo como sendo a estrutura  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$  dotada de um conjunto de vértices  $\mathcal{V}$  cujas inter-relações são capturadas pelas entradas da matriz de adjacência ponderada  $\mathbf{A}$ : se a entrada  $A_{i,j} \neq 0$ , então o vértice  $v_j \in \mathcal{V}$  influencia o vértice  $v_i \in \mathcal{V}$  (eles são ditos *adjacentes*) e diz-se que há uma aresta de  $v_j$  para  $v_i$  com peso  $A_{i,j}$ . A soma dos pesos das arestas incidentes em um vértice  $v_i$  será chamada *grau de entrada* de  $v_i$  (do inglês *indegree*), ou  $d_i^-$ , enquanto se denotará por *grau de saída* (do inglês *outdegree*)  $d_i^+$  a soma dos pesos das arestas que partem de  $v_i$ .

O grafo é dito *direcionado* (ou dirigido, orientado, ou simplesmente um digrafo) se e somente se a matriz  $\mathbf{A}$  não é simétrica, caso em que as arestas são representadas pictoricamente por setas para indicar a relação unidirecional entre os vértices. Em caso contrário, o grafo é dito *não-direcionado*, pois a relação de influência (dependência, proximidade) entre vértices adjacentes é mútua e simétrica. Nesse caso,  $d_i^- = d_i^+ = d_i$  (grau do vértice  $v_i$ ), e diz-se que um grafo é *d-regular* se todos os seus vértices têm grau  $d$ . A Fig. 2 mostra exemplos de grafos direcionado e não-direcionado.

A matriz de adjacência é um operador basilar para um dos conjuntos de ferramentas

**Figura 2** – Exemplos de grafos (a) direcionado e (b) não-direcionado, definidos sobre o mesmo conjunto de vértices.



Fonte: o autor.

de GSP, por motivo que ficará claro adiante, mas outra matriz é frequentemente usada em processamento de sinais sobre grafos, na vertente oriunda de teoria espectral de grafos. Trata-se da *matriz Laplaciana*, dada por  $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ , com  $\mathbf{D}$  sendo a *matriz de grau* do grafo, uma matriz diagonal com a  $i$ -ésima entrada igual ao grau do vértice  $v_i$ . A depender da aplicação, pode-se escolher tomar a matriz de grau de entrada ou de saída, embora seja mais comum utilizar ferramentas de processamento via matriz Laplaciana em grafos não-direcionados.

Chama-se *laço* uma aresta que *parte de e chega a* um mesmo vértice. Fala-se em *múltiplas arestas* sempre que a um único par de vértices estão associadas duas ou mais arestas. Um grafo não-direcionado é dito *simples* se ele não possui laços nem múltiplas arestas.

Um grafo *completo* de  $N$  vértices, representado por  $K_N$ , é aquele em que quaisquer dois vértices tomados em  $\mathcal{V}$  são adjacentes. Processamento de sinais sobre  $K_N$ , como será evidente adiante, é em geral muito custoso para grafos não-triviais, pois a complexidade computacional das tarefas depende fortemente do número de arestas do grafo. Para a maior parte das aplicações, deseja-se que o grafo tenha poucas arestas, mas seja *conexo*, i. e. que para quaisquer dois vértices  $v_i, v_j \in \mathcal{V}$  exista um *caminho* (conjunto de arestas distintas com vértices em comum) ligando  $v_i$  a  $v_j$ . Em termos da matriz de adjacência, isso equivale a dizer que um grafo é conexo se e somente se para todo par  $(v_i, v_j) \in \mathcal{V}^2$ , existe uma sequência de inteiros menores ou iguais a  $N$ , como  $(i, k, \ell, m, \dots, n, j)$ , tal que as entradas  $A_{ik}, A_{k\ell}, A_{\ell m}, \dots, A_{nj}$  de  $\mathbf{A}$  são todas não nulas (se alguma dessas entradas for nula, então estará faltando uma aresta para completar o caminho de  $v_i$  a  $v_j$ ).

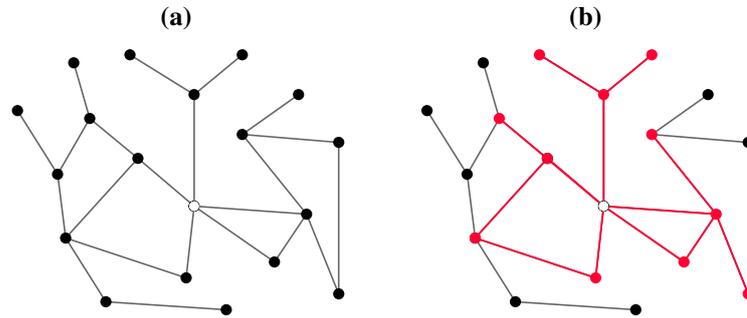
Chamaremos de grafos *ponderados* aqueles em que a cada aresta associa-se um valor numérico (um *peso*), e *não-ponderados* caso contrário (as entradas da matriz de adjacência relativas a vértices adjacentes, nesse caso, são todas unitárias). Um grafo é dito *cíclico* se ele possuir algum caminho fechado (i. e., um caminho que começa e termina no mesmo vértice), e *acíclico* caso contrário.

Um *subgrafo* de  $\mathcal{G}$  é um grafo  $\mathcal{G}'$  cujos vértices e arestas formam subconjuntos dos conjuntos de vértices e arestas de  $\mathcal{G}$ . Uma *componente conexa* de um grafo  $\mathcal{G}$  é um subgrafo conexo de  $\mathcal{G}$ , como podemos exemplificar pela Fig. 2b, na qual o grafo representado possui 2 componentes conexas.

Pode-se definir a vizinhança de um vértice  $v_i$  como  $\mathcal{N}_i$ , o conjunto de vértices adjacentes a  $v_i$ . Denota-se por  $\mathcal{N}(i, K)$  o conjunto de vértices conectados a  $v_i$  por um caminho com  $K$  ou menos arestas, como uma vizinhança dentro de um raio  $K$ . A Fig. 3 ilustra essa definição.

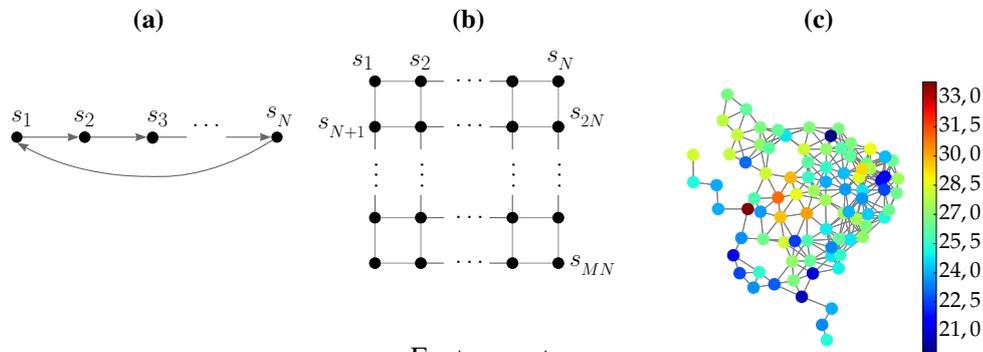
Para uma introdução de boa qualidade à Teoria dos Grafos, com um glossário em português bem mais extenso do que o aqui apresentado, o autor recomenda as publicações de Feofiloff *et al.* (FEOFILOFF; KOHAYAKAWA; WAKABAYASHI, 2011) e Lucchesi (LUCCHESI, 1979). Boas referências na literatura inglesa seriam (BONDY; MURTY, 2008; CHUNG, 1997). O leitor poderá voltar a esta seção sempre que, ao longo da dissertação, encontrar dificuldade com algum

**Figura 3** – (a) Um grafo  $e$ , em vermelho, (b) o conjunto de vértices  $\mathcal{N}(i, 2)$  em que  $v_i$  é o vértice branco.



Fonte: o autor.

**Figura 4** – Exemplos de representações de sinais sobre (a) um grafo em anel direcionado, (b) um grafo não-direcionado em forma de grade retangular uniforme e (c) um grafo formado por cidades do Nordeste brasileiro.



Fonte: o autor.

termo utilizado da Teoria de Grafos.

## 2.2 Definindo o sinal e seu domínio

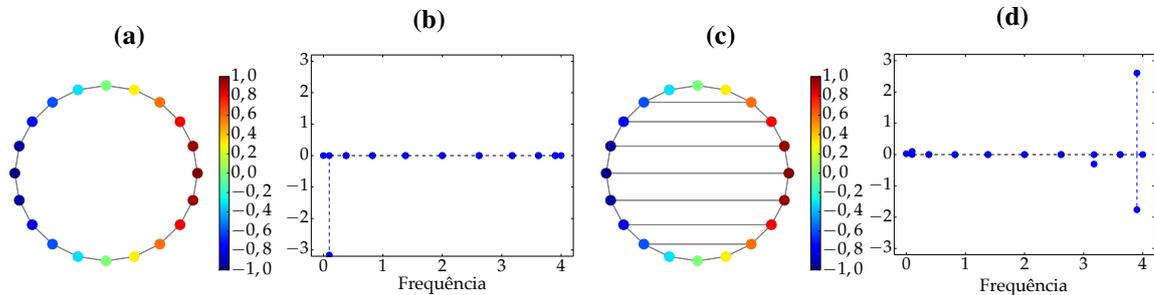
Um sinal  $s$  sobre um grafo  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ , com  $|\mathcal{V}| = N$ , é definido como uma função discreta que mapeia o conjunto de vértices do grafo em um conjunto de grandezas escalares, usualmente os números complexos ou reais,

$$s : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C} \mid s(v_i) = s_i, \tag{2.1}$$

de modo que um sinal definido sobre  $\mathcal{G}$  é um vetor em  $\mathbb{C}^N$  indexado pelos vértices de  $\mathcal{G}$ . Uma vez que se determina uma rotulação e ordem específica para os elementos de  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$ , não há ambiguidade em representar o sinal como o vetor  $\mathbf{s} = (s_0 \ s_1 \ \dots \ s_{N-1})^T$ ,  $s_i \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq i \leq N - 1$ . Representa-se por  $\mathcal{S}$  o espaço de sinais definidos sobre um certo grafo  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ .

A Fig. 4 traz exemplos de representações de sinais sobre grafos, nos quais a rotulação dos vértices é implícita (o vértice  $v_i$  é aquele associado à amostra  $s_i$ ) e os valores das amostras dos sinais é indicada de duas formas. A representação na qual as amostras são indicadas numericamente, próximas aos vértices (usada nas Figs. 4a e 4b), prioriza a exposição dos valores

**Figura 5** – Um mesmo sinal é definido sobre (a) um grafo não-direcionado em anel e (c) um grafo derivado daquele em anel, mas com topologia distinta. (b) Espectro de Fourier, segundo  $GSP_L$  (segundo definido na Subseção 2.4.1), do sinal sobre o grafo em (a) e (d) em (c).



Fonte: o autor.

do sinal, mas não é conveniente para grafos com mais de poucas dezenas de vértices, por dificultar a leitura. Por isso ao longo desta dissertação a representação mais usada será aquela da Fig. 4c, que faz uso de uma escala de cores. Por ora, o leitor pode ter-se indagado sobre a própria *construção* do grafo para o caso de sinais reais, como aquele obtido de medições de temperatura na Fig. 4c, o que de fato não é uma questão trivial e será abordada na subseção a seguir.

Um sinal de comprimento finito e de tempo discreto é modelado pelo grafo em anel direcionado (a menos que explícito, considera-se os pesos unitários), como mostrado na Fig. 4a: a noção de evolução temporal é capturada pelas arestas direcionadas, enquanto a periodicidade imposta pelas condições de fronteira da análise de Fourier de tempo discreto é modelada pela aresta realimentando a última amostra à primeira. Outros sinais de origem prática têm seus respectivos grafos facilmente identificáveis: o grafo em grade regular da Fig. 4b é um possível modelo para imagens digitais (SANDRYHAILA; MOURA, 2012), onde a dependência entre pixels é aproximada para existir apenas entre vizinhos, e o grafo na Fig. 4c é um exemplo de grafo de rede de sensores, com pesos das arestas sendo tomado como o inverso da distância euclidiana, sobre o qual definiu-se o sinal da temperatura de bulbo seco à meia-noite de 01 de fevereiro de 2012 em várias cidades do Nordeste brasileiro<sup>1</sup>.

As características espectrais de um sinal dependem fortemente do domínio sobre o qual ele é definido, mas não faz sentido reconhecer essa dependência em Processamento Clássico de Sinais porque nele trabalha-se apenas com domínios regulares e uniformes<sup>2</sup>. Diz-se que um sinal contém majoritariamente baixas frequências se amostras *adjacentes* têm valores *próximos*, e altas frequências se têm valores *dísparos*. Ao considerar-se sinais definidos sobre grafos, fica evidente que a noção de amostras adjacentes depende da topologia do grafo em questão, e portanto *um mesmo sinal pode apresentar espectros distintos se definido sobre grafos diferentes*. A Fig. 5

<sup>1</sup> Fonte: Banco de Dados Meteorológicos para Ensino e Pesquisa (BDMEP) do Instituto Nacional de Meteorologia. Acesso gratuito após cadastro, disponível em: <<http://www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=bdmep/bdmep>>

<sup>2</sup> Mesmo quando se aborda *amostragem não-uniforme*, contexto no qual se poderia dizer que o sinal discreto é definido sobre um domínio não-regular, as técnicas desenvolvidas ainda visam *recuperar* o sinal em um domínio – de tempo – tipicamente regular.

confirma essa intuição, apresentando o espectro de um sinal segundo a base de autovetores da matriz Laplaciana do grafo, para dois grafos distintos. O leitor deve perceber que, na Fig. 5c as amostras de maior valor são adjacentes àquelas de menor valor, o que causa componentes de maior frequência do que se o grafo usado como domínio fosse um anel a pesos constantes (Fig. 5a).

### 2.2.1 Inferindo grafos

Em algumas situações em GSP, dispõe-se de um conjunto de dados, um ou mais sinais, mas não se tem o grafo subjacente. Informações sobre o contexto da aplicação e o fenômeno que gerou o sinal, no entanto, geralmente sugerem um ou outro método adequado para se estimar o grafo em questão.

Para grafos de sensores<sup>3</sup> (não-direcionados), por exemplo, como na Fig. 4c, ponderar as arestas utilizando uma distribuição gaussiana sobre a distância euclidiana,

$$A_{i,j} = \exp\left(\frac{-\text{dist}(v_i, v_j)}{2\theta^2}\right), \quad (2.2)$$

é muitas vezes adequado. Um limiar  $T$  é escolhido tal que, se  $\text{dist}(v_i, v_j) > T$ , então faz-se  $A_{i,j} = 0$ , e os parâmetros  $T$  e  $\theta$  são determinados segundo indicar a aplicação.

No entanto, o uso do critério em (2.2) pode levar a um compromisso entre manter o grafo conexo e obter uma matriz de adjacência esparsa. Se a distância entre um certo vértice e seu vizinho mais próximo for muito maior do que a distância média entre vértices e seus vizinhos mais próximos, fazer com que o grafo seja conexo implica impor um limiar  $T$  grande, e por consequência ter muitas arestas. Para contornar esse problema, e ainda obter um grafo que capture razoavelmente as inter-relações entre os vértices, uma alternativa é ligar um vértice aos  $K$  mais próximos, ponderando as arestas segundo uma distribuição gaussiana, ou o inverso da distância euclidiana, ou segundo pedir a aplicação.

Essas técnicas supõem que há uma métrica de distância adequada para avaliar a similaridade esperada entre as amostras de certo par de vértices. Mas, dada a diversidade de possibilidades de sinais e aplicações, frequentemente estimar a topologia do grafo subjacente a certo conjunto de dados já constitui um desafio em si (MEI; MOURA, 2016; SARDELLITTI; BARBAROSSA; LORENZO, 2016).

## 2.3 GSP<sub>A</sub>: grafos e o processamento algébrico de sinais

Em 2006, Püschel e Moura publicaram sua teoria de processamento algébrico de sinais (ASP, do inglês *algebraic signal processing*) (PÜSCHEL; MOURA, 2006; PÜSCHEL; MOURA, 2008b; PÜSCHEL; MOURA, 2008a), que estende a teoria clássica ao abordar processamento de

<sup>3</sup> Quando não é especificado em contrário, chama-se *grafo de sensores* um grafo conectado com vértices distribuídos uniformemente numa região do plano.

sinais como um arcabouço consistindo de uma álgebra  $\mathcal{A}$  (espaço vetorial cujos vetores formam um anel, i. e. dotado de multiplicação entre seus elementos), um  $\mathcal{A}$ -módulo  $\mathcal{M}$  (espaço vetorial sobre o mesmo corpo base que  $\mathcal{A}$  e que admite ser operado à esquerda por elementos de  $\mathcal{A}$ ) e uma transformação linear  $\Phi$ .  $\mathcal{A}$  é dito o espaço dos filtros,  $\mathcal{M}$  é o espaço de sinais e  $\Phi$  é a transformada (homomorfismo sobre  $\mathcal{M}$ ) de Fourier associada à estrutura.

Uma noção fundamental ao definir uma tripla  $(\mathcal{A}, \mathcal{M}, \Phi)$  é a de *operador de deslocamento unitário*, pois em ASP tal operador é justamente o elemento gerador de  $\mathcal{A}$ . Por exemplo, ao estudar sinais de tempo discreto e de comprimento finito (digamos,  $N$ ), ASP indica que tais sinais pertencem à estrutura algébrica em que  $\mathcal{A}$  é a álgebra polinomial  $\mathbb{C}[x] \setminus (x^N - 1)$ , ou  $\mathcal{A} = \{\sum_{\ell=0}^{N-1} h_{\ell} x^{\ell} | h_{\ell} \in \mathbb{C}\}$ , com os sinais representados por  $s = \sum_{\ell=0}^{N-1} s_{\ell} x^{\ell}$ . Um deslocamento unitário de  $s$  corresponde à multiplicação por  $x$ , que é justamente o elemento gerador da base  $(x^k)_{k=0, \dots, N-1}$  de  $\mathcal{A}$ . Ao deparar-se com o problema da definição de processamento de sinais sobre grafos, Moura utilizou a ideia de ASP e buscou um operador de deslocamento de sinais sobre grafos para, então, gerar a base de sua álgebra.

Observando a matriz de adjacência do grafo em anel direcionado,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

percebeu-se que ela realiza este papel fundamental: se um sinal  $\mathbf{s} = (s_1 \ s_2 \ \dots \ s_N)^T$  definido em um grafo em anel é multiplicado à esquerda por sua matriz de adjacência, tem-se  $\mathbf{s}^{(1)} = (s_N \ s_1 \ \dots \ s_{N-1})^T$ . Ou seja,

$$\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{C}\mathbf{s}, \quad (2.4)$$

e a generalização foi imediata: definiu-se o *operador de deslocamento unitário como sendo a matriz de adjacência do grafo sobre o qual o sinal está definido*. Por isso, neste trabalho, a vertente de GSP derivada da teoria de processamento algébrico de sinais será representada por  $\text{GSP}_{\mathbf{A}}$ , para indicar o papel fundamental exercido pela matriz de adjacência.

Para um sinal  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$  sobre um grafo qualquer  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ ,  $\mathbf{A}$  age como um *filtro* de atraso (ou de deslocamento) sobre  $\mathbf{x}$ , e a versão deslocada deste sinal é representada por  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . No capítulo seguinte, mais será falado a respeito desta função da matriz de adjacência.

### 2.3.1 Filtros sobre grafos

Observar a matriz de adjacência como um filtro levou a sugerir a definição de um filtro de sinais sobre grafos como sendo qualquer matriz  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  (SANDRYHAILA; MOURA, 2013b), uma vez que o produto matriz-vetor sempre resulta num vetor (ou *filtro*  $\times$  *sinal* = *sinal*). Tal definição implica que os filtros sobre grafos são sempre lineares, uma vez que a

distributividade da multiplicação em relação à adição matricial garante que

$$\mathbf{H}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 \mathbf{H}\mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{H}\mathbf{x}_2. \quad (2.5)$$

A propriedade de invariância no tempo (ou invariância ao deslocamento) requer que  $\mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{x} \forall \mathbf{x}$ , i. e. requer que o filtro comute com a matriz de adjacência. Tais filtros são ditos lineares e invariantes ao deslocamento, ou LSI (do inglês *linear and shift-invariant*), e Sandryhaila e Moura demonstraram (SANDRYHAILA; MOURA, 2013a; SANDRYHAILA; MOURA, 2014a) que tais filtros têm a forma

$$h(\mathbf{A}) = \sum_{\ell=0}^{L-1} h_{\ell} \mathbf{A}^{\ell}, \quad (2.6)$$

com  $L$  menor ou igual ao grau do polinômio mínimo  $m_{\mathbf{A}}$  de  $\mathbf{A}$ , i. e. filtros LSI são uma série de potências finita no operador de deslocamento, exatamente como ocorre em processamento clássico de sinais de tempo discreto, em que os filtros LTI têm representação em termos de polinômios em  $z^{-1}$ , pela transformada Z. Além disso, (2.6) indica que os filtros LSI formam uma álgebra polinomial  $\mathbb{C}[x] \setminus m_{\mathbf{A}}(x)$ .

### 2.3.2 A transformada de Fourier sobre grafos

Uma vez que a transformada de Fourier de um sinal é a sua projeção em uma base de funções invariantes à filtragem linear e invariante no tempo (LTI, do inglês *linear and time-invariant*) (OPPENHEIM; WILLSKY; NAWAB, 1997), em  $\text{GSP}_{\mathbf{A}}$  define-se a transformada de Fourier sobre grafos (GFT, do inglês *graph Fourier transform*) como a decomposição de um sinal em termos de uma base de autovetores da filtragem LSI (SANDRYHAILA; MOURA, 2013c).

Seja  $\mathbf{A}$  a matriz de adjacência de um grafo de  $N$  vértices. Se  $\mathbf{A}$  for diagonalizável, tem-se<sup>4</sup>

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}, \quad (2.7)$$

em que  $\mathbf{V}$  contém os  $N$  autovetores de  $\mathbf{A}$  em suas colunas, isto é,

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_0 \ \mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_{N-1}). \quad (2.8)$$

Uma vez que filtros LSI são polinômios na matriz  $\mathbf{A}$ , e sabendo que uma matriz e suas potências inteiras compartilham os mesmos autovetores, as colunas de  $\mathbf{V}$  formam uma base de vetores invariantes à filtragem LSI. Somando a isto o fato de que os subespaços gerados pelos autovetores de um mesmo autovalor de  $\mathbf{A}$  são irredutíveis, têm interseção nula e suas dimensões somam  $N$  (SANDRYHAILA; MOURA, 2013c),  $\mathbf{V}$  fornece uma base invariante à filtragem LSI para o espaço de sinais  $\mathcal{S}$  sobre o grafo que tem  $\mathbf{A}$  por matriz de adjacência.

<sup>4</sup> Se  $\mathbf{A}$  não for diagonalizável, o raciocínio pode ser repetido utilizando-se a forma canônica de Jordan.

Desta forma, um sinal  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$  pode ser decomposto em suas componentes na base  $\mathbf{V}$  como

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \hat{x}_0 \mathbf{v}_0 + \cdots + \hat{x}_{N-1} \mathbf{v}_{N-1} \\ &= \mathbf{V}(\hat{x}_0 \hat{x}_1 \dots \hat{x}_{N-1})^T \\ &= \mathbf{V}\hat{\mathbf{x}},\end{aligned}\tag{2.9}$$

e esta é definida como a equação de síntese da *transformada de Fourier sobre grafos*. A equação de análise da GFT é, portanto,

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}.\tag{2.10}$$

Para o caso de sinais de tempo discreto, foi assinalado que seu domínio é modelado como um grafo direcionado em anel com pesos unitários, com matriz de adjacência  $\mathbf{C}$  dada por (2.3). Uma vez que  $\mathbf{C}$  é circulante, ela é diagonalizada pela matriz da transformada discreta de Fourier (DFT, do inglês *discrete Fourier transform*), representada por  $\mathbf{F}$ ,  $F_{n,k} = \exp(-j\frac{2\pi}{N}nk)$ , que contém em suas linhas os autovetores da DFT. Através do polinômio característico de  $\mathbf{C}$ ,

$$p_{\mathbf{C}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \lambda & & & -1 \\ -1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^N - 1,\tag{2.11}$$

mostra-se que seus autovalores são as  $N$  raízes da unidade. Assim, a diagonalização da matriz  $\mathbf{C}$  pela matriz da DFT é escrita como

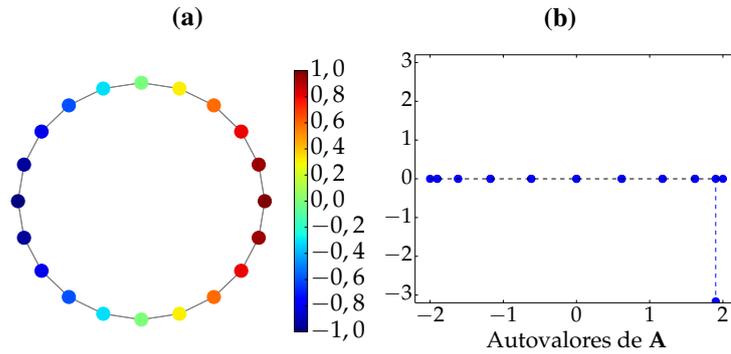
$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{C}}\mathbf{F},\tag{2.12}$$

e vê-se que a matriz da GFT, para grafos em anel, é  $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{F}$ , o que resulta na desejável propriedade de que a GFT de sinais de tempo discreto coincide com a DFT, demonstrando consistência com a teoria clássica.

### 2.3.3 O domínio da frequência

A definição empregada para a GFT sugere, naturalmente, interpretar os autovetores  $\mathbf{v}_i$  da matriz de adjacência como as “componentes de frequência” associadas às *frequências de grafo* representadas pelos autovalores  $\lambda_i$ , exatamente como a componente de Fourier  $e^{-j\Omega t}$ , no domínio do tempo contínuo  $t$ , é associada à frequência  $\Omega$ .

A primeira observação que o leitor pode ter feito é que, a menos que os polinômios característico e mínimo de  $\mathbf{A}$  sejam iguais, isso implica que uma mesma frequência esteja associada a duas ou mais componentes linearmente independentes, como de fato ocorreu, por exemplo, com o sinal na Fig. 6a e seu espectro em 6b. Observando ainda o sinal da Fig. 6, nota-se que embora seja visualmente suave, seu espectro possui componentes associadas a autovalores

**Figura 6** – (a) Sinal sobre um grafo em anel não-direcionado e (b) seu espectro em  $GSP_A$ .

Fonte: o autor.

de grande magnitude, o que levanta a questão de definir um critério coerente para se falar em *altas* e *baixas* frequências de sinais sobre grafos.

Para fundamentar matematicamente a noção de frequência no contexto de GSP, um conceito basilar que importa considerar é o de *variação total* de uma certa métrica  $\mu(\cdot)$ , definida como (RUDIN, 1987)

$$\|\mu\|_V \triangleq \sup_{\mathcal{P}} \sum_i |\mu(E_i)|, \quad (2.13)$$

em que  $\mathcal{P} = \{E_0, E_1, \dots\}$  é o conjunto de todas as partições do domínio da métrica  $\mu$  e *sup* indica o *supremum*, ou o menor limite superior, tomado ao considerar todos os possíveis conjuntos de partições  $\mathcal{P}$ . A definição de variação total aplicada a *funções* provê uma medida do número e da intensidade das oscilações das funções que lhe servem de argumento (MALLAT, 1999). Por exemplo, para uma função  $f$  diferenciável, sua variação total é definida como

$$\|f\|_V = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| dt, \quad (2.14)$$

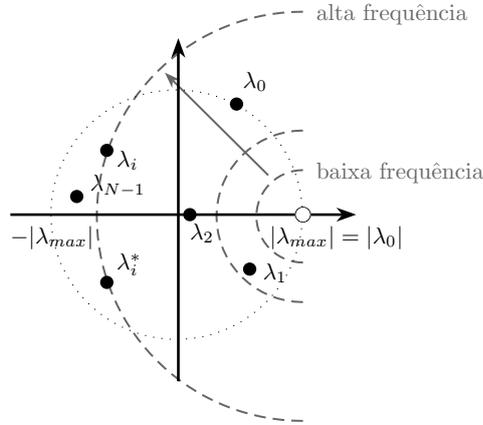
em que as partições do domínio são os intervalos infinitesimais considerados na integração. Para funções  $f_N[n]$  de domínio discreto, a integral de Riemann sobre a derivada é substituída por um somatório das diferenças de primeira ordem,

$$\|f_N\|_V = \sum_p |f_N[n_p + 1] - f_N[n_p]|, \quad (2.15)$$

que, claramente, mede a dessemelhança entre amostras contíguas da função  $f_N$ , o que por sua vez é uma medida intuitiva para frequência. Sandryhaila e Moura utilizaram esta métrica como ponto de partida para sua descrição matemática de frequência em  $GSP_A$ , indicando a variação total de um sinal *de tempo discreto*  $\mathbf{x}$  pela notação

$$TV(\mathbf{x}) = \sum_n |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.16)$$

**Figura 7** – Ordenamento das frequências de sinais sobre grafos, de baixa para alta, no plano complexo.



Fonte: adaptado de (SANDRYHAILA; MOURA, 2014b).

De (2.3) e (2.4), vê-se que (2.16) pode ser reescrita em termos da norma  $\ell_1$ <sup>5</sup> como  $TV(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{C}\mathbf{x}\|_1$ , utilizando a matriz de adjacência do grafo em anel para realizar o deslocamento cíclico do sinal. Os autores, então, ao verem-se diante do problema de encontrar semelhante métrica para a taxa de mudança nos valores de sinais sobre grafos, generalizaram a função  $TV(\cdot)$  para sinais definidos sobre grafos quaisquer, definindo a *variação total sobre grafos* para um sinal  $\mathbf{s}$  sobre o grafo  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$  como

$$TV_G(\mathbf{s}) \triangleq \|\mathbf{s} - \mathbf{A}^{\text{norm}}\mathbf{s}\|_1, \quad (2.17)$$

com  $\mathbf{A}^{\text{norm}} = |\lambda_{\max}|^{-1}\mathbf{A}$  e  $\lambda_{\max}$  o autovalor de  $\mathbf{A}$  com maior módulo. A normalização de  $\mathbf{A}$  visa evitar a magnificação excessiva das amostras do sinal deslocado (SANDRYHAILA; MOURA, 2014b).

Seja  $\mathbf{A}$  diagonalizável como em (2.7), com autovalores (possivelmente complexos) ordenados tais que

$$|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_{N-1}| \triangleq |\lambda_{\max}|, \quad (2.18)$$

associados aos autovetores  $(\mathbf{v}_i)_{i=0,\dots,N-1}$  escolhidos de modo a terem magnitude unitária. Tomando a variação total de um autovetor  $\mathbf{v}_k$  associado a  $\lambda_k$ , tem-se

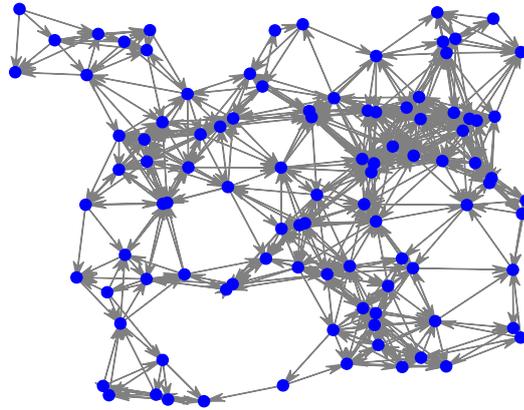
$$\begin{aligned} TV_G(\mathbf{v}_k) &= \|\mathbf{v}_k - \mathbf{A}\mathbf{v}_k\|_1 = \left\| \mathbf{v}_k - \frac{1}{|\lambda_{\max}|} \lambda_k \mathbf{v}_k \right\|_1 \\ &= \left| 1 - \frac{\lambda_k}{|\lambda_{\max}|} \right| \|\mathbf{v}_k\|_1 = \left| \lambda_k - |\lambda_{\max}| \right| \frac{\|\mathbf{v}_k\|_1}{|\lambda_{\max}|} \end{aligned} \quad (2.19)$$

de forma que, como foi feito  $\|\mathbf{v}_k\|_1 = 1$ , tem-se a equivalência

$$\left| \lambda_i - |\lambda_{\max}| \right| \leq \left| \lambda_j - |\lambda_{\max}| \right| \iff TV_G(\mathbf{v}_i) \leq TV_G(\mathbf{v}_j), \quad (2.20)$$

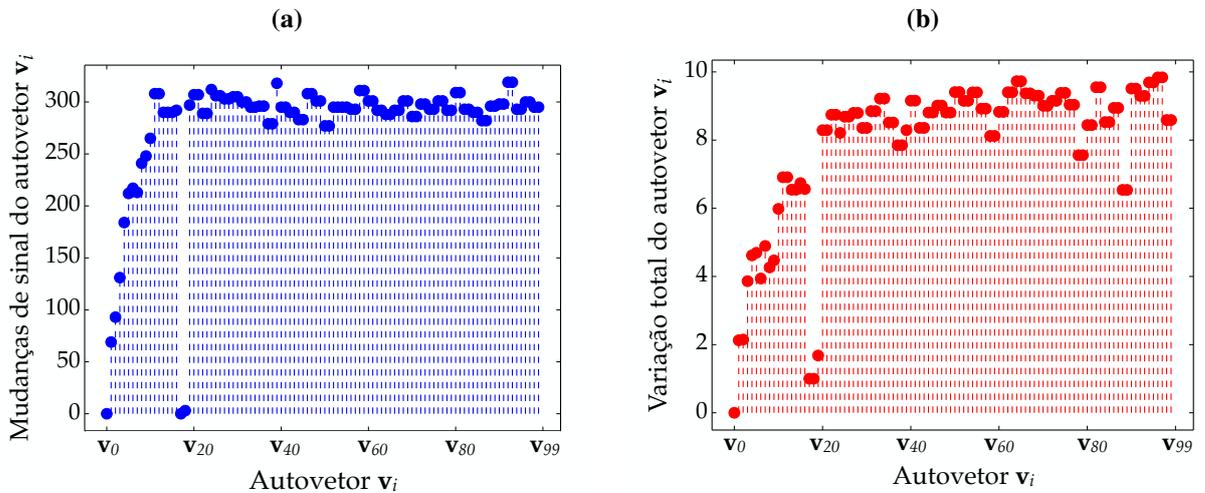
<sup>5</sup> Ao longo do trabalho, serão com frequência usados os conceitos de norma  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , casos particulares da norma  $\ell_n$  de um vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ , definida como  $\|\mathbf{x}\|_n \triangleq \left( \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^n \right)^{1/n}$ .

**Figura 8** – Grafo de sensores direcionado, com 100 vértices, sem laços ou múltiplas arestas.



Fonte: o autor.

**Figura 9** – (a) Número de mudanças de sinal e (b) variação total dos autovetores  $(\mathbf{v}_i)_{i=0,\dots,N-1}$  da matriz  $\mathbf{A}$ , ordenados de modo que os respectivos autovalores se disponham do mais próximo ao mais distante do ponto real  $|\lambda_{max}|$  no plano complexo. Ou seja, segundo (2.20) e a Fig. 7, os autovetores estão dispostos em ordem crescente de frequência.

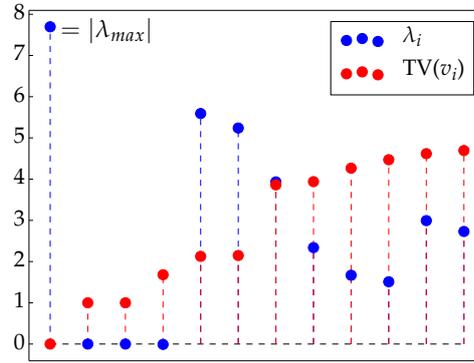


Fonte: o autor.

ou seja, componentes de frequência associadas a autovalores mais próximos do ponto  $|\lambda_{max}|$  no plano complexo são mais suaves e são, portanto, ditas de *baixa frequência*. A Fig. 7 ilustra esse ordenamento para as frequências de grafos, o que esclarece a leitura do espectro do sinal na Fig. 6a, cuja matriz de adjacência tem autovalores reais.

Para verificar visualmente a consistência da noção de frequência dada acima, tomemos o grafo direcionado da Fig. 8. O número de mudanças de sinal (contabilizado como o número de arestas ligando vértices com amostras de sinal distinto) e a variação total de cada autovetor da matriz de adjacência do grafo são mostrados na Fig. 9. Ambas as métricas visam quantificar a variação brusca de valor num sinal sobre o grafo, e ambas se comportam de modo semelhante,

**Figura 10** – Em vermelho são mostrados os 12 menores valores de variação total, relativos aos autovetores associados aos autovalores representados em azul.



Fonte: o autor.

mas *não igual*, ao esperado segundo a definição de frequência apresentada anteriormente, e representada na Fig. 7. Pode-se rapidamente encontrar, por exemplo, pares de autovetores em que aquele que deveria ter maior frequência tem menor variação total. Outro fato curioso é que pode-se ver, em ambos os gráficos da Fig. 9, que o autovetor  $v_{20}$  e alguns outros têm valores inesperadamente pequenos em ambas as métricas, o que é visto mais claramente na Fig. 10, onde são mostrados os 12 menores valores de variação total, dentre aqueles obtidos com todos os autovetores de  $\mathbf{A}$ , e os autovalores associados: o maior autovalor, de fato, leva à variação total nula, mas a segunda menor variação total é obtida com  $\lambda = 0$ . Estudos futuros são necessários para uma compreensão completa da noção de frequência da teoria de  $\text{GSP}_{\mathbf{A}}$ , e sua validade sob métricas como as duas aqui utilizadas.

Para concluir a análise do domínio da frequência, convém apresentar a resposta em frequência de um filtro LSI sobre grafos. A definição dada na Subseção 2.3.1 considera a ação de uma matriz sobre um sinal  $\mathbf{x}$  no domínio dos vértices de um grafo  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ . Para entender como o filtro age no domínio da GFT, doravante chamado domínio da frequência, será utilizada (2.7) e a representação polinomial de filtros LSI. Seja o filtro  $\mathbf{H} = \sum_{\ell=0}^L h_{\ell} \mathbf{A}^{\ell}$  e sua resposta ao sinal  $\mathbf{x}$  dada por

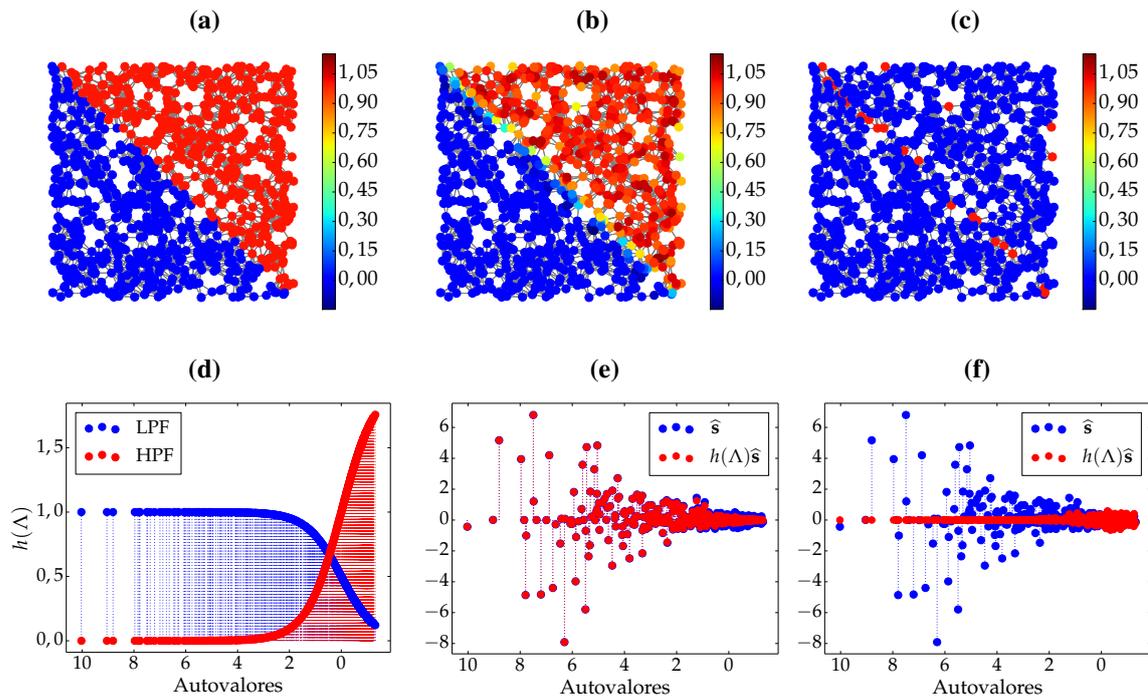
$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{x} &= \sum_{\ell=0}^L h_{\ell} \mathbf{A}^{\ell} \mathbf{x} = \sum_{\ell=0}^L h_{\ell} (\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1})^{\ell} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{V} \left( \sum_{\ell=0}^L h_{\ell} \mathbf{\Lambda}^{\ell} \right) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Tomando a GFT em ambos os lados da última equação, tem-se

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{x} = h(\mathbf{\Lambda}) \hat{\mathbf{x}}, \quad (2.22)$$

de forma que a ação no domínio da frequência a que corresponde a filtragem por  $\mathbf{H}$  é a multiplicação pela matriz  $h(\mathbf{\Lambda})$ , i. e.  $h(\mathbf{\Lambda})$  representa a resposta em frequência do filtro  $\mathbf{H}$ .

**Figura 11** – Exemplo de filtragem passa-baixa e passa-alta em um (a) sinal artificial, constante por partes, sobre um grafo de sensores de 1000 vértices. Em (b) e (c) são mostradas as saídas dos filtros passa-baixa (LPF) e passa-alta (HPF), respectivamente, com esta última tendo sofrido binarização (limiar de 50%) do valor absoluto do sinal. Em (d) mostra-se a resposta em frequência dos filtros utilizados, e os espectros antes e após as filtrações passa-baixa e passa-alta são mostrados em (e) e (f), respectivamente. De (d) a (f) o eixo das abscissas foi invertido, de modo a facilitar a leitura em termos de frequência (componentes de maior frequência ficam à direita do gráfico).



Fonte: o autor.

### 2.3.4 Aplicação

Como ilustração dos conceitos introdutórios de  $GSP_A$  apresentados nesta seção, realizou-se um conjunto de filtrações simples em um sinal artificial sobre um grafo de sensores, com resultados mostrados na Fig. 11.

O sinal utilizado é constante por partes, de modo a ilustrar bem o efeito de filtrações passa-baixa (LPF, do inglês *low-pass filtering*, ou *low-pass filter*) e passa-alta (HPF, do inglês *high-pass filtering*, ou *high-pass filter*): espera-se que a primeira suavize as descontinuidades entre regiões constantes, enquanto que a segunda as realce. Com a intenção de utilizar a filtragem passa-alta como um detector de bordas, fez-se o ganho do HPF maior que 1 e binarizou-se o sinal filtrado, atribuindo 0 para as amostras com valor abaixo de 50% do valor máximo do sinal, e 1 para as demais. A binarização visa tornar mais fácil a detecção da borda, pois a região de descontinuidade deve ter resposta à filtragem com maior magnitude do que as demais regiões do sinal sobre o grafo.

É importante ressaltar que os filtros foram projetados *ad hoc*, com o único requisito

de serem suaves (o estudo sobre *projeto de filtros sobre grafos*, com técnicas e conjuntos vantagem-desvantagem para cada abordagem, é ainda uma área de pesquisa recente, e não houve qualquer intuito de propor filtros mais adequados para esta ou aquela tarefa), por inspiração em processamento clássico de sinais. Com a intenção de se obter respostas em frequência como as da Fig. 11d, os filtros foram projetados no domínio da frequência utilizando funções baseadas na distribuição de Fermi-Dirac (por nenhum outro motivo que não obter respostas suaves),

$$h_{LPF}(\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{I}_N - \text{diag} \left( \frac{1}{1 + \exp \left( 2 \frac{\lambda_i - \bar{\lambda}}{|\lambda|} \right)} \right)_{i=0,1,\dots,N-1}, \quad (2.23)$$

$$h_{HPF}(\mathbf{\Lambda}) = \text{diag} \left( \frac{2}{1 + \exp \left( 2 \frac{\lambda_i - \bar{\lambda}}{|\lambda|} \right)} \right)_{i=0,1,\dots,N-1}, \quad (2.24)$$

com  $\bar{\lambda}$  indicando o valor médio dos autovalores da matriz de adjacência,  $\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_k \lambda_k$ . Como o grafo na Fig. 11a é não-direcionado,  $\mathbf{A}$  é simétrica e seus autovalores são reais.

Como resultado, observa-se a consistência da teoria e a coerência com o comportamento esperado para cada filtragem: o filtro passa-baixa de fato suaviza a região de alta frequência do sinal sobre o grafo, e o passa-alta consegue de certa forma detectar a linha de descontinuidade no sinal. Algumas imperfeições observadas foram a aparente inserção de ruído no sinal suavizado, e uma detecção com falhas no sinal realçado. Quanto ao primeiro efeito indesejável, uma possível solução seria realizar a filtragem localmente, atualizando apenas os vértices próximos à descontinuidade; para os dois casos (LPF e HPF) um estudo mais profundo sobre projeto de filtros deve ser conduzido para compreender melhor o domínio da frequência e construir filtros que evitem tais comportamentos indesejados.

## 2.4 GSP<sub>L</sub>: a teoria espectral de grafos em GSP

A teoria espectral dos grafos é um ramo de teoria dos grafos que estuda propriedades oriundas da autodecomposição das matrizes de adjacência e Laplaciana de grafos. Desenvolvida a partir de teoria de matrizes e álgebra linear, ela encontra aplicações em mecânica quântica, redes de comunicações, química, e outras áreas (CHUNG, 1997), e foi utilizada por Ortega, Shuman e outros como base para desenvolver um ferramental teórico de processamento de sinais sobre grafos distinto de GSP<sub>A</sub> (SHUMAN et al., 2013). Ao contrário da teoria brevemente introduzida na Seção 2.3, que baseia-se em processamento algébrico de sinais e toma a matriz de adjacência do grafo como bloco elementar (como um filtro de deslocamento unitário), esta abordagem derivada de teoria espectral de grafos investiga o espectro da matriz Laplaciana, e por isso é referida aqui por GSP<sub>L</sub>. Neste ramo de GSP, é importante ressaltar, os autores restringem seu estudo apenas a grafos não-direcionados e com arestas de peso real não-negativo, como observam Sandryhaila e Moura, ao citar GSP<sub>L</sub> em (SANDRYHAILA; MOURA, 2014a).

No início do capítulo, falou-se sobre a matriz Laplaciana

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}, \quad (2.25)$$

mas por vezes faz-se uso de sua versão normalizada, expressa por

$$\mathcal{L} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{L} \mathbf{D}^{-1/2}. \quad (2.26)$$

A versão (2.26) é utilizada largamente na área de teoria espectral de grafos (CHUNG, 1997), mas o arcabouço teórico apresentado a seguir costuma basear-se na matriz Laplaciana não-normalizada, em (2.25).

Uma importante propriedade da matriz  $\mathbf{L}$  para grafos não-direcionados e ponderados pode ser derivada a partir de sua decomposição em termos da *matriz de incidência orientada*, aqui denotada por  $\mathbf{B}$ . Embora suas definições variem levemente, a depender se o grafo considerado é direcionado ou não-direcionado, ponderado ou não, optou-se por defini-la aqui como segue. Por simplicidade, serão considerados grafos sem laços ou múltiplas arestas, como ocorre ao longo desta dissertação.

**Definição 1** (Orientação de um grafo). *Seja o grafo não-direcionado  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ . Uma orientação de  $\mathcal{G}$  é um grafo  $\mathcal{G}' = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}'\}$  onde a cada aresta de  $\mathcal{G}$  foi imposta uma direção qualquer.*

**Definição 2** (Matriz de incidência orientada). *Seja o grafo não-direcionado  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ , com  $|\mathcal{V}| = N$  vértices e  $|\mathcal{E}| = E$  arestas ponderadas segundo a função  $\omega : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Seja, ainda,  $\mathcal{G}' = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}'\}$  uma orientação de  $\mathcal{G}$ . Uma matriz de incidência orientada  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times E}$  de  $\mathcal{G}$  tem entradas dadas por*

$$B_{i,j} \triangleq \begin{cases} \sqrt{w(e'_j)}, & \text{se } e'_j \text{ chega em } v_i \\ -\sqrt{w(e'_j)}, & \text{se } e'_j \text{ parte de } v_i \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (2.27)$$

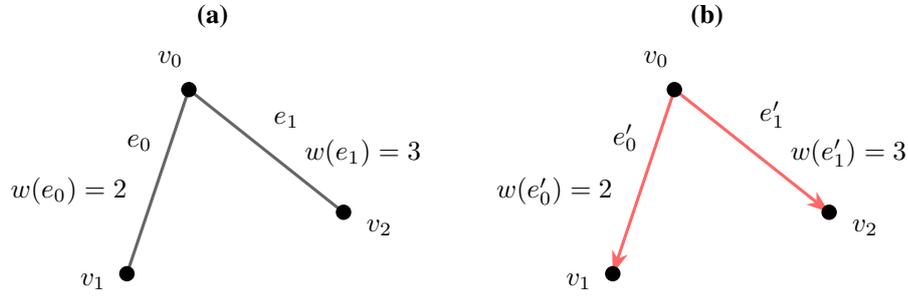
É importante notar que, no contexto de  $\text{GSP}_L$ , no qual os grafos têm pesos reais não-negativos, a matriz de incidência orientada  $\mathbf{B}$  tem entradas sempre reais.

**Teorema 1.** *Para um dado grafo não-direcionado, com matriz de incidência orientada  $\mathbf{B}$ , a matriz Laplaciana é dada por*

$$\mathbf{L} = \mathbf{B} \mathbf{B}^T. \quad (2.28)$$

**Exemplo 1.** *Para ilustrar a decomposição da matriz Laplaciana para grafos simples ponderados, em termos da matriz de incidência de uma orientação do grafo, usemos o grafo da Fig. 12a, do qual uma possível orientação é mostrada na Fig. 12b. A matriz de incidência para esta*

**Figura 12** – (a) Um grafo não-direcionado, ponderado e conexo, e (b) uma possível orientação sua. A função  $\omega : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  mapeia a aresta  $e$  no valor real não-negativo  $w(e)$ .



Fonte: o autor.

orientação é

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_0 & e_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (2.29)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{B}^T &= \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D} - \mathbf{A} = \mathbf{L}. \end{aligned}$$

O Teorema 1 permite demonstrar que a matriz Laplaciana de um grafo não-direcionado é positiva semi-definida ( $\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x}$ ), pois para qualquer sinal real  $\mathbf{x} = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{N-1})^T$ ,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{x} = (\mathbf{B}^T \mathbf{x})^T (\mathbf{B}^T \mathbf{x}) = \|\mathbf{B}^T \mathbf{x}\|^2 \geq 0, \quad (2.30)$$

e portanto todos os autovalores de  $\mathbf{L}$  são reais não-negativos. Mais que isso, pode-se mostrar que o zero é um autovalor com multiplicidade igual ao número de componentes conexas do grafo não-direcionado (segundo (SHUMAN et al., 2013) e referências nele citadas), e portanto grafos conexos têm apenas um autovalor de  $\mathbf{L}$  nulo. Como conclusão, os autovalores da matriz Laplaciana, denotados aqui pela letra  $\gamma$ , podem ser ordenados como  $\gamma_0 = 0 < \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_{N-1}$ ,  $\gamma_i \in \mathbb{R}, \forall i$ .

#### 2.4.1 O operador diferença e a GFT

De (2.25), percebe-se que a matriz Laplaciana age como um operador diferença sobre um sinal  $\mathbf{x}$  definido em um grafo  $\mathcal{G} = \{\mathbf{V}, \mathbf{A}\}$ , atualizando cada amostra pela diferença entre o

valor em certo vértice e a soma dos valores em vértices adjacentes. Ou seja,

$$\mathbf{Lx} = \mathbf{Dx} - \mathbf{Ax}, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\mathbf{Lx})_i &= d_i x_i - \sum_{k \mid v_k \in \mathcal{N}_i} A_{ik} x_k = \sum_k A_{ik} x_i - \sum_{k \mid v_k \in \mathcal{N}_i} A_{ik} x_k \\ &= \sum_{k \mid v_k \in \mathcal{N}_i} A_{ik} [x_i - x_k]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Na concepção de sua teoria e formulação de sua Transformada de Fourier sobre Grafos (GFT), Shuman *et al.* basearam-se no fato de que a Transformada de Fourier de tempo contínuo é uma expansão de um sinal numa base de exponenciais complexas, que são autofunções do operador Laplaciano unidimensional (segunda derivada) (SHUMAN; RICAUD; VANDERGHEYNST, 2012; SHUMAN et al., 2013):

$$\Delta e^{j\omega t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{j\omega t} = -\omega^2 e^{j\omega t}. \quad (2.33)$$

Com isto, a GFT de um sinal  $\mathbf{x}$ , sobre o grafo não-direcionado  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$  com matriz Laplaciana  $\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}$ , foi definida como a sua expansão sobre a base de autovetores de  $\mathbf{L}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &\triangleq \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x} && \text{(análise)} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{U} \tilde{\mathbf{x}}, && \text{(síntese)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

e como a matriz  $\mathbf{L}$  é simétrica, é sempre diagonalizável.

Tal definição traz uma ideia de frequência para sinais sobre grafos que é coerente com a interpretação clássica. Em (2.33), a informação de frequência está contida nos autovalores  $-\omega^2$  associados a cada autofunção  $e^{j\omega t}$ , e autovalores próximos de zero estão associados a componentes harmônicas mais suaves. O mesmo observa-se nos autovalores e autovetores da matriz Laplaciana de um grafo: autovetores associados a menores autovalores são mais suaves que aqueles associados a maiores autovalores. Como a matriz Laplaciana age como um operador diferença, a suavidade do sinal  $\mathbf{x}$  pode ser medida pela norma de  $\mathbf{Lx}$ , uma métrica similar à variação total em  $\text{GSP}_A$  (cf. (2.16)), e, se  $\mathbf{u}_i$  é o autovetor de  $\mathbf{L}$  associado ao autovalor  $\gamma_i$ ,

$$\|\mathbf{L}\mathbf{u}_i\| = \|\gamma_i \mathbf{u}_i\| = \gamma_i \|\mathbf{u}_i\| \quad (\text{pois } \gamma_i \geq 0), \quad (2.35)$$

de forma que, normalizando os autovetores de  $\mathbf{L}$ , percebe-se que se  $\gamma_i \leq \gamma_j$  então  $\|\mathbf{L}\mathbf{u}_i\| \leq \|\mathbf{L}\mathbf{u}_j\|$  e  $\mathbf{u}_i$  é mais suave que  $\mathbf{u}_j$ .

Além disso, observando o autovetor associado ao único autovalor nulo do Laplaciano para grafos não-direcionados conexos, tem-se que

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_0 = \gamma_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

que se trata de um sistema de equações lineares homogêneas, cujas soluções formam o chamado espaço nulo de  $\mathbf{L}$ . Uma vez que a dimensão deste espaço é igual à multiplicidade geométrica do autovalor  $\gamma_0 = 0$ , portanto é igual a 1, então basta encontrar uma solução não-trivial de (2.36) para obter uma base dos possíveis autovetores  $\mathbf{u}_0$ . Ora, de (2.32), vê-se que

$$(\mathbf{L}\mathbf{u}_0)_i = 0 \Rightarrow \sum_{k \mid v_k \in \mathcal{N}_i} A_{ik}[u_{0i} - u_{0k}] = 0, \quad (2.37)$$

o que mostra que qualquer vetor *constante* é solução para (2.36). Isto leva a uma conclusão importante: o autovetor associado ao autovalor (frequência) nulo é constante, como ocorre na teoria clássica de processamento de sinais. Se os autovetores forem normalizados, então cada entrada de  $\mathbf{u}_0$  vale  $1/\sqrt{N}$ .

A Fig. 13 ilustra o conceito de frequência no contexto de processamento de sinais sobre grafos, tomando a matriz Laplaciana como referência. Foi utilizado um grafo de sensores com 1000 vértices, com arestas ponderadas segundo (2.2). A componente de frequência nula é o autovetor  $\mathbf{u}_0$ , e a suavidade das componentes diminui à medida que se aumenta a frequência (autovalor). A Fig. 13f mostra o número de mudanças de sinal para cada autovetor em função do respectivo autovalor, calculado como o número de arestas ligando vértices cujo produto das amostras é negativo.

#### 2.4.2 Filtragem

O conceito de filtragem de sinais sobre grafos, no presente ferramental teórico, é definido primeiro no domínio da frequência: a resposta em frequência de um filtro  $\mathbf{H}$  é o vetor  $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbb{C}^N$  tal que, para certo sinal  $\mathbf{x}$  com GFT  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}$  sobre um certo grafo, sua saída nesse filtro é

$$\tilde{\mathbf{y}} \triangleq \tilde{\mathbf{h}} \odot \tilde{\mathbf{x}} = \text{diag}(\tilde{\mathbf{h}})\tilde{\mathbf{x}}, \quad (2.38)$$

em que  $\odot$  representa o produto de Hadamard e  $\text{diag}(\cdot)$  é uma matriz diagonal com as entradas da diagonal dadas pelo argumento. Tomando a GFT<sup>-1</sup> em ambos os membros da equação,

$$\mathbf{U}\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} = \mathbf{U} \left[ \text{diag}(\tilde{\mathbf{h}})\tilde{\mathbf{x}} \right] = \mathbf{U} \text{diag}(\tilde{\mathbf{h}})\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}, \quad (2.39)$$

ou seja, a filtragem no domínio dos vértices do grafo é dada por

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}, \quad (2.40)$$

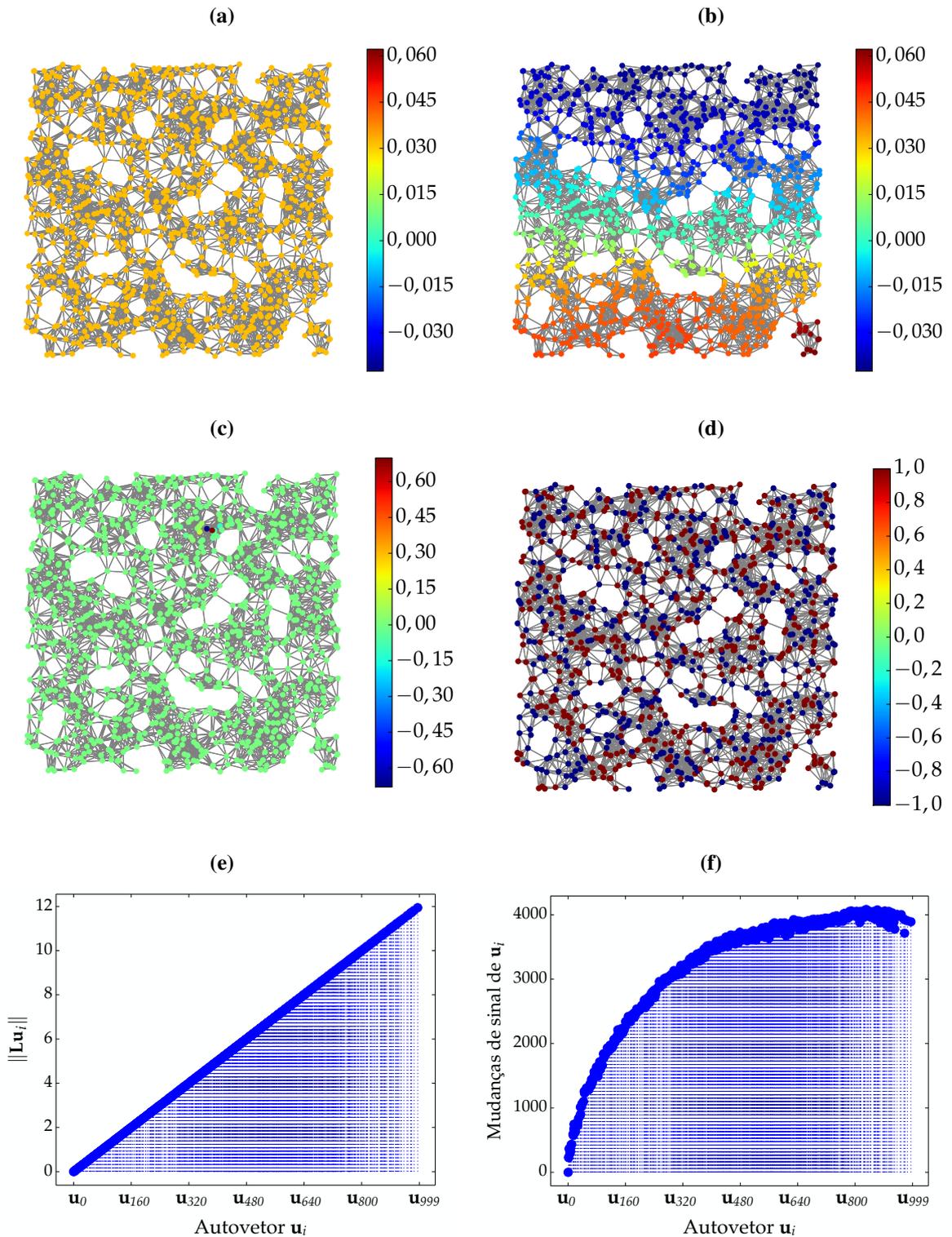
com

$$\mathbf{H} \triangleq \mathbf{U} \text{diag}(\tilde{\mathbf{h}})\mathbf{U}^{-1}. \quad (2.41)$$

Pode-se fazer as componentes de  $\tilde{\mathbf{h}}$  serem polinômios de grau menor ou igual a  $K$  nos autovalores de  $\mathbf{L}$  (SHUMAN et al., 2013), de modo que

$$\tilde{h}_\ell = \sum_{k=0}^K a_k \gamma_\ell^k, \quad (2.42)$$

**Figura 13** – Alguns autovetores da matriz Laplaciana de um grafo de sensores com 1000 vértices: (a)  $\mathbf{u}_0$ , (b)  $\mathbf{u}_1$  e (d)  $\mathbf{u}_{999}$ . Como  $\mathbf{u}_{999}$  tem um pico difícil de discernir das demais amostras do sinal, em (e) é mostrada uma versão binarizada  $\bar{\mathbf{u}}_{999}$ , valendo 1 em amostras positivas de  $\mathbf{u}_{999}$  e  $-1$  nas negativas. Em (c) e (f) são mostradas medidas de suavidade de um sinal: a norma da diferença  $\|\mathbf{L}\mathbf{u}_i\|$  e o número de mudanças de sinal dos autovetores  $\mathbf{u}_i$ . As entradas de  $\mathbf{u}_0$  tem valor  $1/\sqrt{1000} \approx 0,03$ .



Fonte: o autor.

e que a resposta do filtro à entrada  $\mathbf{x}$ , obtida pela aplicação em (2.38) da GFT inversa, tenha entradas dadas por

$$y_i = \sum_{\ell=0}^{N-1} u_{\ell,i} \tilde{h}_{\ell} \tilde{x}_{\ell}, \quad (2.43)$$

em que  $u_{\ell,i}$  é a  $i$ -ésima componente do autovetor  $\mathbf{u}_{\ell}$ . Substituindo (2.42) em (2.43),

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{\ell=0}^{N-1} u_{\ell,i} \left( \sum_{k=0}^K a_k \gamma_{\ell}^k \right) \left( \sum_{j=0}^{N-1} u_{\ell,j}^* x_j \right) = \sum_{\ell} \sum_k \sum_j x_j a_k \gamma_{\ell}^k u_{\ell,i} u_{\ell,j}^* \\ &= \sum_j x_j \left[ \sum_k a_k \left( \sum_{\ell} \gamma_{\ell}^k u_{\ell,i} u_{\ell,j}^* \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Mas como  $L_{i,j} = (\mathbf{U}\mathbf{\Gamma}\mathbf{U}^{-1})_{i,j} = \sum_{\ell=0}^{N-1} \gamma_{\ell} u_{\ell,i} u_{\ell,j}^*$ , então

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} \gamma_{\ell}^k u_{\ell,i} u_{\ell,j}^* = (\mathbf{L}^k)_{i,j} \quad (2.45)$$

e, portanto,

$$y_i = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \sum_{k=0}^K a_k (\mathbf{L}^k)_{i,j}. \quad (2.46)$$

Por fim, usa-se o fato de que, se o menor número de arestas ligando os vértices  $v_i$  a  $v_j$  é maior do que  $k$ , então  $(\mathbf{L}^k)_{i,j} = 0$  ((HAMMOND; VANDERGHEYNST; GRIBONVAL, 2011, lema 5.2), como citado em (SHUMAN et al., 2013)). Com isso,

$$y_i = \sum_{j|v_j \in \mathcal{N}(i,K)} H_{i,j} x_j, \quad (2.47)$$

em que  $H_{i,j} = \sum_{k=0}^K a_k (\mathbf{L}^k)_{i,j}$ . É indicado por (2.47) que a filtragem no domínio dos vértices é uma operação linear localizada, combinando linearmente amostras na vizinhança de um vértice dentro de um raio de até  $K$  arestas.

### 2.4.3 Aplicações

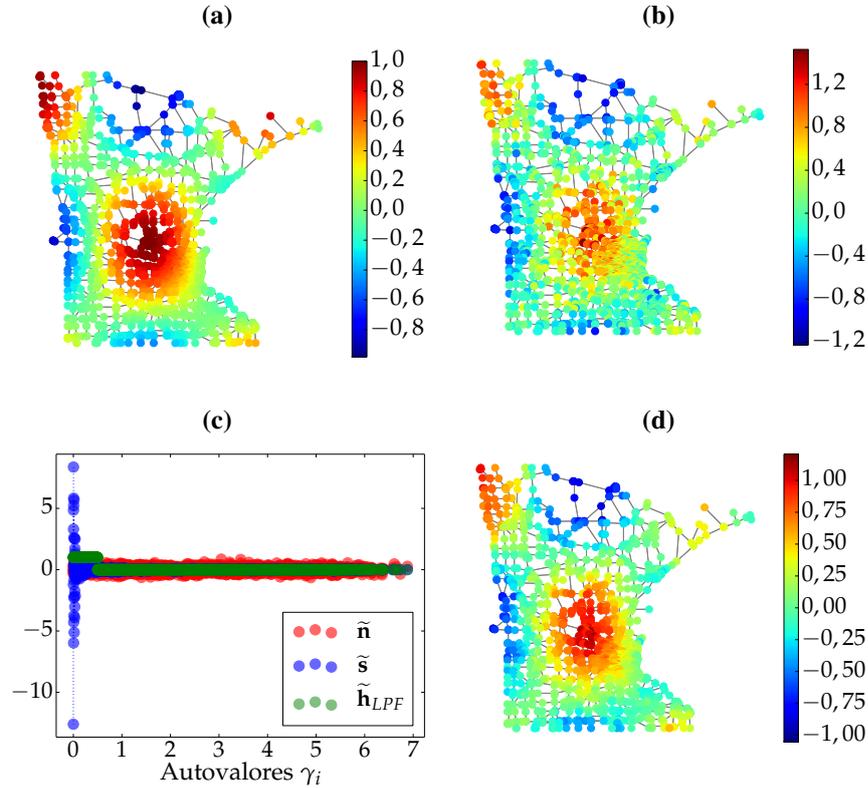
Como aplicação da teoria básica de  $\text{GSP}_{\mathbf{L}}$ , dois casos foram considerados. O primeiro é semelhante àquele apresentado na seção anterior, ilustrando um projeto simples de filtro passa-baixa para remoção de ruído, e o segundo baseia-se na abordagem em (SANDRYHAILA; MOURA, 2014b) para classificação de um conjunto de dados, consistindo na minimização da frequência de um sinal sobre um grafo.

Para o primeiro caso, consideremos o sinal suave definido sobre o grafo de Minnesota, como na Fig. 14a, com componentes dadas por

$$s_i = \cos(\text{coord}_x(v_i)) + \text{sen}(\text{coord}_y(v_i)), \quad (2.48)$$

em que  $\text{coord}_x$  e  $\text{coord}_y$  indicam as coordenadas geográficas dos vértices sobre o estado de Minnesota.

**Figura 14** – (a) Sinal suave sobre o grafo de Minnesota. (b) Resultado da adição de um ruído gaussiano com desvio padrão igual a 20% da amplitude do sinal original. (c) Espectro do sinal original, do ruído gaussiano e do filtro passa-baixa ideal. (d) Sinal resultante da filtragem passa-baixa.



Fonte: o autor.

Ao sinal  $\mathbf{s}$  foi adicionado um ruído gaussiano  $\mathbf{n}$  de média nula e desvio padrão igual a 20% da amplitude de  $\mathbf{s}$ , resultando no sinal mostrado na Fig. 14b. A análise espectral do sinal original e do ruído gaussiano mostrou que, embora o ruído seja aproximadamente branco, o sinal — por ser suave — concentra sua energia em componentes de baixa frequência, em autovalores de módulo aproximadamente  $0 \leq \gamma_i \leq 0,5$ , como visto na Fig. 14c. Por isso, optou-se por criar um filtro passa-baixa ideal, de ganho unitário e frequência de corte  $\gamma_{\text{corte}} = 0,5$ , a fim de reduzir a influência do ruído sobre o sinal de interesse.

O sinal obtido após a filtragem passa-baixa ideal é mostrado na Fig. 14d. A energia do erro em relação ao sinal original caiu de

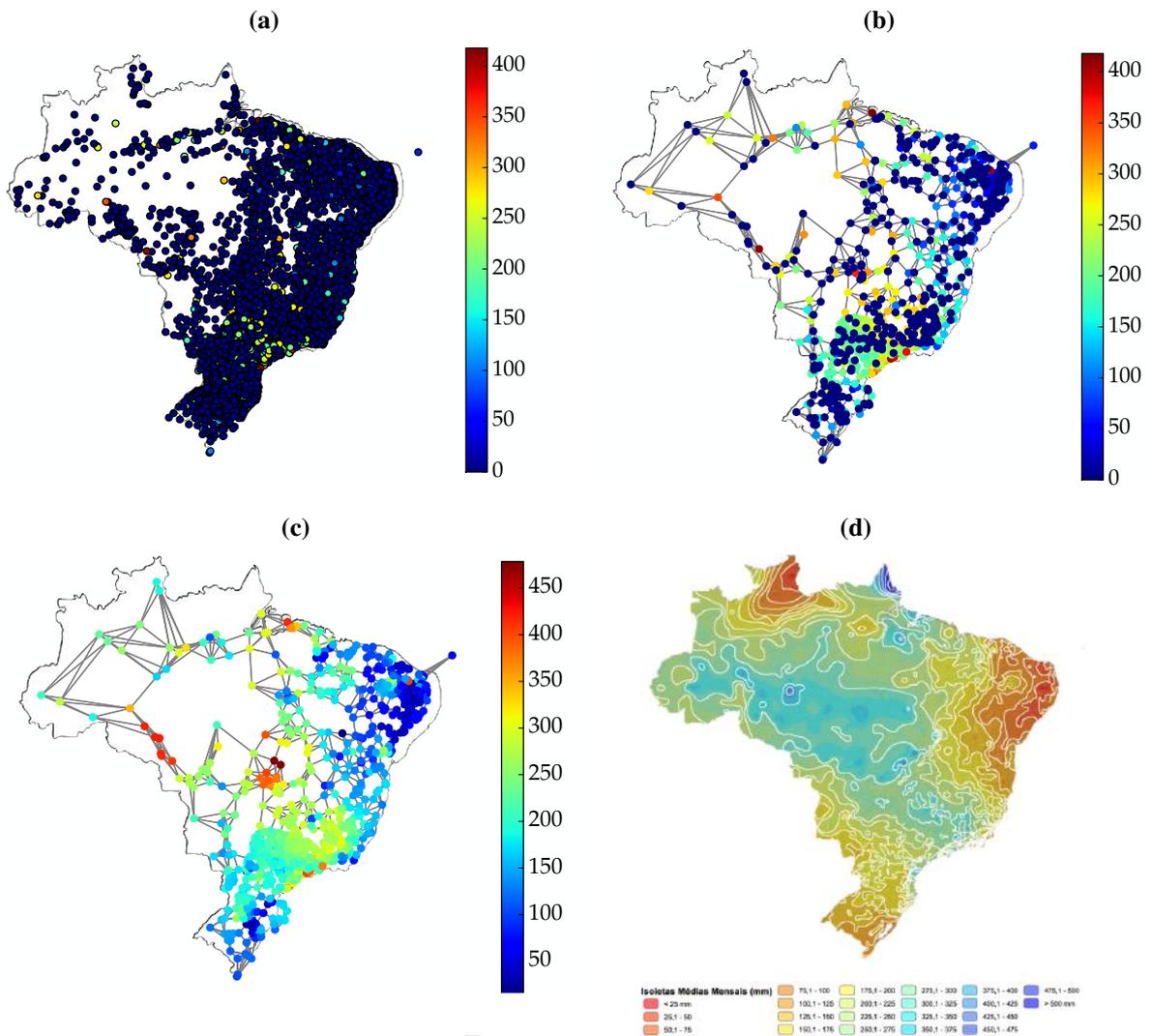
$$\|\mathbf{s} - (\mathbf{s} + \mathbf{n})\| = \|\mathbf{n}\| \approx 44,6\% \quad (2.49)$$

para

$$\|\mathbf{s} - \mathbf{U}(\tilde{\mathbf{h}}_{LPF} \odot (\tilde{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{n}}))\| \approx 18,9\%, \quad (2.50)$$

uma redução pela metade. É importante observar que, por mais simples que seja o exemplo, ele ressalta a importância de se considerar a estrutura subjacente a sinais definidos em domínios

**Figura 15** – (a) Sinal sobre o grafo (sem arestas) dos 5570 municípios brasileiros, com amostras nulas exceto nos 609 vértices correspondendo ao banco de dados da Embrapa. (b) Sinal  $s^{(\text{known})}$  com 1000 amostras, 609 das quais provêm de base de dados pluviométricos e as demais são nulas. (c) Sinal  $s^{(\text{predicted})}$ , estimando as amostras anteriormente nulas de modo a obter um sinal suave. (d) Isoieta média do mês de janeiro, correspondente ao período de 1977 a 2006. O contorno do mapa do Brasil sobre os grafos é inexato, estando aqui apenas para guiar o leitor, sem a pretensão de alinhá-lo com as coordenadas corretas de cada cidade. Foi desenhado por Felipe Micaroni Lalli e está disponível sob licença CC By-SA no endereço <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Contorno\\_do\\_mapa\\_do\\_Brasil.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Contorno_do_mapa_do_Brasil.svg)>.



Fonte: o autor.

irregulares: a alta compactação de energia do sinal  $s$ , por exemplo, só foi possível graças à decomposição na base de autovetores do Laplaciano do grafo que lhe serve de domínio. Com estas considerações, técnicas simples podem obter resultados úteis e relevantes em contextos como este.

O segundo problema a ser abordado é o de, dado um subconjunto de vértices de um grafo com amostras conhecidas, estimar o valor nos demais vértices do grafo, de modo que o sinal

estimado seja suave. Sandryhaila e Moura em (SANDRYHAILA; MOURA, 2014b) quiseram estimar um sinal de valores discretos, de modo a aplicar o método a problemas de classificação, e para tanto aplicaram um algoritmo de minimização para obter o sinal que minimizava a norma  $\|\mathbf{s} - \mathbf{A}^{\text{norm}}\mathbf{s}\|$ , sujeito à condição de que o sinal estimado divergisse pouco do sinal original nos vértices com valores conhecidos *a priori*.

Utilizou-se uma abordagem semelhante, mas em  $\text{GSP}_L$ . Neste exemplo, o seguinte problema foi proposto: dados os valores de pluviometria média do mês de janeiro de 609 cidades brasileiras, retirados do banco de dados da Embrapa<sup>6</sup>, como se poderia estimar o valor deste índice em outras cidades do Brasil? Com este problema, busca-se ilustrar o uso de técnicas de otimização aplicadas a GSP.

A abordagem consiste em obter um sinal  $\mathbf{s}^{(\text{predicted})}$  com os índices de precipitação média em janeiro que seja suave, ao mesmo tempo em que preserve os dados nas 609 cidades conhecidos *a priori*. Isto se traduz no problema de otimização da função objetivo

$$\mathbf{s}^{(\text{predicted})} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{L}\mathbf{s}\|, \quad (2.51)$$

sujeita a

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{s} - \mathbf{s}^{(\text{known})})\| = 0, \quad (2.52)$$

em que  $\mathbf{P}$  é a matriz diagonal com entradas dadas por

$$P_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{se } s_i^{(\text{known})} \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.53)$$

e  $\mathbf{s}^{(\text{known})}$  é um vetor com  $N$  amostras, das quais apenas 609 são não-nulas, correspondendo aos vértices nas cidades cujos dados estão no banco de dados. Para referência acerca de algoritmos de otimização, o autor recomenda (NOCEDAL; WRIGHT, 2006).

Na Fig. 15a as 5570 cidades brasileiras são representadas por vértices de um grafo sem arestas<sup>7</sup>, das quais às 609 da base de dados da Embrapa são atribuídos os valores de pluviometria média. Para executar o algoritmo de otimização com mais rapidez, optou-se por reduzir o número de vértices para  $N = 1000$ , obtendo o sinal  $\mathbf{s}^{(\text{known})}$  mostrado na Fig. 15b. O grafo foi criado ligando um vértice aos 5 vizinhos mais próximos, de modo a ter um grafo conexo ao mesmo tempo em que se evita uma matriz de adjacência demasiadamente cheia (como comentado na Seção 2.2.1). Ponderou-se as arestas segundo

$$A_{i,j} = \exp(-\text{dist}^2(v_i, v_j)), \quad (2.54)$$

fazendo  $2\theta^2 = 1$  em (2.2). Uma vez que se fez o grafo conexo e não foi utilizado um limite  $T$  para julgar quais arestas seriam criadas, não há parâmetro que indique qual o melhor valor da variância  $\theta$  a ser usado, razão pela qual se fez  $2\theta^2 = 1$ .

<sup>6</sup> Banco de Dados Climáticos do Brasil, produzido pela Embrapa e pela ESALQ/USP, disponível em: <<https://www.cnpm.embrapa.br/projetos/bdclima/index.html>>

<sup>7</sup> As informações de latitude e longitude dos 5570 municípios brasileiros, utilizada para posicionar os vértices do grafo, foram retiradas da seguinte base: <<https://github.com/kelvins/Municipios-Brasileiros>>.

O sinal estimado deveria, idealmente, aproximar o mapa na Fig. 15d, com as isoietas (curvas de mesmo índice pluviométrico) médias do mês de janeiro, relativas ao período de 1977 a 2006<sup>8</sup>. *É importante dirigir a atenção para a escala de cores do mapa, que é inversa ao padrão adotado ao longo desta dissertação: quanto mais quente a cor, menor o valor representado.*

Para reduzir o número de variáveis da função objetivo, a restrição  $\|\mathbf{P}(\mathbf{s} - \mathbf{s}^{(\text{known})})\| = 0$  foi imposta dentro da declaração da função objetivo, de modo que havia apenas  $1000 - 609 = 391$  variáveis independentes. Dessa forma, trata-se de uma otimização sem restrições (*unconstrained optimization*) com 391 variáveis, e para resolvê-lo foi utilizado o algoritmo BFGS e a função `optimize.minimize()` do pacote Scipy, da linguagem Python. O resultado obtido após o algoritmo de minimização é mostrado na Fig. 15c. Embora não tenha convergido após sucessivamente ter-se estendido o limite superior de iterações do algoritmo (de 100 a 2000 iterações), o resultado final conseguiu aproximar de forma razoável o mapa de isoietas na Fig. 15d, considerando que o padrão de cores do mapa é, como comentado, *inverso* àquele utilizado ao longo da Dissertação. Como forma de ilustração do conceito de frequência em  $\text{GSP}_L$  e da técnica de otimização para estimar informação em um grafo tomando por hipótese a suavidade do sinal, o resultado foi satisfatório, embora mereça estudos futuros para verificar qual função objetivo seria mais recomendada para uma aplicação como esta, ou qual algoritmo de minimização é mais adequado para o problema.

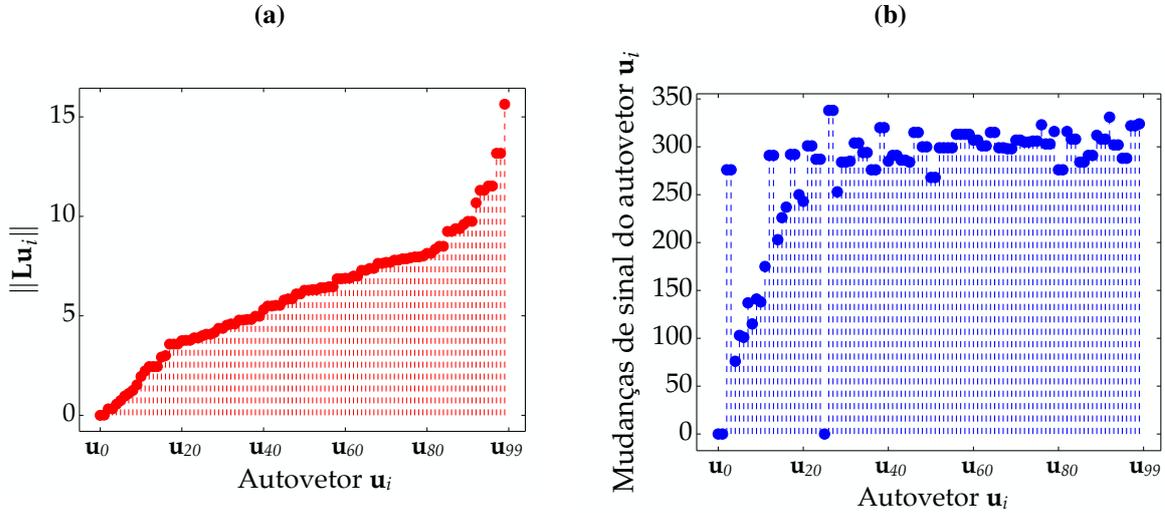
## 2.5 Algumas oportunidades de estudo

Como comentado, a abordagem de  $\text{GSP}_L$  foi desenvolvida tendo em mente grafos não-direcionados, com pesos reais não-negativos. Nesses casos,  $\mathbf{L}$  é diagonalizável e, mais que isso, é positiva semi-definida, o que gera propriedades convenientes para a aplicação dos conceitos teóricos, como ter frequências sempre reais e uma componente DC associada à frequência nula. O arcabouço de  $\text{GSP}_A$  apresenta a vantagem de considerar grafos gerais, direcionados e de pesos complexos, desde que sem laços e múltiplas arestas, mas também traz desvantagens. Como comentado em (SARDELLITTI; BARBAROSSA; LORENZO, 2017), o uso da matriz de adjacência como bloco elementar, e a aplicação a grafos direcionados, carrega uma série de empecilhos quando a matriz  $\mathbf{A} = \mathbf{V}_G \mathbf{J} \mathbf{V}_G^{-1}$  é não-diagonalizável, como o fato de que  $\mathbf{V}_G$  é uma base de autovetores (generalizados) que não são em geral ortogonais, e por isso a GFT não preserva o produto escalar, e os problemas de instabilidade numérica que ocorrem na decomposição de Jordan para matrizes de ordem prática.

Além disso, (DERI; MOURA, 2017) mostram que ambas abordagens ainda apresentam o problema da não-unicidade da definição da GFT, sempre que há frequências repetidas ( $\lambda_i$  ou  $\gamma_i$ ) — mesmo se os autovalores apresentam multiplicidades geométrica e algébrica iguais. Pode-se

<sup>8</sup> Dados do Serviço Geológico do Brasil, também conhecido como CPRM, por conta de sua razão social Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais, empresa pública vinculada ao Ministério de Minas e Energia. Este e outros atlas pluviométricos do Brasil estão disponíveis em: <<http://www.cprm.gov.br/publique/Hidrologia/Mapas-e-Publicacoes/Atlas-Pluviometrico-do-Brasil-1351.html>>

**Figura 16** – (a) Norma  $\|\mathbf{L}\mathbf{u}_i\|$  e (a) número de mudanças de sinal dos autovetores do grafo direcionado da Fig. 8, ordenados de modo que os respectivos autovalores estejam em ordem crescente de módulo.



Fonte: o autor.

ilustrar o problema com um exemplo numérico, utilizando um grafo completo de 3 vértices (um triângulo) não-ponderado (pesos unitários). Grafos completos de  $n$  vértices têm matriz Laplaciana *normalizada* com autovalores 0, com multiplicidade 1, e  $n/(n - 1)$ , com multiplicidade  $n - 1$  (CHUNG, 1997, exemplo 1.1). Portanto, sua matriz Laplaciana não-normalizada (neste caso, é igual à normalizada multiplicada por 2), pode ser expressa como

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Gamma} \mathbf{U}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix},$$

mas também uma outra matriz de autovetores unitária é possível, substituindo os autovetores associados a  $\gamma = 3$  pela soma e diferença (normalizadas) dos vetores  $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^T$  e  $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^T$ ,

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

o que leva a duas definições distintas da GFT, pois um mesmo sinal passa a ter um ou outro espectro, a depender se a matriz  $\mathbf{U}_1$  ou  $\mathbf{U}_2$  (ou, de fato, qualquer uma das outras infinitas possibilidades) é considerada.

É importante comentar que, embora  $\text{GSP}_L$  considere apenas os grafos não-direcionados, a teoria não impede *a priori* a aplicação a grafos direcionados, uma vez que a matriz Laplaciana continua sendo definida por  $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ , em que  $\mathbf{D}$  é escolhida como a matriz de graus de entrada ou de saída. Poderíamos, por exemplo, manter a definição de frequência como sendo os autovalores de  $\mathbf{L}$ , pois teríamos que a norma  $\|\mathbf{L}\mathbf{u}_i\|$  varia linearmente com o *módulo* de cada

autovalor,

$$\|\mathbf{L}\mathbf{u}_i\| = \|\gamma_i\mathbf{u}_i\| = |\gamma_i|. \quad (2.56)$$

A Fig. 16 traz a norma  $\|\mathbf{L}\mathbf{u}_i\|$  e o número de mudanças de sinal dos autovetores de  $\mathbf{L}$  para o grafo *direcionado* da Fig. 8 (pág. 31), indicando que há relação entre o módulo dos autovalores e a suavidade do autovetor associado. No entanto, a matriz Laplaciana para grafos direcionados não é mais simétrica, por isso não é garantida ser positiva semi-definida ou diagonalizável.

Ainda se poderia mencionar muitos outros problemas no campo de GSP que, embora alguns já tenham sido investigados, permanecem em aberto e com ampla oportunidade de pesquisa, como, por exemplo, a definição de um Teorema da Incerteza e da Amostragem para sinais sobre grafos (TSITSVERO; BARBAROSSA; LORENZO, 2016; CHEN et al., 2016; WANG; CHEN; GU, 2015).

### 3 OPERADORES PARA DESLOCAMENTO DE SINAIS SOBRE GRAFOS

A grande diversidade de estruturas que surgem ao definir o domínio de um sinal como um grafo leva a uma igualmente diversa vagueza na definição de conceitos básicos em Processamento de Sinais. Por exemplo, para um sinal definido sobre um grafo genérico, não é imediato o significado de uma operação de deslocamento unitário, ou mesmo a escolha do aspecto de DSP clássico a ser tomado como referência para defini-la. Neste capítulo são apresentados os três mais consolidados operadores de deslocamento de sinais sobre grafos, com as motivações que justificam sua existência e uma comparação entre eles.

#### 3.1 A matriz de adjacência

No capítulo anterior, foi introduzido o ferramental teórico de  $\text{GSP}_A$ , desenvolvido a partir de uma série de publicações de Sandryhaila, Moura, e muitos outros (SANDRYHAILA; MOURA, 2013a; SANDRYHAILA; MOURA, 2013b; SANDRYHAILA; MOURA, 2013c; SANDRYHAILA; MOURA, 2014a; SANDRYHAILA; MOURA, 2014b). Como apresentado, o seu ponto de partida é a definição da matriz de adjacência como operador de deslocamento unitário (*graph shift*) de um sinal  $\mathbf{x}$  sobre o grafo  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ . Isto é, o resultado do deslocamento unitário de  $\mathbf{x}$ , aqui representado por

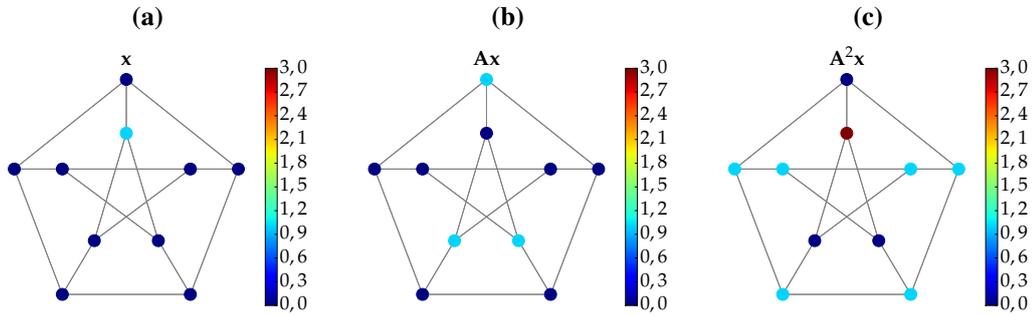
$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.1)$$

é tal que cada amostra do sinal original é substituída pela média dos valores adjacentes, ponderados pelos pesos das arestas incidentes,

$$x_i^{(1)} = \sum_{v_k \in \mathcal{N}_i} A_{i,k} x_k. \quad (3.2)$$

Ou seja, tal definição para o deslocamento unitário de sinais sobre grafos produz um resultado coerente com a intuição: cada aresta *transporta* (desloca) um valor de seu vértice-origem ao vértice-destino, e em um grafo não-direcionado a troca de valor ocorre em ambas as direções da aresta, como mostrado na Fig. 17. Utilizando a matriz de adjacência como operador de deslocamento, arestas com maior peso (i. e. arestas ligando vértices com alta probabilidade de possuírem valores similares) transmitem mais valor (i. e. influenciam mais seus vértices-destino) do que aquelas de menor peso. De fato, se um vértice  $v_j$  possui valor  $\alpha$ , ao fim de um deslocamento unitário do sinal a soma dos valores transferidos por  $v_j$  à sua vizinhança será  $\alpha \sum_i A_{i,j}$ . Com isso, percebe-se que a condição para que o deslocamento de um sinal preserve a

**Figura 17** – Impulso sobre um grafo de Petersen com arestas de peso unitário e suas versões deslocadas uma e duas vezes.



Fonte: o autor.

soma de suas componentes (ou, equivalentemente, preserva o valor médio do sinal) é que

$$\sum_i A_{i,j} = \sum_i A_{j,i} = 1, \quad \forall 1 \leq j \leq |\mathcal{V}|, \quad (3.3)$$

ou seja, a soma das entradas da  $j$ -ésima linha e da  $i$ -ésima coluna de  $\mathbf{A}$  devem ser 1 (como numa versão normalizada da Lei dos Nós de Kirchhoff—a soma dos pesos das arestas incidentes num vértice deve ser igual à soma dos pesos daquelas que partem deste vértice). Para que a matriz do grafo na Fig. 17 atenda a este requisito, basta dividi-la por 3, uma vez que o grafo de Petersen é 3-regular (como verificado por inspeção da Fig. 17, segundo definição apresentada na pág. 21). Para grafos não-direcionados mais gerais, não-regulares, impor esta condição pode fazer com que as relações de dependência entre vértices não sejam mais simétricas, ou seja,  $A_{i,j} \neq A_{j,i}$ , tornando o grafo direcionado com múltiplas arestas.

A condição em (3.3) garante preservação do valor médio do sinal, mas não de sua *norma*  $\|\mathbf{x}\|$ , pois

$$\|\mathbf{x}^{(1)}\|^2 = \mathbf{x}^{(1)T} \mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.4)$$

ou seja,

$$\|\mathbf{x}^{(1)}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\| \iff \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_N, \quad (3.5)$$

o que significa que a matriz  $\mathbf{A}$  precisa ser unitária. De fato, sabe-se que um operador é unitário se e somente se preserva o produto interno (consequentemente, a norma) em certo espaço vetorial. Ter uma matriz de adjacência unitária é, no entanto, extremamente raro no conjunto de grafos existentes, e foi a busca pela isometria do operador deslocamento que levou à alternativa apresentada na Seção 3.3.

### 3.1.1 O caso para grafos acíclicos direcionados

Grafos que representam uma família de caminhos irreversíveis, onde cada vértice é um ponto de decisão, são *grafos acíclicos direcionados* (DAG, do inglês *directed acyclic graphs*) (BANG-JENSEN; GUTIN, 2008, Cap. 2). São utilizados para representar, por exemplo, históricos de sistemas de controle de versão em repositórios (SINK, 2011, Cap. 4), ou diagramas de treliça para máquinas de estado – e. g. como em códigos convolucionais (TODD, 2005, Cap. 12). A interpretação da matriz de adjacência como um operador de difusão permite estudar o caminho de comprimento máximo em um DAG, e esta é uma das contribuições presentes nesta dissertação. Este é um dos dois objetivos desta subseção, juntamente com a demonstração de que DAGs têm matrizes de adjacência com características indesejáveis para GSP e para a implementação do operador proposto no Capítulo 4.

A Fig. 18 ilustra um DAG com arestas tendo a direção preferencial da esquerda para a direita. DAGs têm, necessariamente, vértices-*fonte* – aos quais nenhuma aresta se dirige – e vértices-*sumidouro* – dos quais nenhuma aresta parte; e o mais importante que cabe aqui notar é que, por força de sua definição, todo DAG pode ter seus vértices numerados de modo que, se uma aresta liga o vértice  $v_i$  ao  $v_j$ , então  $i < j$  (a esta forma de ordenar os vértices chama-se *ordenamento topológico*, do inglês *topological sorting/ordering*) (THULASIRAMAN; SWAMY, 1992). Como consequência, é possível numerar os vértices de um DAG de modo que sua matriz de adjacência seja uma matriz triangular inferior com diagonal principal nula.

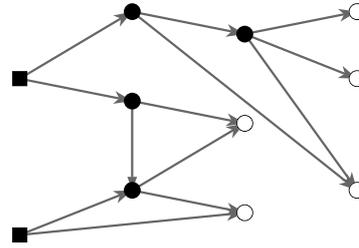
A Fig. 19 mostra o deslocamento sucessivo de um impulso localizado em um dos vértices-fonte de um DAG, propagando-se através da rede até que os únicos vértices com valor de sinal não-nulo sejam vértices-sumidouro. Neste momento, um novo deslocamento irá resultar num sinal nulo: como se a ação do operador  $\mathbf{A}$  sobre vértices-sumidouro fosse deslocar o sinal “para fora” do grafo. Matematicamente, o que ocorre é que, se o vértice  $v_i$  é sumidouro, então  $A_{i,j} = 0 \forall j$  e, portanto, o valor em  $v_i$  não é transferido para vértice algum. Em suma, se após  $L_1$  deslocamentos de um sinal-impulso  $\delta_1$ , originalmente num vértice-fonte (digamos,  $v_1$ ), os únicos vértices com valor não-nulo são sumidouros, então

$$\mathbf{A}^{L_1+1} \delta_1 = \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

O valor  $L_1$  indica o comprimento do *maior caminho percorrido pelo impulso em  $v_1$* . Se um sinal originalmente com valores não-nulos em *todos* os vértices-fonte (e somente neles) for deslocado ( $L + 1$  vezes) até se obter um sinal nulo, então  $L$  é o *comprimento do maior caminho do DAG*. O resultado em (3.6) mostra que a matriz de adjacência de DAGs é *nilpotente*, i.e. existe um inteiro  $k$  (chamado índice de nilpotência) para o qual  $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ , e o comprimento do maior caminho no DAG é dado por  $L = k - 1$ . Matrizes nilpotentes têm todos os autovalores iguais a zero, pois se  $\lambda$  é um autovalor de  $\mathbf{A}$ , associado ao autovetor  $\mathbf{v}$ , e se  $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ , então

$$\mathbf{A}^k \mathbf{v} = \mathbf{A}^{(k-1)} \lambda \mathbf{v} = \mathbf{A}^{(k-2)} \lambda^2 \mathbf{v} = \dots = \lambda^k \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0. \quad (3.7)$$

**Figura 18** – Exemplo de grafo acíclico direcionado, com fontes representadas por quadrados e sumidouros por círculos vazados.



Fonte: o autor.

O inverso também é verdade: se uma matriz quadrada  $\mathbf{M}$ ,  $N \times N$ , tem todos os autovalores nulos (i. e. tem polinômio característico dado por  $p_{\mathbf{M}}(\lambda) = \lambda^N = 0$ ), então ela é nilpotente, pois, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, toda matriz sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  satisfaz seu próprio polinômio característico, o que implica  $p_{\mathbf{M}}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^N = 0$  (LANG, 1987).

No Capítulo 4, usaremos com frequência a diagonalização da matriz de adjacência de um grafo, a fim de calcular sua potência não-inteira, mas isto não é possível para um DAG, pois nenhuma matriz nilpotente não-nula é diagonalizável<sup>1</sup>. Embora o fato da matriz ser não-diagonalizável não implique a inexistência de sua potência não-inteira, isso dificulta as manipulações algébricas e a generalização da teoria. Além disso, algumas matrizes nilpotentes *não possuem* potências fracionárias, como por exemplo a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

que não possui raiz quadrada (NORTHSHIELD, 2010), como demonstrado nos Apêndices.

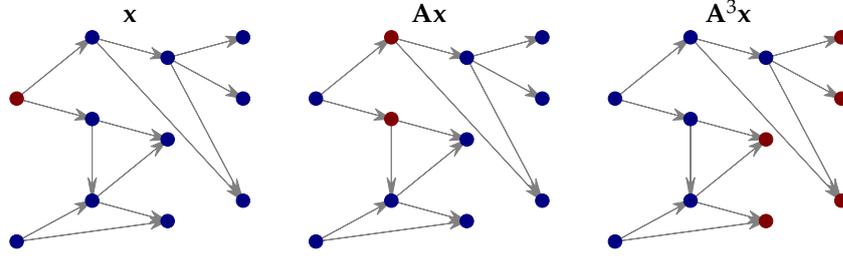
Por fim, outro aspecto curioso relativo a DAGs e  $\text{GSP}_A$  é que o espectro de um sinal definido sobre um DAG tem apenas uma frequência ( $\lambda = 0$ ). O mesmo ocorre quando o polinômio característico da matriz de adjacência de certo grafo é da forma  $p(\lambda) = (\lambda - c)^N$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

### 3.2 O operador *translação generalizada*

Numa série de trabalhos iniciados com uma publicação em 2012 (SHUMAN; RICAUD; VANDERGHEYNST, 2012; SHUMAN; RICAUD; VANDERGHEYNST, 2016), Shuman, Ricaud e Vandergheynst desenvolveram com sucesso sua contribuição para DSP via teoria espectral de grafos. Na tentativa de expandir os conceitos iniciais de processamento clássico de sinais para o contexto de grafos, especificamente para definir uma transformada de Fourier de curta duração sobre grafos (*windowed graph Fourier transform*), uma das primeiras operações a

<sup>1</sup> Isto é demonstrado por redução ao absurdo. Suponha que  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ , e ainda que existem matrizes  $\mathbf{P}$  (invertível) e  $\mathbf{D}$  (diagonal) tais que  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \neq \mathbf{0}$ . Isso implica  $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{D}^k = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0}$ , o que faria  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ , contrariando a hipótese.

**Figura 19** – Impulso sobre um vértice-fonte de um DAG, e suas versões deslocadas uma e três vezes. Vértices vermelhos indicam amostras unitárias, e vértices azuis indicam amostras iguais a zero. O sinal  $A^4\mathbf{x}$  é nulo.



Fonte: o autor.

serem investigadas foi a *translação* de sinais (presente no núcleo da STFT — *short-time Fourier transform*), e, para tanto, os autores primeiro elucidaram o conceito de *convolução* entre sinais sobre grafos.

A teoria criada por Shuman *et al.* compreende apenas grafos ponderados, não-direcionados e conectados. Como discutido no Capítulo 2, neste ferramental teórico, o par análise-síntese da GFT de um sinal  $\mathbf{x}$  é escrito como

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^* \mathbf{x}, \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (3.9b)$$

com  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0 \dots \mathbf{u}_{N-1}]$  sendo a matriz de autovetores da matriz Laplaciana.

Ao investigar uma definição apropriada de convolução entre sinais sobre grafos, os autores puseram-se a procurar uma propriedade ou característica desta operação no processamento clássico de sinais que pudesse servir de base para a generalização desejada. Uma vez que tampouco se tinha a noção de translação no domínio dos vértices, a equação integral que define a convolução temporal,

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad (3.10)$$

não foi um bom ponto de partida. Resolveu-se, então, partir da ideia já estabelecida da GFT e postular que o Teorema da Convolução é válido no contexto de processamento de sinais sobre grafos, para então escrever

$$\widetilde{\mathbf{x} * \mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}} \odot \tilde{\mathbf{y}}, \quad (3.11)$$

a partir do que, tomando a GFT inversa em ambos os lados, tem-se uma fórmula fechada que define a convolução entre dois sinais  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  definidos sobre o mesmo grafo:

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} \triangleq \mathbf{U} (\tilde{\mathbf{x}} \odot \tilde{\mathbf{y}}). \quad (3.12)$$

A definição do operador  $T_i$  de translação de  $i$  unidades no domínio dos vértices pode, então, ser derivada pela analogia com o processamento de sinais clássico, no qual  $g(t - u) = g(t) * \delta(t - u) = g(t) * \delta_u(t)$ .

Seja  $\delta_i$  o impulso unitário sobre o vértice  $v_i$ , i. e. um sinal nulo exceto pela  $i$ -ésima componente, de valor 1. A GFT deste sinal é

$$\tilde{\delta}_i = \mathbf{U}^* \delta_i = \begin{bmatrix} u_{0,i}^* \\ u_{1,i}^* \\ \vdots \\ u_{N-1,i}^* \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

De (3.13) e (3.12), o operador  $T_i$  é definido (SHUMAN; RICAUD; VANDERGHEYNST, 2012) como

$$T_i\{\mathbf{x}\} \triangleq \sqrt{N}(\mathbf{x} * \delta_i) = \sqrt{N}\mathbf{U}(\tilde{\mathbf{x}} \odot \tilde{\delta}_i), \quad (3.14)$$

em que o fator de escala  $\sqrt{N}$  visa preservar o valor médio do sinal, garantindo que  $\sum_{n=0}^{N-1} T_i\{\mathbf{x}\}_n =$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n \quad (\text{SHUMAN et al., 2013}).$$

Como exemplo, a seguir é replicado o uso ilustrativo do operador de translação generalizada tal como feito em (SHUMAN; RICAUD; VANDERGHEYNST, 2012), por meio de sua aplicação a um sinal do tipo *heat kernel* definido no domínio da frequência, dado por

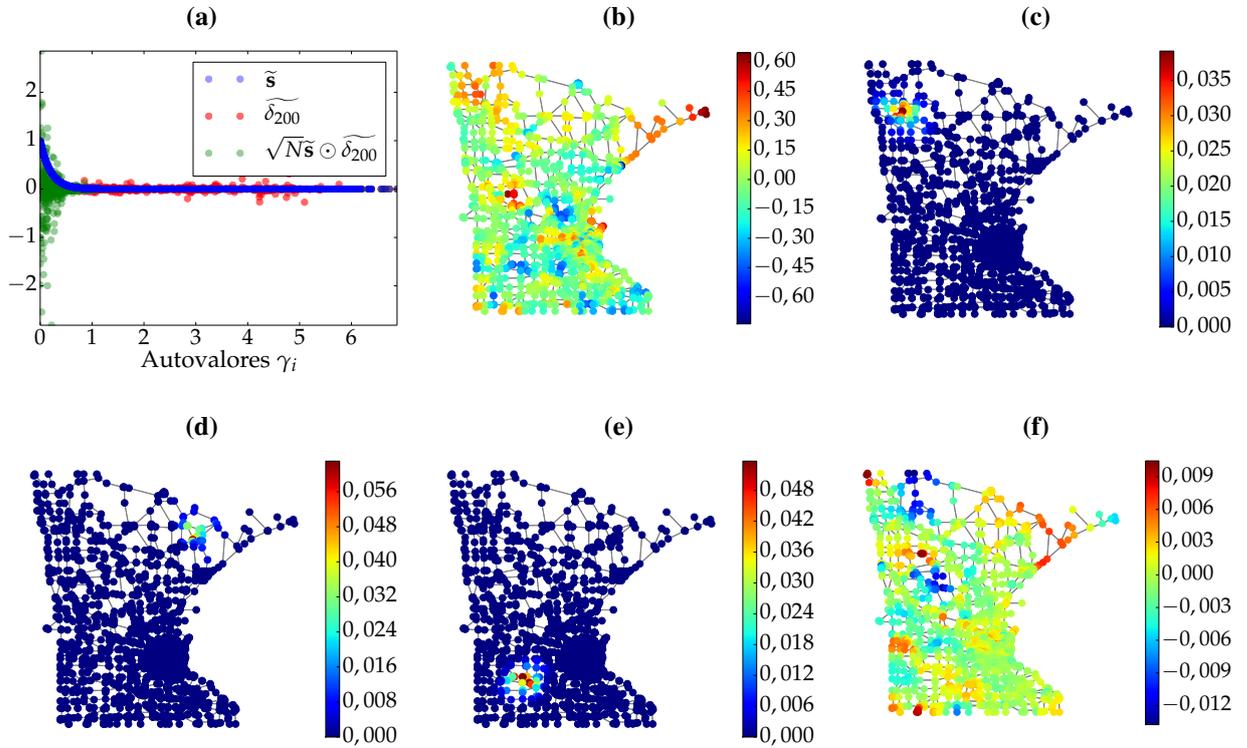
$$\tilde{\mathbf{s}} = \exp[-5 \text{diag}(\mathbf{\Gamma})], \quad (3.15)$$

cujo espectro e representação no domínio dos vértices são mostrados nas Figs. 20a e 20b. O grafo utilizado é *Minnesota road graph*, e foi retirado do banco de dados do pacote GSPBox, mencionado na Introdução deste trabalho. As Figs. 20c a 20e ilustram as translações  $T_{100}$ ,  $T_{200}$  e  $T_{2000}$ .

Um sinal bem localizado no domínio do tempo (como um impulso ou uma gaussiana) permanece localizado após a translação, mas isso não é observado no operador translação generalizada em  $\text{GSP}_L$ . Como mostrado na Fig. 21, onde usou-se  $T_{2000}\{\cdot\}$  (a Fig. 21c fornece uma noção sobre a posição do vértice  $v_{2000}$ ), quanto mais localizado no domínio dos vértices é o sinal, menos localizada em torno de  $v_i$  é sua versão deslocada por  $T_i\{\cdot\}$ . O mesmo se observa na Fig. 20f, resultado de  $T_{2000}\{T_{100}\{\mathbf{s}\}\}$ : o *heat kernel*, originalmente deslocalizado, concentrou sua energia em torno de  $v_{100}$  após a primeira translação, e voltou a se espalhar pelo grafo após a segunda translação. A mera deslocalização do sinal no domínio dos vértices, no entanto, não é suficiente para garantir localização do sinal deslocado, uma vez que observou-se que um ruído gaussiano permanece deslocalizado após operado por  $T_i\{\cdot\}$ . Mais estudos são portanto necessários para compreender e interpretar melhor o operador translação generalizada.

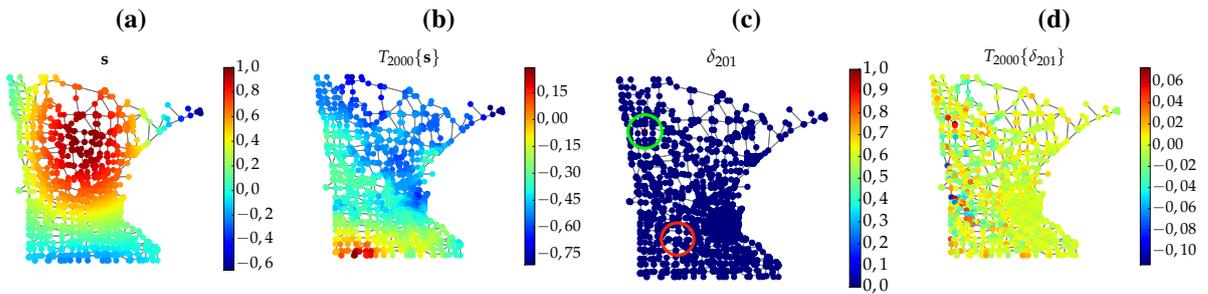
Cabem ainda alguns comentários sobre o operador de translação generalizada  $T_i\{\cdot\}$ . Ele foi inserido neste capítulo para apresentar uma das abordagens propostas ao problema de definir um deslocamento de um sinal sobre um grafo, mas percebe-se que o efeito de  $T_i\{\cdot\}$  não é de transportar amostras de um sinal ao longo do domínio. Embora a analogia buscada da teoria

**Figura 20** – (a) Espectro do *heat kernel* e (b) sinal no domínio dos vértices. Resultado da translação do *heat kernel* (c)  $T_{100}\{s\}$ , (d)  $T_{200}\{s\}$  e (e)  $T_{2000}\{s\}$ . Em (f), o resultado de  $T_{2000}\{T_{100}\{s\}\}$ .



Fonte: o autor.

**Figura 21** – (a) Sinal suave fracamente localizado e o (c) impulso  $\delta_{201}$  (o vértice  $v_{201}$  se encontra dentro do círculo verde), com suas respectivas versões deslocadas por  $T_{2000}\{\cdot\}$  em (b) e (d). O círculo vermelho em (c) contém o vértice  $v_{2000}$ .



Fonte: o autor.

clássica de DSP produza de fato o deslocamento do sinal, tal equivalência não se observa em GSP. A motivação de Shuman *et al.* foi inicialmente de desenvolver uma versão da transformada de Fourier de curta duração, a STFT, para sinais sobre grafos, e para isso precisavam de um operador  $T_i\{\cdot\}$  que localizasse um certo sinal em torno de  $i$ . Tal motivação não visa necessariamente preservar a noção de deslocamento unitário, no domínio do tempo — ou dos vértices —, como sendo uma transferência de valor a pontos contíguos do domínio, e portanto o operador que os autores obtiveram não age de acordo com essa interpretação.

### 3.3 A matriz de translação de Girault

Como comentado nas Seções anteriores, tanto a matriz de adjacência de um grafo como o operador de translação generalizada não preservam a norma do sinal operado. Motivado a preencher esta lacuna, Girault *et al.* buscou em 2015 definir um operador de translação de sinais sobre grafos isométrico com relação à norma  $\ell_2$  (GIRAULT; GONCALVES; FLEURY, 2015; GIRAULT, 2015; GIRAULT *et al.*, 2016).

As definições de Girault se enquadram em  $\text{GSP}_L$ , e portanto consideram sinais definidos sobre grafos não-direcionados, com pesos reais não-negativos, tomando os autovetores da matriz Laplaciana como base para a análise espectral. Girault chama de *convolutivo* o operador linear  $\mathbf{H}$  cuja ação no domínio da frequência é uma matriz diagonal; ou seja, trata-se de um filtro no sentido de  $\text{GSP}_L$ , uma matriz diagonalizada pela matriz de autovetores de  $\mathbf{L}$ . Ao definir seu operador de translação, Girault impõe não apenas a isometria, mas que seja também linear e convolutivo.

O operador de translação sobre grafos, chamado por Girault de *graph translation*, é a matriz  $\mathbf{T}_G = \mathbf{U}\widehat{\mathbf{T}}_G\mathbf{U}^*$ . Observando que, na teoria clássica, o operador de deslocamento unitário  $T\{\cdot\}$  tem as componentes de Fourier como autofunções,

$$T\{e^{j\omega n}\} = e^{j\omega(n-1)} = e^{-j\omega} e^{j\omega n}, \quad (3.16)$$

com autovalores  $e^{-j\omega}$ , Girault *et al.* partiram para definir

$$\widehat{\mathbf{T}}_G = \exp(j\widehat{\mathbf{\Omega}}), \quad (3.17)$$

em que  $\widehat{\mathbf{\Omega}}$  é uma matriz diagonal e a exponencial é tomada elemento-a-elemento, ao longo da diagonal. Com isso,  $\mathbf{T}_G$  já atende os requisitos para ser um operador linear, convolutivo e isométrico. Os autores quiseram, no entanto, definir a matriz  $\widehat{\mathbf{\Omega}}$  de modo consistente com (3.16) e, por isso, as entradas na diagonal de  $\widehat{\mathbf{\Omega}}$  foram definidas como sendo frequências, que, por sua vez, são aqui interpretadas como a raiz quadrada do módulo dos autovalores do operador  $\mathbf{L}$ , como visto em (2.33), de modo que as entradas seriam  $-\sqrt{\gamma_i}$ . Os autores, quiseram, ainda, *reduzir* as frequências, multiplicando por um fator de escala, de modo que as frequências positivas estejam no intervalo  $[0, \pi]$ , como no caso de sinais de tempo discreto. Para isso, usaram um limite superior para os autovalores da matriz Laplaciana ((DAS, 2011), como citado em (GIRAULT; GONCALVES; FLEURY, 2015)),

$$\rho_G = \max_{v_i \in \mathcal{V}} \sqrt{2d_i(d_i + \bar{d}_i)}, \quad \text{com} \quad \bar{d}_i = \frac{\sum_{v_j \in \mathcal{N}(i)} A_{i,j} d_j}{d_i}. \quad (3.18)$$

Uma forma vetorizada de se obter o vetor  $\bar{\mathbf{d}}$  é

$$\bar{\mathbf{d}} = \text{diag}\left(\frac{1}{d_i}\right) \mathbf{A}\mathbf{d}, \quad (3.19)$$

em que  $\mathbf{d}$  é o vetor coluna contendo os graus de cada vértice, e  $\text{diag}\left(\frac{1}{d_i}\right)$  é a matriz diagonal cujas entradas são os inversos multiplicativos de cada grau.

Com isso, a matriz de frequências reduzidas é dada por

$$\widehat{\Omega} = \text{diag}\left(-\pi\sqrt{\gamma_i/\rho_G}\right)_{i=0,\dots,N-1}, \quad (3.20)$$

e a matriz de translação sobre grafos de Girault,  $\mathbf{T}_G = \mathbf{U}\widehat{\mathbf{T}}_G\mathbf{U}^*$ , é definida como (GIRAULT; GONCALVES; FLEURY, 2015)

$$\mathbf{T}_G \triangleq \exp\left(-j\pi\sqrt{\mathbf{L}/\rho_G}\right). \quad (3.21)$$

Tal definição carrega uma propriedade também encontrada em DSP, que é aquela em que o deslocamento unitário preserva a componente DC de um sinal, pois

$$\mathbf{T}_G\mathbf{u}_0 = \mathbf{U} \text{diag}\left[\exp\left(-j\pi\sqrt{\gamma_i/\rho_G}\right)\right] \mathbf{U}^*\mathbf{u}_0 = \mathbf{U} \text{diag}\left[\exp\left(-j\pi\sqrt{\gamma_i/\rho_G}\right)\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

e, como  $\gamma_0 = 0$ , então  $\exp\left(-j\pi\sqrt{\gamma_0/\rho_G}\right) = 1$  e

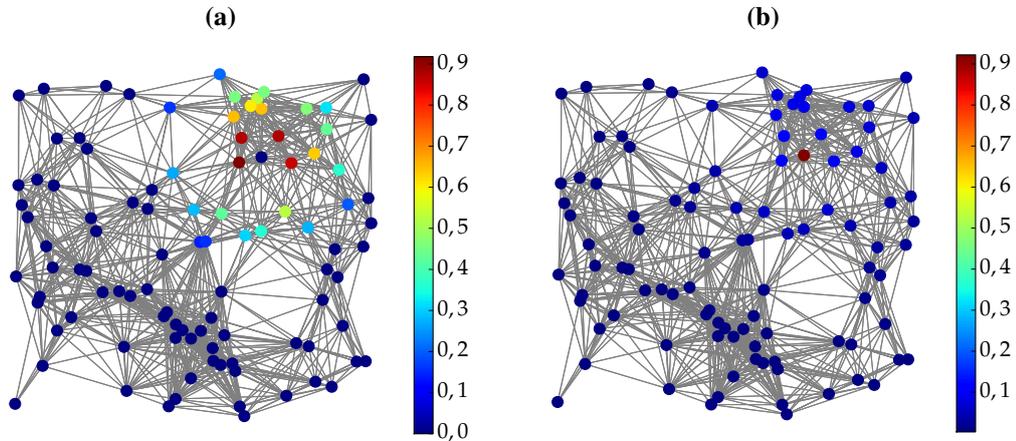
$$\mathbf{T}_G\mathbf{u}_0 = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_0. \quad (3.23)$$

Girault prioriza o requerimento por isometria do operador (i. e., preservação da norma  $\ell_2$ ), em detrimento de dar à translação uma interpretação como uma real difusão de valor entre os vértices do grafo. No domínio do tempo, o operador deslocamento unitário preserva tanto a norma  $\ell_2$  como a soma do sinal (de fato, preserva qualquer norma  $\ell_n$ ), mas o mesmo não ocorre em GSP: os autores que propuseram operadores de deslocamento precisaram escolher entre preservar uma ou outra norma. Por isso, ao garantir a isometria com respeito à norma  $\ell_2$ , a matriz  $\mathbf{T}_G$  falha em preservar a soma do sinal,

$$\sum_n (\mathbf{T}_G\mathbf{x})_n \neq \sum_n x_n, \quad (3.24)$$

e por isso o valor que um vértice transfere aos vizinhos, após a translação de Girault do sinal, não é igual à soma dos valores recebidos pelos vizinhos. De fato, sequer faz sentido falar em *transferência* de valor de um vértice aos vizinhos. Em comparação com a matriz de adjacência, embora ambos falhem em preservar a soma (a menos que  $\mathbf{A}$  tenha as colunas ou linhas escalonadas para garantir (3.3)),  $\mathbf{A}$  comporta-se como um operador de difusão, deslocando totalmente um impulso em um vértice para os vizinhos, enquanto  $\mathbf{T}_G$  mantém a maior parte do impulso deslocado no mesmo vértice de “origem”, como ilustrado na Fig. 22.

**Figura 22** – Deslocamento unitário realizado sobre o impulso  $\delta_{20}$  pela (a) matriz de adjacência e pela (b) matriz de translação de Girault.



Fonte: o autor.

### 3.4 Discussão

Três operadores diferentes foram apresentados, retirados da literatura de GSP, para realizar o deslocamento ou translação de sinais definidos sobre grafos. A definição de cada operador precisou ser precedida pela escolha de alguma característica da operação de deslocamento unitário em DSP, para servir-lhe de base e ponto de partida, e observou-se que em GSP há sempre um compromisso, nunca é possível herdar todas as propriedades desejáveis das operações que se tem em DSP: ao preservar um aspecto, outro é deixado de lado.

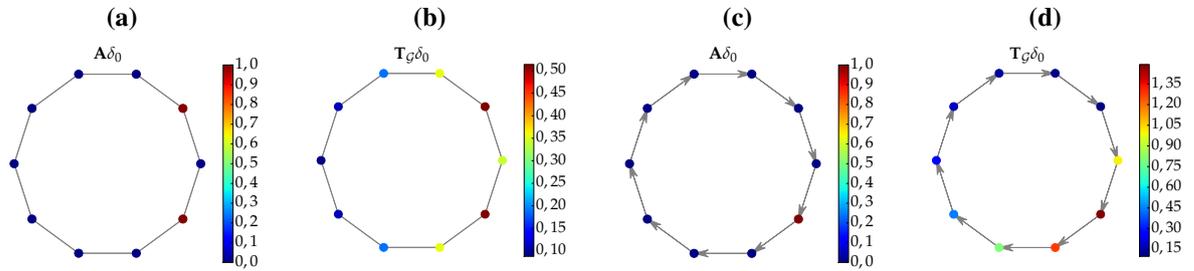
A matriz de adjacência é o bloco fundamental da teoria de  $\text{GSP}_A$ , definido como um operador de deslocamento diretamente no domínio dos vértices, generalizando o que se observa com a matriz de adjacência de grafos direcionados em anel. A matriz  $A$  comporta-se como um operador de difusão, de transporte de valor de uma amostra para as vizinhas, e embora não preserve as normas  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , o efeito de seu deslocamento é o mais intuitivo dos três operadores apresentados.

O operador translação generalizada  $T_i\{\cdot\}$  foi construído sob a premissa de equivaler à convolução com o impulso, e a escolha por preservar esse aspecto de DSP levou à ausência de uma interpretação mais intuitiva para o que ocorre no domínio dos vértices. A intenção, de fato, não era realizar a transferência de valor de um vértice para os vizinhos, mas sim de localizar o *kernel* da *windowed graph Fourier Transform* em torno de um vértice. O operador obtido preserva a soma do sinal, mas não sua norma.

A matriz  $T_G$ , por fim, foi projetada para preservar a norma do sinal deslocado, sob a analogia com DSP em que o deslocamento unitário de uma exponencial complexa é um produto por  $e^{j\omega}$ . Sua definição considera o contexto de  $\text{GSP}_L$ , e consegue atingir o requisito da isometria sem perder por completo a intuição do deslocamento de valores pelos vértices do grafo. A Fig. 23 mostra a diferença entre a matriz de Girault e a matriz de adjacência para grafos em anel

direcionado e não-direcionado, ilustrando que, ainda assim, o deslocamento unitário parece ser melhor representado pela matriz  $A$  do que por  $T_G$ , se deseja-se visualizar a difusão do sinal.

**Figura 23** – Deslocamento do impulso  $\delta_0$  pela matriz de adjacência e pela matriz de translação de Girault, em grafos em anel direcionados e não-direcionados.



Fonte: o autor.

## 4 DESLOCAMENTO FRACIONÁRIO DE SINAIS SOBRE GRAFOS

Nos capítulos precedentes, foram introduzidos os primeiros conceitos da teoria de GSP e os principais operadores de deslocamento de sinais sobre grafos. Ficou claro como diferentes aplicações podem requerer propriedades distintas para os operadores em uso, e, conseqüentemente, requerer definições distintas para os mesmos fenômenos presentes em DSP.

Os capítulos seguintes serão dedicados à proposição de um operador de *deslocamento fracionário* de sinais sobre grafos, até então inexistente na Literatura em GSP, e de uma possível aplicação deste operador. A abordagem propõe a fracionarização de um dos operadores de deslocamento vistos no Capítulo 3. A matriz de Girault parece, à primeira vista, a mais adequada à proposta, uma vez que ela é sempre diagonalizável (no contexto de  $\text{GSP}_L$ ) e sua potência não-inteira é obtida diretamente de sua decomposição espectral:  $\mathbf{T}_G = \mathbf{U}\hat{\mathbf{T}}_G\mathbf{U}^* \Rightarrow \mathbf{T}_G^a = \mathbf{U}\hat{\mathbf{T}}_G^a\mathbf{U}^*$ . Tendo em vista, no entanto, a exploração do sentido de difusão e transferência da amostra de um vértice aos vizinhos, optou-se por definir o operador de deslocamento fracionário em termos da matriz de adjacência, e estudar as conseqüências e propriedades desta definição.

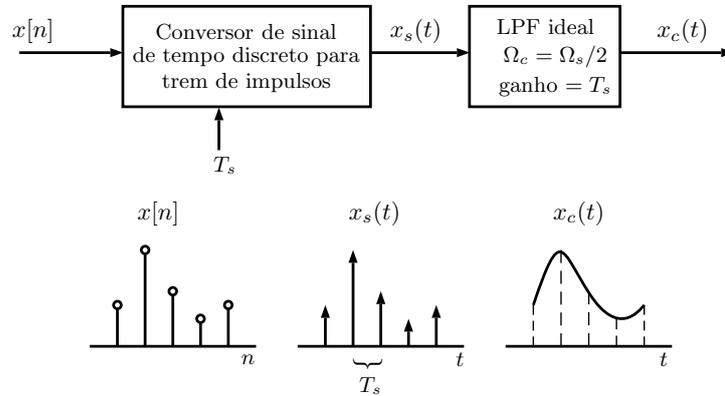
### 4.1 A abordagem clássica para o deslocamento não-inteiro de sinais

Na abordagem clássica do problema do deslocamento fracionário de um sinal de tempo discreto, o modelo matemático busca reconstruir o sinal contínuo do qual o discreto contém as amostras, deslocar esta versão contínuo e então reamostrá-la com o mesmo período de amostragem (OPPENHEIM; SCHAFER, 2013; VÄLIMÄKI, 1995). Esta modelagem carrega, por necessidade do Teorema de Nyquist-Shannon, a restrição do sinal ter banda limitada. Nesta seção o modelo clássico do deslocamento fracionário será brevemente revisitado para, na seção seguinte, compará-lo com a abordagem proposta no caso dos grafos em anel direcionados, nos quais ambos os modelos — o clássico e o presente — devem concordar.

A primeira etapa para o deslocamento fracionário é a reconstrução do sinal contínuo  $x_c(t)$  (conversão digital-analógica, segundo a Figura 24), modelada em dois estágios: primeiro, gera-se um trem de impulsos  $x_s(t)$  a partir do sinal discreto  $x[n]$  (com cada impulso em  $t = nT_s$  tendo área igual a  $x[n] = x_c(nT_s)$ ), e em seguida é realizada uma filtragem passa-baixa ideal, com frequência de corte  $\Omega_c = \Omega_s/2$  (supõe-se que o sinal tem banda limitada superiormente por  $f_B$  e foi amostrado com frequência  $f_s \geq 2f_B$ ). O resultado do primeiro estágio é apenas o produto de  $x_c(t)$  por um trem periódico de impulsos de área unitária, pois

$$x_s(t) = \sum_n x[n]\delta(t - nT_s) = \sum_n x_c(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

**Figura 24** – Diagrama de blocos representando as etapas do modelo matemático de um conversor digital-analógico perfeito.



Fonte: adaptado de (OPPENHEIM; SCHAFER, 2013, Cap. 4).

$$= x_c(t) \underbrace{\sum_n \delta(t - nT_s)}_{\triangleq s(t)} = x_c(t)s(t). \quad (4.1)$$

O último bloco do conversor D/A ideal na Fig. 24 é bem compreendido a partir da observação do espectro de  $x_s(t)$ . Pela propriedade da convolução da transformada de Fourier de tempo contínuo,

$$X_s(j\Omega) = \mathcal{F}\{x_c(t)s(t)\} = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega), \quad (4.2)$$

em que  $*$  representa a convolução. Uma vez que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s(t)\} &= S(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\Omega t} dt \\ &= \Omega_s \sum_k \delta(\Omega - k\Omega_s), \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

então

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \Omega_s \sum_k X_c(j\Omega) * \delta(\Omega - k\Omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_k X_c(\Omega - k\Omega_s), \end{aligned} \quad (4.4)$$

de modo que  $X_s$  é uma soma infinita de cópias de  $X_c$  escalonadas e deslocadas por múltiplos de  $\Omega_s$ . Para a recuperação de  $X_c$ , basta portanto que a amostragem tenha sido feita sem *aliasing* e que o sinal sofra uma filtragem passa-baixas ideal, de amplitude  $T_s$  e frequência de corte  $\frac{\Omega_s}{2}$ . Tal filtro, com resposta em frequência  $H_{LPF}(j\Omega)$ , tem resposta ao impulso dada por

$$\begin{aligned}
h_{LPF}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{LPF}(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t} d\Omega \\
&= \text{sinc} \left( \frac{t}{T_s} \right).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Ou seja, o sinal de tempo contínuo reconstruído a partir de suas amostras  $x[n]$  é

$$\begin{aligned}
x_c(t) &= x_s(t) * h_{LPF}(t) = \sum_k x[k] \delta(t - kT_s) * \text{sinc} \left( \frac{t}{T_s} \right) \\
&= \sum_k x[k] \text{sinc} \left( \frac{t - kT_s}{T_s} \right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Uma vez que a reamostragem de  $x_c(t)$ , partindo de (4.6), resultaria no sinal de tempo discreto

$$x[n] = x_c(nT_s) = \sum_k x[k] \text{sinc} \left( \frac{nT_s - kT_s}{T_s} \right), \tag{4.7}$$

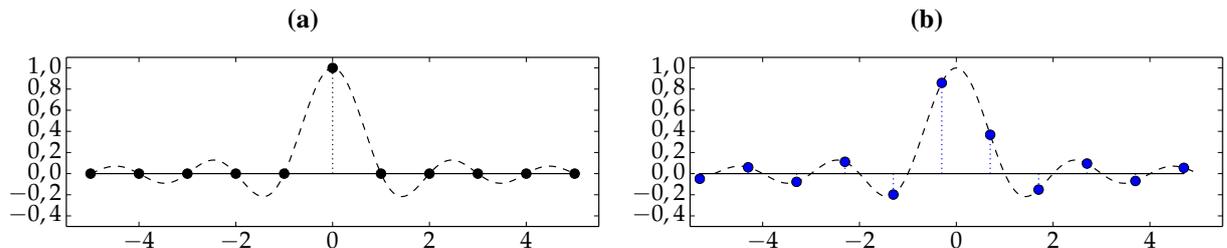
a versão de  $x[n]$  deslocada por um valor  $0 \leq a \leq 1$ , produzindo uma interpolação ideal, é dada por

$$\begin{aligned}
x[n - a] &= x_c(nT_s - aT_s) = \sum_k x[k] \text{sinc} \left( \frac{nT_s - aT_s - kT_s}{T_s} \right) \\
&= \sum_k x[k] \text{sinc}(n - k - a) = (x * h_{LPF})[n],
\end{aligned} \tag{4.8}$$

de modo que o filtro passa-baixa ideal para interpolação perfeita, segundo (4.8), é

$$h_{LPF}[n] = \text{sinc}(n - a). \tag{4.9}$$

**Figura 25** – Respostas ao impulso do filtro de (a) deslocamento nulo (operador identidade) e (b) de deslocamento não-inteiro  $\text{sinc}(n - 0,3)$ .



Fonte: o autor.

A Fig. 25 mostra as respostas ao impulso dos filtros de deslocamento nulo  $\delta[n]$  (ou inteiro,  $\delta[n - k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ), e de deslocamento fracionário  $\text{sinc}(n - a)$ .

## 4.2 Deslocamento fracionário de sinais sobre grafos

Uma vez que o deslocamento unitário de um sinal pode ser entendido como o produto pela matriz de adjacência do grafo no qual ele é definido, propõe-se, neste trabalho, definir um deslocamento fracionário de um sinal sobre um grafo como o produto por uma potência não-inteira de  $\mathbf{A}$ . Precisamente, a versão do sinal  $\mathbf{x}$ , definido sobre o grafo  $\mathcal{G} = \{\mathbf{A}, \mathcal{V}\}$ , deslocado de  $a \in [0, 1]$ , é dada por

$$\mathbf{x}^{(a)} = \mathbf{A}^a \mathbf{x}. \quad (4.10)$$

Para elucidar o significado de (4.10), partindo da decomposição espectral (2.7), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^a \mathbf{x} &= \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^a \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \lambda_1^a & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N^a \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{V}(\hat{\mathbf{h}}_a \odot \hat{\mathbf{x}}) = \text{GFT}^{-1}\{\hat{\mathbf{h}}_a \odot \hat{\mathbf{x}}\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

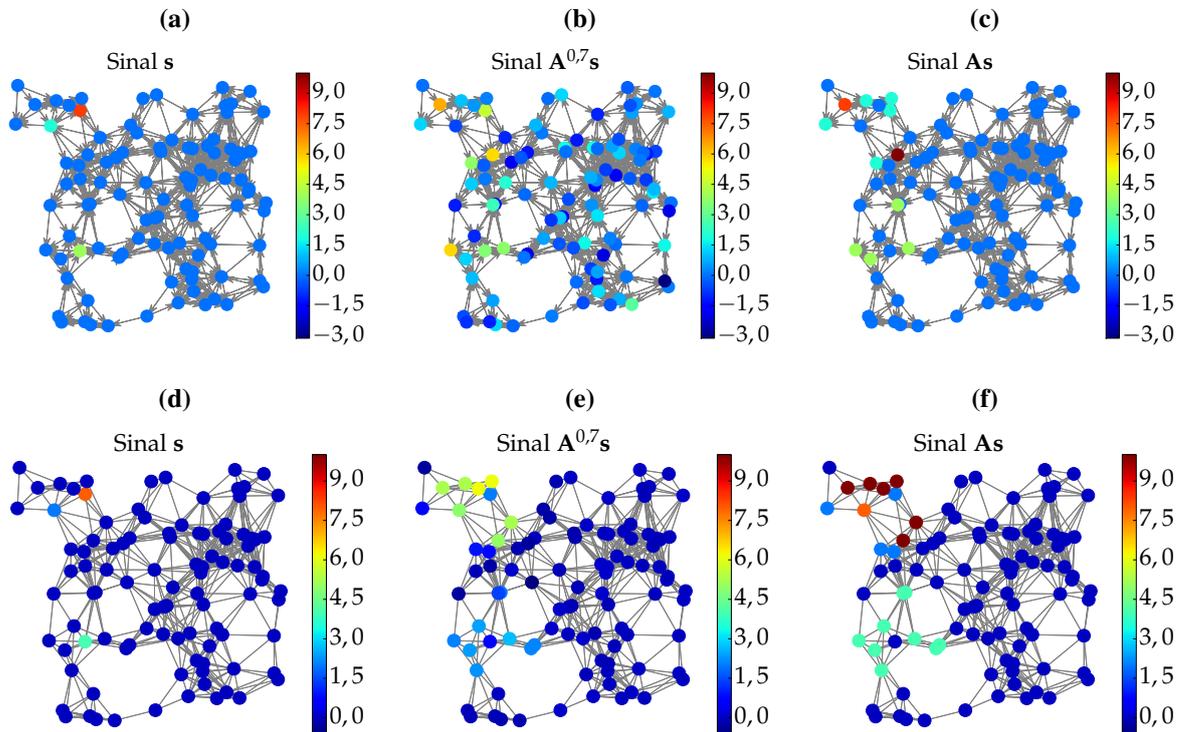
em que  $\hat{\mathbf{h}}_a \triangleq (\lambda_1^a \dots \lambda_N^a)$ . Percebe-se que o operador de deslocamento fracionário é um filtro de sinais sobre grafos com resposta em frequência dada pelos autovalores de  $\mathbf{A}$  elevados ao parâmetro não-inteiro  $a$ .

A definição adotada tem três consequências que importa mencionar. A primeira é que o operador  $\mathbf{A}^a$  não é único, por consequência da não-unicidade da radiciação quando se considera valores complexos: por exemplo, se um dos autovalores de  $\mathbf{A}$  for  $\lambda_i = 2$  e  $a = 1/3$ , então a  $i$ -ésima componente do vetor  $\hat{\mathbf{h}}_a$  pode ser qualquer um dos valores  $2^{1/3} \exp(jk\frac{1}{3})$ , com  $k = 0, 1, 2$ . Isso não altera a magnitude da resposta em frequência do filtro, mas altera sua fase. A consequência da não-unicidade do filtro é uma questão para estudo futuro.

A segunda consequência é o problema do cálculo e, antes, da própria existência da potência não-inteira de  $\mathbf{A}$ . A álgebra envolvendo esse cálculo para matrizes não-diagonalizáveis, como no caso dos DAGs da Subseção 3.1.1, envolve potências fracionárias da matriz de Jordan, para o que, aparentemente, não há uma fórmula fechada em função do expoente  $a$ , como em (4.11). Além do mais, como também exemplificado na Subseção 3.1.1, há matrizes para as quais certas potências não-inteiras não existem.

Por fim, percebe-se que o deslocamento por  $a$ , seguido de um deslocamento por  $1 - a$ , causa um deslocamento final de uma unidade, por consequência da álgebra de matrizes:  $\mathbf{A}^a \cdot \mathbf{A}^{1-a} = \mathbf{A}$ , que seria o comportamento esperado e desejado para tal operador. A Fig. 26 mostra dois grafos de sensores de 100 vértices, um direcionado e outro não-direcionado, que servem de domínio para um mesmo sinal  $\mathbf{s}$ , com apenas 3 amostras não-nulas. São mostradas, ainda, as versões do sinal deslocado por  $a = 0,7$  e por  $a = 1$ . O sinal  $\mathbf{A}^{0,7} \mathbf{s}$  sobre o grafo não-direcionado, mostrado na Fig. 26e, é claramente uma versão *intermediária* entre os sinais  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{A} \mathbf{s}$ , na qual houve uma *difusão parcial* de valor das amostras de  $\mathbf{s}$  às vizinhas. Esse comportamento do

**Figura 26** – Deslocamento fracionário ( $a = 0,7$ ) e unitário de um sinal sobre um grafo de sensores direcionado e outro não-direcionado.



Fonte: o autor.

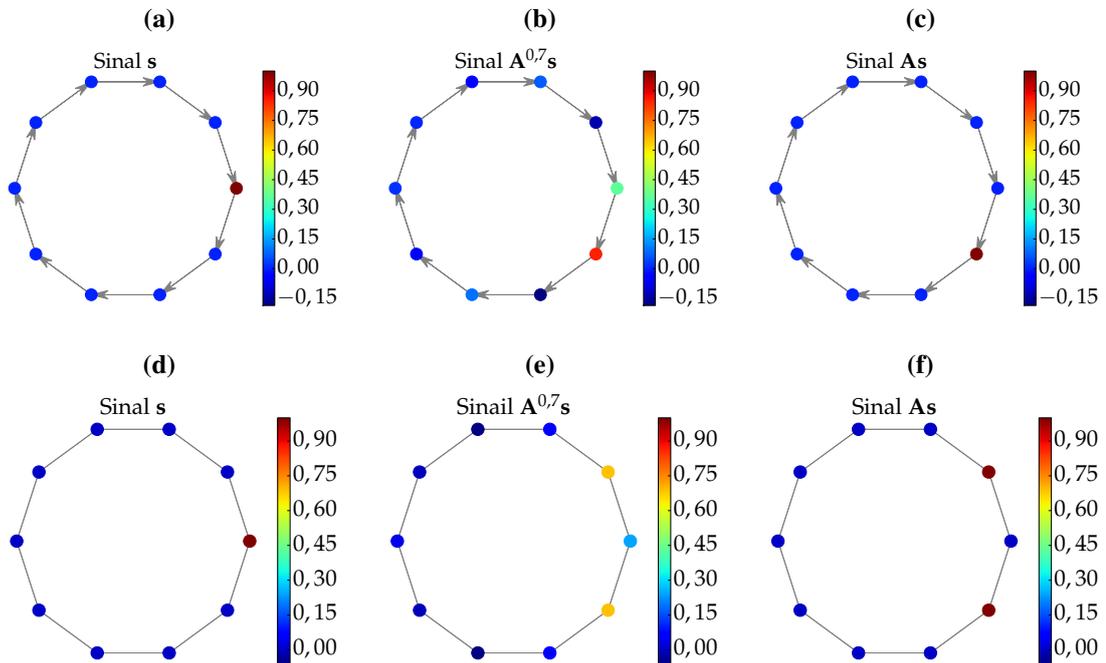
operador de deslocamento fracionário é consequência da escolha da matriz de adjacência como operador de deslocamento unitário.

#### 4.2.1 Interpretando o operador $A^a$

A Fig. 26 sugere que a interpretação mais adequada sobre o efeito causado pelo operador  $A^a$  depende da diretividade do grafo em questão. A ideia de difusão paulatina do sinal, espalhando as amostras de cada vértice sobre os vértices vizinhos, é bem consistente com o observado no grafo não-direcionado, mas, no grafo direcionado, o deslocamento não-inteiro do sinal causa uma perturbação *por todo o grafo*, que cessa apenas quando o parâmetro  $a$  atinge o valor 1. As amostras não nulas na Fig. 26b não são todas resultado da transferência de valor dos 3 vértices não nulos do sinal original, como seria de se esperar interpretando  $A^a$  como um operador de difusão, apenas.

Conjectura-se aqui que o fenômeno de “perturbação” ao longo do grafo direcionado está ligado à interpolação do sinal deslocado, sendo da mesma natureza do fenômeno observado na Fig. 25, com o deslocamento de um impulso no domínio de tempo discreto: embora o deslocamento unitário do impulso seja um fenômeno local, variando apenas a amostra original do impulso e a amostra seguinte, o deslocamento não-inteiro perturba (i.e., cria amostras em) todo o domínio, por ser uma interpolação do sinal contínuo do qual o impulso é apenas uma amostra. De fato, o grafo em anel que modela o domínio do tempo discreto é, como visto, também

**Figura 27** – Deslocamento fracionário ( $a = 0,7$ ) e unitário de um sinal sobre um grafo em anel direcionado e outro não-direcionado.



Fonte: o autor.

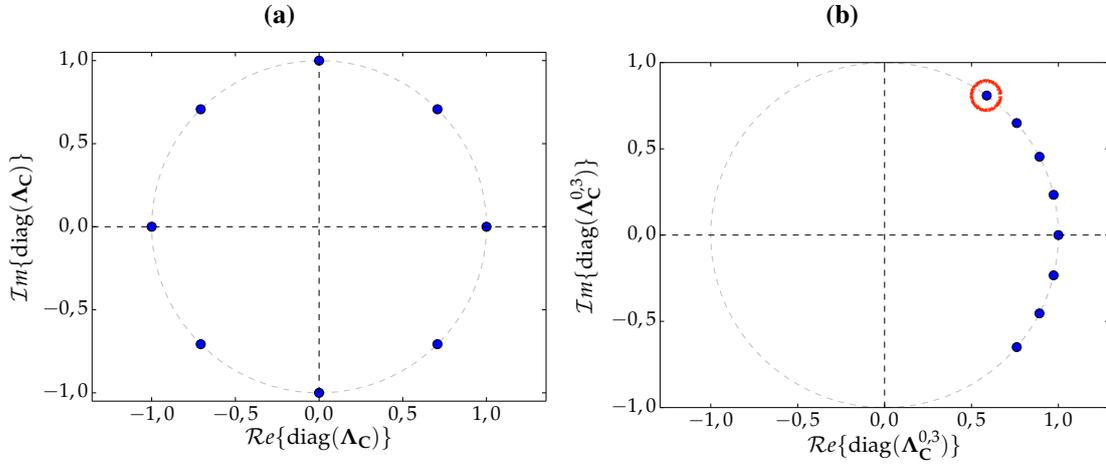
direcionado. A Fig. 27 traz o deslocamento fracionário em grafos em anel, um direcionado e outro não-direcionado, mostrando a diferença de comportamento entre ambos.

A ideia de interpolação por meio do deslocamento fracionário de um sinal sobre o grafo em anel direcionado é bem compreendida, especialmente se comparadas as Figs. 27 e 25: o deslocamento de um sinal sobre o grafo em anel direcionado é a rotação do anel sob o sinal contínuo, ou, equivalentemente, difusão das amostras sobre as arestas do grafo, gerando a informação interpolada. Esta compreensão é difícil de generalizar para qualquer grafo, pois, em geral, o número de vértices e de arestas não coincide: as  $|\mathcal{V}| = N$  amostras do sinal original não podem deslocar-se para gerar  $|\mathcal{E}| = E$  amostras do sinal deslocado por meio do produto por uma matriz quadrada como  $A^a$ . Algumas investigações acerca do uso do deslocamento fracionário para sinais sobre grafos quaisquer estão em andamento, como por exemplo estudar o uso da matriz de incidência  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times E}$  como mapeamento intermediário desta interpolação, e o capítulo seguinte contorna este problema para um caso particular, onde vários deslocamentos usando grafos em anel são realizados.

#### 4.2.2 O caso para grafos em anel: sinais de tempo discreto

Uma vez que o grafo em anel direcionado, com pesos unitários, modela o domínio de tempo discreto, a aplicação do operador  $C^a$  (vide (2.3)) para sinais de tempo discreto deveria aproximar a abordagem clássica para o deslocamento fracionário ideal. Adiante investiga-se o operador  $C^a$  e sua semelhança com (4.9).

**Figura 28** – (a) As  $N = 8$  raízes da unidade, entradas da diagonal da matriz  $\Lambda_C$ ,  $N \times N$ , e (b) uma possível escolha das fases das entradas de  $\hat{\mathbf{h}}_a$  para  $a = 0,3$ . Circulada em vermelho, a entrada de  $\hat{\mathbf{h}}_a$  que quebra a simetria.



Fonte: o autor.

Vê-se em (4.11) que  $\mathbf{A}^a$  é um filtro de grafo com resposta em frequência  $\text{diag}(\hat{\mathbf{h}}_a)$ , e que, se  $\mathbf{x}$  é um sinal de tempo discreto de  $N$  pontos (caso em que a GFT coincide com a DFT), observa-se que o filtro *no domínio da DFT* é o próprio vetor  $\hat{\mathbf{h}}_a$ . Neste caso, foi discutido que a matriz de adjacência do respectivo grafo é diagonalizada segundo (2.12), em que  $\Lambda_C$  tem como entradas as  $N$  raízes da unidade. O fato da matriz de autovetores de  $\mathbf{C}$  ser a matriz de Fourier impõe uma ordem específica aos autovalores em  $\Lambda_C$ , de forma que o vetor  $\hat{\mathbf{h}}_a$  é

$$\hat{\mathbf{h}}_a = (1 \ w^a \ w^{2a} \ \dots \ w^{aR} \ w^{-aR'} \ w^{a(-R'+1)} \ \dots \ w^{-a}), \quad (4.12)$$

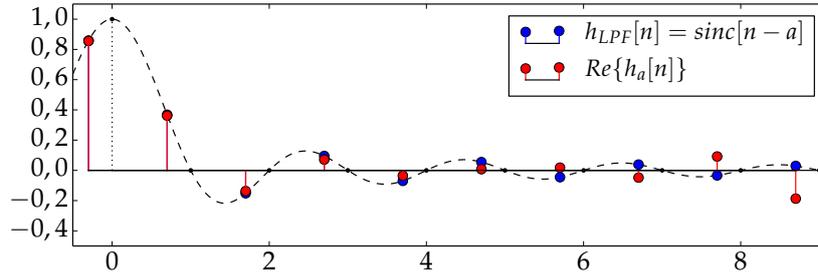
em que  $w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  e

$$\begin{cases} R = \frac{N-1}{2} \text{ e } R' = R, & \text{se } N \text{ for ímpar,} \\ R = \frac{N}{2} - 1 \text{ e } R' = R + 1, & \text{se } N \text{ for par,} \end{cases} \quad (4.13)$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$ . Aqui surge a não-unicidade própria de  $\mathbf{A}^a$ : apesar da ordem dos autovalores ser fixada pela escolha da matriz de autovetores como sendo a matriz da DFT, há certa liberdade para a escolha da fase das entradas do vetor  $\hat{\mathbf{h}}_a$ . Para explorar simetrias, optou-se por escolher as fases tais que a resposta em frequência  $\hat{\mathbf{h}}_a$  seja simétrica, no plano complexo, em relação à reta real, para valores ímpares de  $N$ . Para valores pares de  $N$ , a simetria é quebrada por apenas uma entrada do vetor, que “sobra” acima (como na Fig. 28) ou abaixo da reta real.

Mostra-se nos Apêndices que a DFT inversa de  $\hat{\mathbf{h}}_a$  tem componentes dadas por

$$h_a[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\text{sen}\pi(n-a)}{\text{sen}\frac{\pi}{N}(n-a)}, & \text{se } N \text{ for ímpar,} \\ \frac{1}{N} \cotan\frac{\pi}{N}(n-a) \text{sen}\pi(n-a) + \frac{j}{N}(-1)^n \text{sen}\pi a, & \text{se } N \text{ for par.} \end{cases} \quad (4.14)$$

**Figura 29** – Amostras das respostas ao impulso  $\mathbf{h}_{LPF}$  e  $\mathbf{h}_a$  para  $a = 0,3$  e  $N = 10$ .

Fonte: o autor.

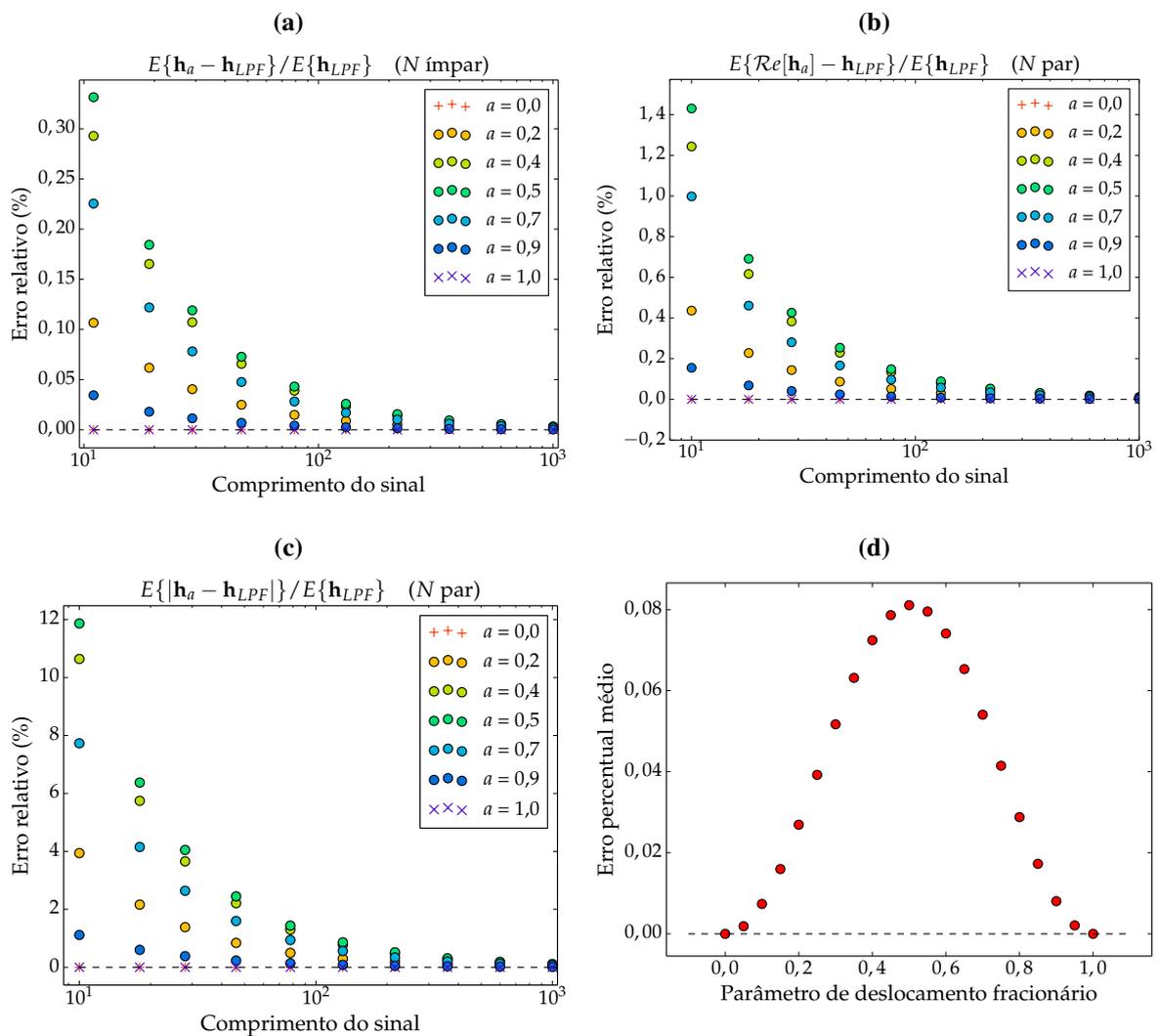
Percebe-se que, por consequência da simetria na escolha das fases quando  $N$  é ímpar, a resposta ao impulso nesse caso  $\mathbf{h}_a$  é puramente real. Caso contrário, ela possui uma componente imaginária de módulo constante e sinal alternante.

Visualmente, as respostas ao impulso  $\mathbf{h}_a$  e  $\mathbf{h}_{LPF}$ , quando sobrepostas, assemelham-se bastante, como visto na Fig. 29. Pode-se mostrar ainda que, para  $a = 0$ , ambos os vetores coincidem (vide Apêndice). Mas, a fim de quantificar a semelhança entre as respostas ao impulso, e verificar o quanto  $\mathbf{h}_a$  aproxima o filtro de deslocamento fracionário (e de interpolação) ideal, foi computada a energia da diferença entre os dois vetores, normalizada pela energia de  $\mathbf{h}_{LPF}$ , para diferentes valores pares e ímpares de  $N \in [10, 1000]$ , e diferentes parâmetros  $a \in [0, 1]$ . Os resultados são mostrados na Fig. 30, e mostram que  $\mathbf{h}_a$  converge rapidamente para  $\mathbf{h}_{LPF}$  (em termos da norma  $\ell_2$ ). Além disso, percebe-se que, para o caso de  $N$  par, utilizar apenas a parte real de  $\mathbf{h}_a$  produz um filtro mais próximo de  $\mathbf{h}_{LPF}$  do que usar também a parte imaginária, que é de módulo constante e sinal alternante. Por fim, vê-se que  $\mathbf{h}_a$  se afasta tanto mais do filtro ideal quanto mais próximo de 0,5 é o parâmetro de deslocamento fracionário  $a$ .

A matriz de deslocamento fracionário  $\mathbf{A}^a$  necessariamente comuta com  $\mathbf{A}$ , pois  $\mathbf{A}^a \mathbf{A} = \mathbf{A}^{1+a} = \mathbf{A} \mathbf{A}^a$ , de forma que  $\mathbf{A}^a$  é um filtro LSI para os sinais sobre grafos que têm  $\mathbf{A}$  por matriz de adjacência, como em (2.6). Para grafos quaisquer, encontrar a representação polinomial não é trivial, sendo possivelmente necessário o conceito de filtros equivalentes, definidos em (SANDRYHAILA; MOURA, 2013a) e não apresentados neste trabalho. No entanto, o caso particular do grafo em anel direcionado simplifica o problema e, para fins teóricos e melhor inserção do operador proposto no contexto de  $\text{GSP}_{\mathbf{A}}$ , foi calculada a representação polinomial de  $\mathbf{C}^a$  (cuja demonstração encontra-se no Apêndice), dada por

$$\mathbf{C}^a = \begin{bmatrix} h_a[0] & h_a[N-1] & h_a[N-2] & \dots & h_a[1] \\ h_a[1] & h_a[0] & h_a[N-1] & \dots & h_a[2] \\ h_a[2] & h_a[1] & h_a[0] & \dots & h_a[3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_a[N-1] & h_a[N-2] & h_a[N-3] & \dots & h_a[0] \end{bmatrix} = \sum_{\ell=0}^{N-1} h_a[\ell] \mathbf{C}^{\ell}. \quad (4.15)$$

**Figura 30** – Erro relativo percentual, em termos da energia da diferença em relação a  $\mathbf{h}_{LPP}$ . O operador  $E\{\cdot\}$  calcula a energia do sinal,  $E\{\mathbf{x}\} = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2$ . Em (b) e (c), são mostrados os erros para  $N$  par, considerando ora apenas a parte real de  $\mathbf{h}_a$ , ora seu valor complexo integral. (d) Erro relativo percentual médio, calculado sobre todos os valores de  $N$  ímpar em (a), para diversos valores de parâmetro não-inteiro  $a$ .



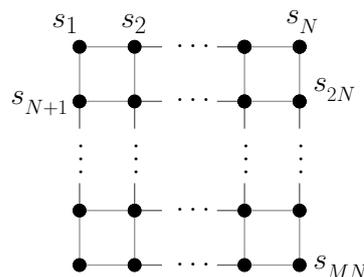
## 5 APLICAÇÃO: INTERPOLAÇÃO EM IMAGENS

A primeira aplicação que se cogitou para o filtro de deslocamento fracionário proposto,  $A^a$ , foi de interpolação do sinal definido sobre o grafo  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ . No entanto, como comentado no capítulo anterior, a ideia de interpolação enquanto transferência intermediária de valor, utilizando a matriz de adjacência como operador de deslocamento, não é diretamente aplicável no contexto de GSP. Deixando a interpolação de grafos gerais para estudos futuros, buscou-se investigar se, com os resultados presentes sobre o operador  $A^a$ , alguma ferramenta útil para a interpolação de imagens, especificamente, poderia ser encontrada.

Com uma restrição no problema, novas alternativas puderam ser encontradas. No Capítulo 2, foi mencionado que o grafo usualmente escolhido para modelar o domínio de uma imagem é aquele doravante chamado de grade uniforme, mostrado novamente na Fig. 31. Propõe-se definir o sinal de imagem sobre outro grafo, com o mesmo conjunto de vértices, chamado daqui em diante de grafo em grade direcionado com *feedback*. Obtém-se este a partir daquele em dois passos: primeiro, toma-se uma orientação específica do grafo em grade regular, com arestas apontando sempre para baixo e para a direita, e depois liga-se cada vértice do fim de uma linha com aquele do começo da mesma linha, e cada vértice do fim de uma coluna com aquele do início da mesma coluna. Por exemplo, um grafo em grade regular de apenas 4 vértices, é transformado numa grade direcionada com *feedback* como a mostrada na Fig. 32a. Em suma, o modelo proposto “curva e fecha” o grafo em grade sobre si mesmo, nas duas direções, formando um toróide com arestas direcionadas.

O modelo do grafo em grade direcionado com *feedback* impõe uma direção ao domínio de imagem, que faz sentido no grafo em anel que suporta sinais de tempo discreto por conta da causalidade intrínseca ao domínio do tempo. O leitor poderia perguntar: faz sentido impor uma direção preferencial ao domínio da imagem? Aparentemente não, poder-se-ia argumentar, porque a dependência entre os pixels vizinhos é mútua e não há numa imagem a noção de causalidade. No entanto, a dependência entre amostras contíguas de um sinal temporal *também é mútua* e, apesar de tudo, a análise espectral de um sinal de tempo discreto é feita via DFT,

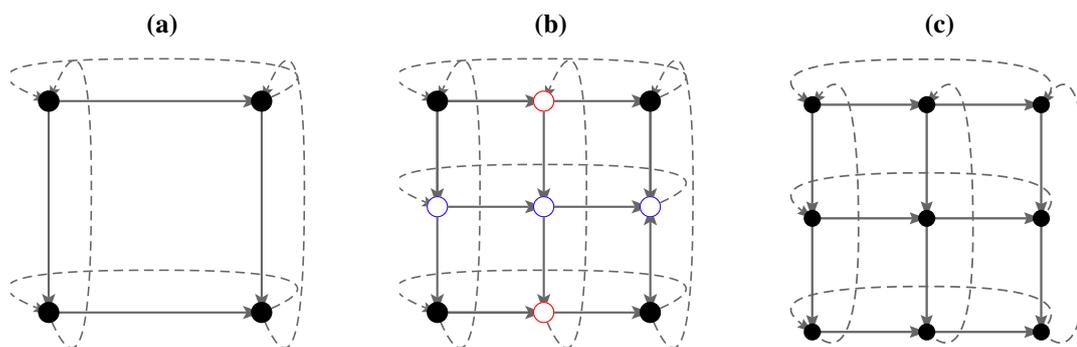
**Figura 31** – Grafo em grade regular.



Fonte: o autor.

que diagonaliza a matriz de adjacência de um grafo *direcionado*. Além disso, observa-se que comumente a análise espectral de uma imagem usa justamente a DFT de suas linhas e colunas, considerando, portanto, um domínio subjacente descrito pelo grafo em grade direcionado com *feedback*.

**Figura 32** – (a) Modelo de uma grade regular com *feedback* simples. (b) Em branco, as novas amostras geradas após a interpolação. (c) Novo grafo, após a interpolação.



Fonte: o autor.

A ideia proposta é tomar uma imagem definida sobre um grafo em grade direcionado com *feedback* e realizar o deslocamento fracionário, inicialmente com parâmetro  $a = 0,5$ , de suas linhas e colunas, para obter a interpolação da imagem em pontos onde não havia vértices do grafo. Optou-se por descartar as amostras obtidas sobre as arestas de *feedback*, porque o erro cometido nestas amostras é geralmente grande, devido à descontinuidade entre uma borda e a borda oposta da imagem. Desta forma, de uma imagem  $N \times N$ , obtém-se uma versão com maior resolução e de dimensão  $(2N - 1) \times (2N - 1)$ .

O processo é ilustrado na Fig. 32: tomando uma célula unitária do grafo (Fig. 32a), realizamos inicialmente o deslocamento fracionário das linhas (descartando as amostras sobre o *feedback*), obtendo as amostras dos vértices brancos com contorno vermelho. Em seguida, realiza-se o deslocamento fracionário das colunas (incluindo as colunas formadas pelos vértices recém-criados), obtendo as amostras dos vértices de contorno azul.

### 5.1 Descrição matricial

Seja  $\mathbf{x}$  um sinal definido sobre o grafo em grade direcionado com *feedback*  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$ , com  $R$  linhas e  $S$  colunas,  $|\mathcal{V}| = RS = N$ . A rotulação dos vértices em  $\mathcal{G}$  é ao longo das linhas, a mesma do grafo em grade da Fig. 31. Observando este sinal como uma imagem, seja  $\mathbf{X}$  a matriz cuja entrada  $X_{i,j}$  tem valor igual ao pixel na linha  $i$  e coluna  $j$  da imagem. Ou seja, dividindo o vetor  $\mathbf{x}$  em  $R$  blocos disjuntos de  $S$  amostras contíguas, a  $k$ -ésima linha de  $\mathbf{X}$  é igual ao  $k$ -ésimo

bloco de  $\mathbf{x}$ . Por fim, seja  $\mathbf{C}_K$  a matriz do grafo em anel com pesos unitários de  $K$  vértices,

$$\mathbf{C}_K = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}_{K \times K}. \quad (5.1)$$

Após cada deslocamento fracionário, falou-se em descartar as amostras das arestas de *feedback*. Isso é realizado pela matriz  $\mathbf{T}$  (*trim*, aparar), obtida anexando um vetor coluna de zeros à esquerda de uma matriz identidade,

$$\mathbf{T}_{(K-1) \times K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

As amostras intermediárias das linhas da imagem (vértices em vermelho na Fig. 32) são obtidas pelo deslocamento fracionário linha a linha (cada uma com  $S$  amostras), descartando as amostras de *feedback* (primeira amostra de cada vetor-linha),

$$\mathbf{Y}_{\bullet} = (\mathbf{T}_{(S-1) \times S} \mathbf{C}_S^a \mathbf{X}^T)^T, \quad (5.3)$$

com  $a = 0,5$ . Em concordância com as cores usadas na Fig. 32, as amostras interpoladas nas linhas serão armazenadas na matriz  $\mathbf{Y}_{\bullet}$ , enquanto que aquelas fruto da interpolação nas colunas estarão em  $\mathbf{Y}_{\bullet}$ .

Seja  $\mathbf{W}_{R \times (2S-1)}$  (*wide*, largo) a matriz obtida pelo preenchimento de cada espaço entre amostras de  $\mathbf{X}$ , ao longo das linhas, com as amostras obtidas de (5.3). Ou seja,

$$W_{i,(2j)} = \mathbf{Y}_{\bullet,i,j} \quad (5.4)$$

$$W_{i,(2j+1)} = X_{i,j}. \quad (5.5)$$

O passo seguinte é o deslocamento fracionário das colunas, considerando aquelas formadas pelas novas amostras. Para isso, desloca-se as colunas de  $\mathbf{W}$ , descartando novamente a primeira amostra de cada vetor deslocado,

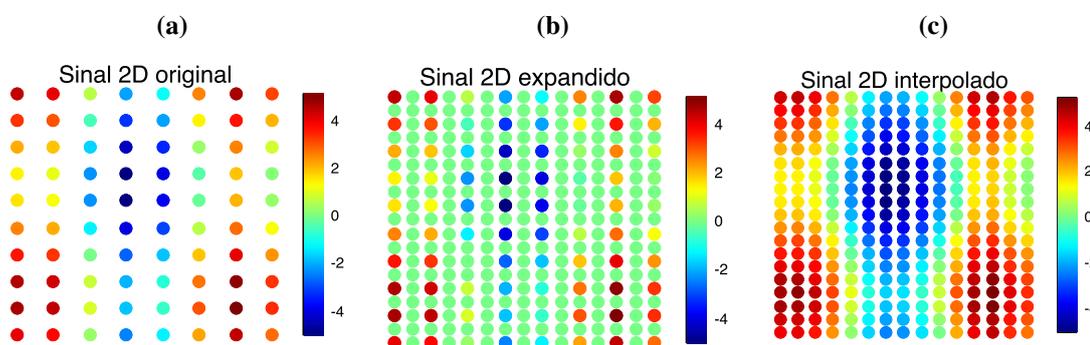
$$\mathbf{Y}_{\bullet} = \mathbf{T}_{(R-1) \times R} \mathbf{C}_R^a \mathbf{W}_{R \times (2S-1)}. \quad (5.6)$$

A imagem interpolada  $\mathbf{X}_{(2R-1) \times (2S-1)}^{(\text{interp})}$  é, então, obtida preenchendo os espaços nas colunas de  $\mathbf{W}$  com as amostras de  $\mathbf{Y}_{\bullet}$ , ou seja,

$$X_{(2i),j}^{(\text{interp})} = \mathbf{Y}_{\bullet,i,j} \quad (5.7)$$

$$X_{(2i+1),j}^{(\text{interp})} = W_{i,j}. \quad (5.8)$$

**Figura 33** – Interpolação de um sinal bidimensional utilizando o algoritmo proposto. (b) Em verde (amostras nulas), estão os novos vértices onde serão estimados os valores de  $Y_{\bullet}$  e  $Y_{\bullet}$ .



Fonte: o autor.

## 5.2 Resultados e limitações

O algoritmo proposto foi implementado e testado no software Octave. Como uma primeira implementação do algoritmo, foi construído um sinal artificial suave sobre um grafo em grade direcionado com *feedback*, formando uma imagem de  $10 \times 10$  pixels, como mostrado na Fig. 33. Na Fig. 33b são mostrados os vértices para as novas amostras que serão estimadas, e na Fig. 33c o resultado da interpolação.

**Tabela 1** – Energia do erro cometido na interpolação de um sinal artificial como o da Fig. 33c, utilizando o algoritmo proposto e outros métodos típicos de interpolação de imagem.

Método	Energia do erro (%)
Deslocamento fracionário	0,784
<i>Nearest-neighbor</i>	11,645
Interpolação linear	1,187
Interpolação cúbica	0,039
<i>Spline</i>	0,055

Fonte: o autor.

Utilizando o mesmo tipo de sinal suave artificial da Fig. 33, fez-se o caminho reverso: foi criada uma imagem  $19 \times 19$  e dela foi obtida uma versão dizimada, de dimensão  $10 \times 10$ , que em seguida sofreu o processo de interpolação, como tentativa de recuperar a imagem original. Foi calculada a energia do erro entre o sinal interpolado e o sinal original, utilizando o algoritmo proposto e outros quatro métodos conhecidos de interpolação de imagem: *nearest-neighbor*, interpolação linear e cúbica, e *spline*<sup>1</sup> (GONZALEZ; WOODS, 2007, Sec. 2.4.4). O resultado é

<sup>1</sup> Para aplicar estes métodos de interpolação às imagens de teste foi utilizada a função `interp2()`, do Octave, cuja documentação está disponível pelo link: <[https://www.gnu.org/software/octave/doc/v4.2.0/Multi\\_](https://www.gnu.org/software/octave/doc/v4.2.0/Multi_)

mostrado na Tabela 1.

Dos cinco métodos de interpolação, o deslocamento fracionário obteve o 3º melhor resultado com a imagem artificial suave. O experimento foi repetido, agora com 7 imagens em escala de cinza, de  $256 \times 256$  pixels, retiradas de um banco de imagens-padrão da *University of Southern California*<sup>2</sup>, todas mostradas no Anexo. Ou seja, as imagens foram dizimadas para a resolução de  $128 \times 128$ , em seguida interpoladas para  $255 \times 255$ , e foi calculada a energia do erro entre o resultado da interpolação e a imagem original (descartando as últimas linha e coluna, para adequar à dimensão  $255 \times 255$ ). O resultado é mostrado na Tabela 2 e na Fig. 34.

**Tabela 2** – Energia do erro entre a imagem reconstruída por interpolação e sua versão original, consideradas as dimensões de  $255 \times 255$  pixels.

Imagem	Energia do erro por método de interpolação (%)				
	Deslocamento fracionário	<i>Nearest neighbor</i>	Interpolação linear	Interpolação cúbica	<i>Spline</i>
<i>lena_gray_256.tiff</i>	9,042	10,667	13,840	7,161	14,782
<i>chemical_plant.tiff</i>	11,566	16,163	21,203	9,930	22,615
<i>resolution_chart.tiff</i>	13,488	4,048	5,964	8,270	6,170
<i>airplane.tiff</i>	3,263	3,061	3,831	1,870	4,475
<i>clock.tiff</i>	6,334	5,570	7,681	4,422	8,715
<i>aerial.tiff</i>	16,406	17,704	26,223	13,246	27,665
<i>moon_surface.tiff</i>	9,821	10,647	14,862	7,828	16,320

Fonte: o autor.

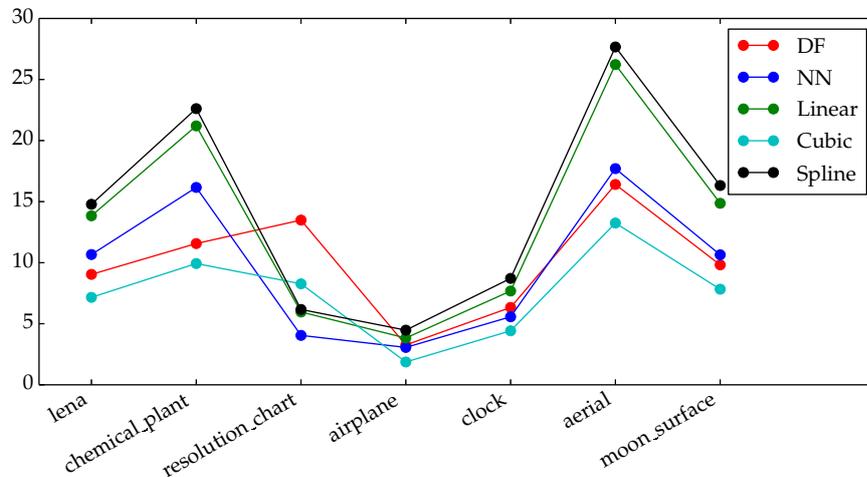
Os resultados mostram que, em geral, o método de interpolação via deslocamento fracionário obtém bons resultados, perdendo apenas para a interpolação cúbica na maioria das imagens de teste. Possivelmente, uma das causas pelas quais o algoritmo proposto teve resultados melhores que o método linear e o *nearest-neighbor*, é o fato de que estes utilizam apenas informações dos pixels vizinhos àquele a ser interpolado, mas o resultado superior ao obtido pelo método de *spline* é curioso, uma vez que este insere erro bastante pequeno por utilizar uma função de interpolação que é polinomial (geralmente de grau 3) por partes. É importante também ressaltar que, na imagem em que o algoritmo proposto teve o pior desempenho em relação aos demais, o método mais eficaz foi *nearest-neighbor*, que consiste apenas em replicar pixels vizinhos: isso ocorreu porque a imagem em questão, *resolution\_chart.tiff*, possui várias regiões constantes, onde o método de copiar o pixel vizinho insere erro nulo.

Buscou-se também avaliar o tempo de execução do algoritmo, em comparação aos demais métodos mencionados, e o resultado é mostrado na Fig. 35. O algoritmo mostrou-se

002ddimensional-Interpolation.html>.

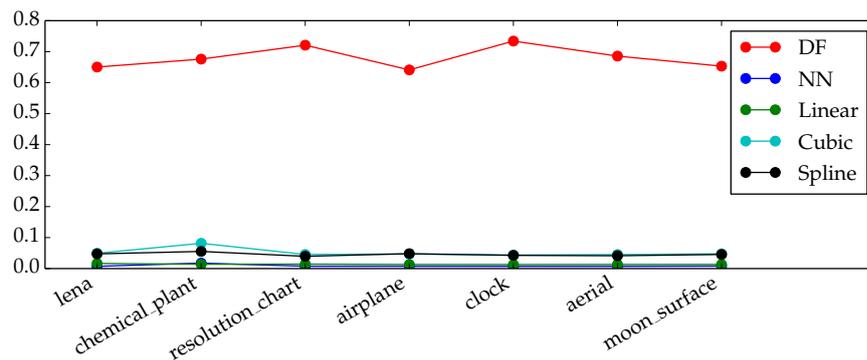
<sup>2</sup> Banco de dados do *Signal and Image Processing Institute*, University of Southern California, disponível em: <<http://sipi.usc.edu/database/database.php?volume=misc>>

**Figura 34** – Energia percentual do erro cometido ao restaurar imagens  $255 \times 255$  pixels via os métodos de deslocamento fracionário (DF), *nearest-neighbor* (NN), interpolação linear, interpolação cúbica e *spline*.



Fonte: o autor.

**Figura 35** – Tempo de execução (em segundos) da interpolação em cada algoritmo.



Fonte: o autor.

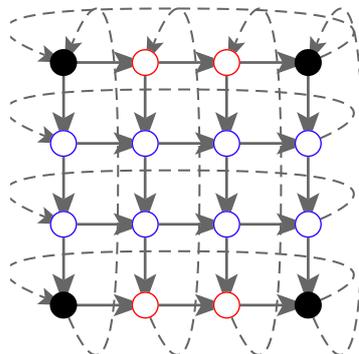
uma ordem de grandeza mais lento que os demais, e isso mostra que a sua construção ainda precisa ser otimizada. De fato, para permitir uma primeira versão de testes, o código em Octave priorizou a legibilidade e a construção modular, e não a rapidez de execução.

Resta comentar que o algoritmo proposto oferece certa liberdade de escolha quanto ao número de pontos interpolados, bastando variar o parâmetro de deslocamento fracionário  $a$ . Em investigações futuras, poder-se-ia, por exemplo, realizar a interpolação de uma imagem com dimensões  $N \times N$  para gerar uma com dimensões  $(3N - 2) \times (3N - 2)$ , usando sucessivamente  $a = 1/3$  e  $a = 2/3$ , como ilustrado na Fig. 36. A matriz  $\mathbf{T}$  é reaproveitada, bastando computar  $\mathbf{C}^{1/3}$  e  $\mathbf{C}^{2/3}$ .

### 5.3 Possíveis melhorias

Uma forma de reduzir o tempo de execução seria construir apenas uma vez as matrizes  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{C}^a$  (tanto para deslocamento das linhas como das colunas) e deixá-las armazenadas, retirando

**Figura 36** – Nova célula unitária do grafo em grade direcionado com *feedback*, obtida a partir de 32a, com parâmetro de deslocamento fracionário  $a = 1/3$  e  $a = 2/3$ .



Fonte: o autor.

esse peso do algoritmo de interpolação. Além disso, quando interpolando imagens de mesmo número de linhas e colunas, apenas uma matriz  $T$  e uma  $C^a$  são necessárias. Por fim, uma mudança no algoritmo que poderia melhorar a qualidade da interpolação, embora sob o preço de mais processamento anterior à interpolação, seria calcular os pesos da matriz de adjacência do grafo em grade direcionado com *feedback* tais que a imagem seja mais suave sobre este grafo do que sobre aquele com pesos unitários, segundo técnica usada em (SANDRYHAILA; MOURA, 2012; SANDRYHAILA; MOURA, 2013c).

## 6 CONCLUSÃO

A massiva produção de dados em sistemas com estruturas de rede irregulares, verificada em diversas áreas da engenharia e tecnologia, levou à criação da área de processamento de sinais sobre grafos, ou GSP. Este recente campo do conhecimento enfrenta o desafio de generalizar conceitos da teoria clássica de processamento digital de sinais para o contexto em que o domínio é modelado por um grafo, e o presente trabalho se propôs a estudar um dos mais elementares dos operadores em DSP: o deslocamento unitário.

Após terem sido apresentados os principais operadores de deslocamento de sinais sobre grafos, foi justificada a escolha da matriz de adjacência como base para a definição do *deslocamento fracionário de sinais sobre grafos*, que apresentou um comportamento cuja interpretação mais adequada mostrou-se dependente da diretividade do grafo: em grafos não-direcionados, o operador  $A^a$  causa a difusão intermediária dos valores sobre os vértices do grafo para os vértices adjacentes, enquanto em grafos direcionados o deslocamento não-inteiro de um impulso causa uma perturbação dos valores em todos os vértices, o que pode ser utilizado para interpolação em GSP, no sentido de estimação de amostras *entre* vértices adjacentes. O operador proposto foi, ainda, comparado ao filtro de deslocamento não-inteiro ideal para sinais de tempo discreto, e mostrou-se numericamente que a diferença entre as duas respostas ao impulso convergem para zero rapidamente, à medida que o comprimento dos filtros aumenta.

O operador proposto foi, então, utilizado na criação de um método de interpolação de imagens no contexto de GSP, considerando separadamente as linhas e colunas da imagem como amostras sobre um grafo em anel. O método, que permite teoricamente interpolar mais de um pixel entre dois pixels adjacentes, mostrou-se uma alternativa aos principais métodos de interpolação, obtendo um resultado bastante satisfatório, embora ainda necessite de uma otimização do código a fim de diminuir o tempo de execução.

### 6.1 Trabalhos futuros

Muitas oportunidades de estudo foram descobertas ao longo das investigações nesta dissertação, e são possibilidades de trabalhos futuros, como

- usar a matriz de incidência para estudar a viabilidade de utilizar o operador de deslocamento fracionário  $A^a$ , sobre grafos quaisquer, para interpolação de sinais sobre grafos,
- investigar a literatura que diz respeito à existência de um Teorema da Amostragem para GSP (WANG; CHEN; GU, 2015; CHEN et al., 2016; TSITSVERO; BARBAROSSA; LORENZO, 2016), e verificar como quantificar a dependência da qualidade da interpolação através do operador  $A^a$  com a banda do sinal sobre o grafo,
- investigar a importância da escolha das fases da resposta ao impulso do filtro de desloca-

mento fracionário, quando considera-se grafos em anel,

- investigar como contornar, se for possível, o problema da inexistência do operador  $A^a$  em certos casos, ou apenas de sua dificuldade de cálculo, no caso de  $A$  não ser diagonalizável,
- otimizar o código do algoritmo proposto para interpolação de imagens utilizando deslocamento fracionário, para reduzir seu tempo de execução.

## 6.2 Trabalhos publicados

Como frutos deste trabalho, dois artigos contendo a proposta e análise do operador de deslocamento fracionário foram publicados, ambos com coautoria do prof. Dr. Juliano Bandeira Lima. São eles:

- um artigo completo apresentado no *XXXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais*, em 2017, intitulado “Deslocamento fracionário de sinais sobre grafos” (RIBEIRO; LIMA, 2017a),
- e um resumo estendido apresentado na forma de pôster na *5<sup>th</sup> IEEE Global Conference on Signal and Information Processing - GlobalSIP*, de novembro de 2017, intitulado “Fractional shift of graph signals” (RIBEIRO; LIMA, 2017b).

## REFERÊNCIAS

- ALAM, K. M.; SAINI, M.; SADDIK, A. E. Toward social internet of vehicles: Concept, architecture, and applications. *IEEE Access*, IEEE, v. 3, p. 343–357, 2015. Citado na página 17.
- BANG-JENSEN, J.; GUTIN, G. Z. *Digraphs: theory, algorithms and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. Citado na página 49.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory, volume 244 of Graduate Texts in Mathematics*. [S.l.]: Springer, New York, 2008. Citado na página 22.
- CHEN, S. et al. Discrete signal processing on graphs: Sampling theory. *IEEE Trans. Signal Process.*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 63, n. 24, p. 6510–6523, dec 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109%2Ftsp.2015.2469645>>. Citado na página 18.
- CHEN, S. et al. Signal recovery on graphs: Fundamental limits of sampling strategies. *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, IEEE, v. 2, n. 4, p. 539–554, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 74.
- CHUNG, F. Graph theory in the information age. *Notices of the AMS*, v. 57, n. 6, p. 726–732, 2010. Citado na página 17.
- CHUNG, F. R. K. *Spectral graph theory*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1997. Citado 4 vezes nas páginas 22, 34, 35 e 45.
- DAS, K. C. Extremal graph characterization from the bounds of the spectral radius of weighted graphs. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 217, n. 18, p. 7420–7426, 2011. Citado na página 54.
- DERI, J. A.; MOURA, J. M. F. Spectral projector-based graph fourier transforms. *arXiv preprint arXiv:1701.02690*, 2017. Citado na página 44.
- FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos. 2011. <<https://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- GIRAULT, B. Stationary Graph Signals using an Isometric Graph Translation. In: *Eusipco*. Nice, France: [s.n.], 2015. p. 1531–1535. Disponível em: <<https://hal.inria.fr/hal-01155902>>. Citado na página 54.
- GIRAULT, B.; GONCALVES, P.; FLEURY, E. Translation on graphs: An isometric shift operator. *IEEE Signal Processing Letters*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 22, n. 12, p. 2416–2420, dec 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/lsp.2015.2488279>>. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.
- GIRAULT, B. et al. Localization bounds for the graph translation. In: *IEEE Global Conference on Signal and Information Processing*. Washington DC, United States: [s.n.], 2016. Disponível em: <<https://hal.inria.fr/hal-01368817>>. Citado na página 54.

- GOLUBSKI, A. J. et al. Ecological networks over the edge: Hypergraph trait-mediated indirect interaction (TMII) structure. *Trends in Ecology & Evolution*, Elsevier BV, v. 31, n. 5, p. 344–354, may 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2Fj.tree.2016.02.006>>. Citado na página 17.
- GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. *Digital image processing*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2007. Citado na página 70.
- GRASSI, F.; PERRAUDIN, N.; RICAUD, B. Tracking time-vertex propagation using dynamic graph wavelets. *arXiv preprint arXiv:1606.06653*, 2016. Citado na página 18.
- GUO, L. et al. A QoS-oriented high-efficiency resource allocation scheme in wireless multimedia sensor networks. *IEEE Sensors J.*, IEEE, 2016. Citado na página 17.
- HAMMOND, D. K.; VANDERGHEYNST, P.; GRIBONVAL, R. Wavelets on graphs via spectral graph theory. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Elsevier, v. 30, n. 2, p. 129–150, 2011. Citado na página 40.
- JAIN, R. K.; MOURA, J. M. F.; KONTOKOSTA, C. E. Big data+ big cities: Graph signals of urban air pollution [exploratory sp]. *IEEE Signal Process. Mag.*, IEEE, v. 31, n. 5, p. 130–136, 2014. Citado na página 17.
- LANG, S. *Linear Algebra*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 1987. Citado na página 50.
- LUCCHESI, C. L. *Introdução à teoria dos grafos*. [S.l.]: IMPA, 1979. Citado na página 22.
- MA, F.; YAO, B.; YAO, M. Non-planar unclustered peterson graphs as scale-free models of the internet of things. In: IEEE. *Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference, IEEE*. [S.l.], 2016. p. 1040–1043. Citado na página 17.
- MALLAT, S. *A wavelet tour of signal processing*. [S.l.]: Academic press, 1999. Citado na página 29.
- MCKINSEY, G. I. et al. Big data: the next frontier for innovation, competition and productivity. *McKinsey Global Institute*, 2011. Citado na página 17.
- MEI, J.; MOURA, J. M. F. Signal processing on graphs: Causal modeling of unstructured data. *IEEE Trans. Signal Process.*, IEEE, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 25.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical optimization 2nd*. [S.l.]: Springer, 2006. Citado na página 43.
- NORTHSHIELD, S. Square roots of  $2 \times 2$  matrices. *Contemporary Mathematics*, v. 517, p. 289–304, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 80.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. *Discrete-time Signal Processing*. [S.l.]: Pearson, 2013. ISBN 9781292025728. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 59.
- OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; NAWAB, S. H. *Signals and Systems*. Prentice Hall, 1997. (Prentice-Hall signal processing series). ISBN 9780138147570. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=LwQqAQAAMAAJ>>. Citado na página 27.
- PÜSCHEL, M.; MOURA, J. M. F. Algebraic Signal Processing Theory. *CoRR*, abs/cs/0612077, 2006. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/cs/0612077>>. Citado na página 25.

- PÜSCHEL, M.; MOURA, J. M. F. Algebraic signal processing theory: 1-D space. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 56, n. 8, p. 3586–3599, 2008. Citado na página 25.
- PÜSCHEL, M.; MOURA, J. M. F. Algebraic signal processing theory: Foundation and 1-D time. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 56, n. 8, p. 3572–3585, 2008. Citado na página 25.
- RIBEIRO, G. B.; LIMA, J. B. Deslocamento fracionário de sinais sobre grafos. In: SBRT. XXXV *Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, SBrT'17*. [S.l.], 2017. p. 871–875. Citado na página 75.
- RIBEIRO, G. B.; LIMA, J. B. Fractional shift of graph signals. In: *5th IEEE Global Conference on Signal and Information Processing - GlobalSIP*. [S.l.: s.n.], 2017. Citado na página 75.
- RUDIN, W. *Real and complex analysis*. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 1987. Citado na página 29.
- SANDRYHAILA, A.; MOURA, J. M. Nearest-neighbor Image Model. In: IEEE. *Image Processing (ICIP), 2012 19th IEEE International Conference on*. [S.l.], 2012. p. 2521–2524. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 73.
- SANDRYHAILA, A.; MOURA, J. M. F. Discrete signal processing on graphs. *IEEE Trans. Signal Process.*, IEEE, v. 61, n. 7, p. 1644–1656, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 27, 47 e 65.
- SANDRYHAILA, A.; MOURA, J. M. F. Discrete signal processing on graphs: Graph filters. In: *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109%2Ficassp.2013.6638849>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 47.
- SANDRYHAILA, A.; MOURA, J. M. F. Discrete signal processing on graphs: Graph fourier transform. In: *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109%2Ficassp.2013.6638850>>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 47 e 73.
- SANDRYHAILA, A.; MOURA, J. M. F. Big data analysis with signal processing on graphs: Representation and processing of massive data sets with irregular structure. *IEEE Signal Process. Mag.*, IEEE, v. 31, n. 5, p. 80–90, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 17, 27, 34 e 47.
- SANDRYHAILA, A.; MOURA, J. M. F. Discrete signal processing on graphs: Frequency analysis. *IEEE Trans. Signal Process.*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 62, n. 12, p. 3042–3054, jun 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109%2Ftsp.2014.2321121>>. Citado 4 vezes nas páginas 30, 40, 43 e 47.
- SARDELLITTI, S.; BARBAROSSA, S.; LORENZO, P. D. Graph topology inference based on transform learning. In: *2016 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP)*. IEEE, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/globalsip.2016.7905863>>. Citado na página 25.
- SARDELLITTI, S.; BARBAROSSA, S.; LORENZO, P. D. On the graph Fourier transform for directed graphs. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, IEEE, 2017. Citado na página 44.
- SEGARRA, S. et al. Interpolation of graph signals using shift-invariant graph filters. In: IEEE. *Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2015 23rd European*. [S.l.], 2015. p. 210–214. Citado na página 18.

SHUMAN, D. I. et al. The emerging field of signal processing on graphs: Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains. *IEEE Signal Process. Mag.*, IEEE, v. 30, n. 3, p. 83–98, 2013. Citado 8 vezes nas páginas 17, 18, 34, 36, 37, 38, 40 e 52.

SHUMAN, D. I.; RICAUD, B.; VANDERGHEYNST, P. A windowed graph fourier transform. In: IEEE. *Statistical Signal Processing Workshop (SSP), 2012 IEEE*. [S.l.], 2012. p. 133–136. Citado 3 vezes nas páginas 37, 50 e 52.

SHUMAN, D. I.; RICAUD, B.; VANDERGHEYNST, P. Vertex-frequency analysis on graphs. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Elsevier, v. 40, n. 2, p. 260–291, 2016. Citado na página 50.

SINK, E. *Version control by example*. [S.l.]: Pyrenean Gold Press Champaign, IL, 2011. v. 20011. Citado na página 49.

THULASIRAMAN, K.; SWAMY, M. N. S. *Graphs: Theory and Algorithms*. [S.l.]: Wiley Online Library, 1992. 97–125 p. Citado na página 49.

TODD, K. M. *Error correction coding: mathematical methods and algorithms. 2005 by John Wiley & Sons*. [S.l.], 2005. Citado na página 49.

TSITSVERO, M.; BARBAROSSA, S.; LORENZO, P. D. Signals on graphs: Uncertainty principle and sampling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 64, n. 18, p. 4845–4860, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 74.

VÄLIMÄKI, V. *Discrete-time modeling of acoustic tubes using fractional delay filters*. [S.l.]: Helsinki University of Technology, 1995. Citado na página 58.

WANG, X.; CHEN, J.; GU, Y. Generalized graph signal sampling and reconstruction. In: IEEE. *Signal and Information Processing (GlobalSIP), 2015 IEEE Global Conference on*. [S.l.], 2015. p. 567–571. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 74.

YU, L. et al. A novel multi-feature representation of images for heterogeneous IoTs. *IEEE Access*, IEEE, v. 4, p. 6204–6215, 2016. Citado na página 17.

## APÊNDICE

### DEMONSTRAÇÕES

*Teorema 1, pág. 35.* Como  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times E}$ , então as dimensões de  $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$  são  $N \times N$ , coincidindo com aquelas de  $\mathbf{L}$ . Seja  $(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)_{rs}$  a entrada na linha  $r$  e coluna  $s$  da matriz  $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ , i.e.  $(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)_{rs}$  é o produto interno entre a  $r$ -ésima e a  $s$ -ésima linhas de  $\mathbf{B}$ . Por força da definição,

$$(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)_{rr} = \sum_k \sqrt{w(e'_k)} \sqrt{w(e'_k)} = \sum_k w(e'_k), \forall k \mid e'_k$$

parte de ou chega a  $v_r$ ; em outras palavras,  $(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)_{rr}$  é a soma dos pesos das arestas adjacentes a  $v_r$ , e portanto é o grau  $d_r$  de  $v_r$ .

Para  $r \neq s$ , o produto interno que resulta em  $(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)_{rs}$  terá parcelas não-nulas somente quando uma aresta for adjacente simultaneamente a  $v_r$  e  $v_s$ , pois se certa aresta  $e'_\ell$  não é adjacente a  $v_r$  (ou  $v_s$ ),  $B_{r\ell} = 0$  (ou  $B_{s\ell} = 0$ ). Logo,

$$(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)_{rs} = \underbrace{\left[ -\sqrt{w(e'_k)} \right]}_{\substack{\text{para } e'_k \\ \text{partindo de} \\ v_r \text{ (ou } v_s)}} \cdot \underbrace{\sqrt{w(e'_k)}}_{\substack{\text{para } e'_k \\ \text{chegando a} \\ v_s \text{ (ou } v_r)}} = -w(e'_k),$$

e o peso da aresta que liga  $v_r$  a  $v_s$  no grafo não-direcionado  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathbf{A}\}$  é precisamente  $A_{rs} = A_{sr}$ , pela própria definição da matriz de adjacência ponderada. Portanto,

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{D} - \mathbf{A} = \mathbf{L}.$$

□

*pág. 50.* Para demonstrar que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

não possui raiz quadrada, pode-se avaliar a veracidade da hipótese contrária e verificar se um absurdo surge (NORTHSHIELD, 2010). Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Isso implica

$$\begin{aligned}
 a^2 &= -bc, \\
 b(a+d) &= 1 \Rightarrow a+d = \frac{1}{b}, \\
 c(a+d) &= 0 \Rightarrow \frac{c}{b} = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ (pois } b \neq 0), \\
 d^2 &= -bc,
 \end{aligned} \tag{3}$$

como  $c = 0$ , a primeira e quarta equações levam a  $a = d = 0 \Rightarrow a + d = 0$ , o que contradiz  $b(a+d) = 1$ . Como um absurdo surgiu,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{1/2} \tag{4}$$

não existe. □

*Equação (4.14).* [Caso para  $N$  par]<sup>1</sup> *Deseja-se calcular  $\mathbf{h} = (h_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  (foi omitido o subscrito “a” por simplicidade), a transformada discreta de Fourier inversa da sequência  $\hat{\mathbf{h}} = (\hat{h}_k)$  com componentes*

$$\hat{h}_k = \begin{cases} w^{ak}, & k = 0, \dots, N/2 - 1 \\ w^{-(N-k)} & k = N/2, \dots, N-1, \quad 0 < a < 1. \end{cases} \tag{5}$$

A forma como foi escrito o vetor  $\hat{\mathbf{h}}_k$  corresponde à escolha de fases em que a simetria em relação ao eixo real é quebrada apenas por uma entrada “sobrando” no semi-plano *superior*,  $\Re\{\cdot\} > 0$  (como na Fig. 28). Adiante é considerado o caso contrário. Tem-se que

$$h_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}_k W_N^{-kn}, \tag{6}$$

$$\Rightarrow Nh_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} w^{ak} W_N^{-kn} + \sum_{k=N/2}^{N-1} w^{-(N-k)} w^{-kn}. \tag{7}$$

Fazendo a substituição de variáveis  $k \leftarrow N - k$  no segundo somatório, e usando o fato de que  $w^{Nn} = 1$ ,

<sup>1</sup> Demonstração feita em grande parte pelo prof. Dr. Juliano Bandeira Lima, do Departamento de Eletrônica e Sistemas da UFPE, a quem o autor agradece por elucidar muitos caminhos e encruzilhadas algébricas.

$$\begin{aligned}
Nh_n &= \sum_{k=0}^{N/2-1} W_N^{ak} w^{-kn} + \sum_{k=N/2}^{k=1} w^{-ak} w^{nk} \\
&= 1 + w^{\frac{N}{2}(n-a)} \sum_{k=1}^{N/2-1} w^{k(a-n)} + \sum_{k=1}^{N/2-1} w^{k(n-a)} \\
&= 1 + w^{\frac{N}{2}(n-a)} + \sum_{k=1}^{N/2-1} [w^{-k(n-a)} + w^{k(n-a)}],
\end{aligned}$$

usando a fórmula da soma finita de termos em progressão geométrica,

$$Nh_n = 1 + w^{\frac{N}{2}(n-a)} + \frac{w^{-(n-a)} \left( w^{-(n-a)\left(\frac{N}{2}-1\right)} - 1 \right)}{w^{-(n-a)} - 1} + \frac{w^{(n-a)} \left( w^{(n-a)\left(\frac{N}{2}-1\right)} - 1 \right)}{w^{(n-a)} - 1},$$

o que, após sucessivas manipulações algébricas, resulta em

$$\begin{aligned}
Nh_n &= \frac{\cos \frac{\pi}{N}(n-a) \operatorname{sen} \pi(n-a) - j \operatorname{sen} \frac{\pi}{N}(n-a) \operatorname{sen} \pi(n-a)}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{N}(n-a)} \\
&= \cotan \frac{\pi}{N}(n-a) \operatorname{sen} \pi(n-a) - j \operatorname{sen} \pi(n-a),
\end{aligned} \tag{8}$$

em que  $\operatorname{sen} \pi(n-a) = \operatorname{sen} \pi n \cos \pi a - \operatorname{sen} \pi a \cos \pi n = -(-1)^n \operatorname{sen} \pi a$ , e portanto

$$h_n = \frac{1}{N} \cotan \frac{\pi}{N}(n-a) \operatorname{sen} \pi(n-a) + \frac{j}{N} (-1)^n \operatorname{sen} \pi a. \tag{9}$$

□

O caso para  $N$  ímpar é obtido utilizando o mesmo raciocínio e manipulações algébricas semelhantes. O caso para  $N$  par em que a simetria em relação ao eixo real é quebrada por uma entrada de  $\hat{\mathbf{h}}$  no semi-plano *inferior*,  $\mathcal{R}e\{\cdot\} < 0$ , leva apenas a uma mudança de sinal em (8), de forma que, realizando os mesmos passos mostrados há pouco, obtém-se

$$\begin{aligned}
Nh_n &= \frac{\cos \frac{\pi}{N}(n-a) \operatorname{sen} \pi(n-a) + j \operatorname{sen} \frac{\pi}{N}(n-a) \operatorname{sen} \pi(n-a)}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{N}(n-a)} \\
&= \cotan \frac{\pi}{N}(n-a) \operatorname{sen} \pi(n-a) + j \operatorname{sen} \pi(n-a) \\
&= \cotan \frac{\pi}{N}(n-a) \operatorname{sen} \pi(n-a) + j (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \pi a,
\end{aligned} \tag{10}$$

ou seja, a diferença para (8) é apenas a troca do sinal da parte imaginária. Como observou-se que o uso apenas da parte real de  $\mathbf{h}_a$  apresenta bons resultados de convergência para  $\mathbf{h}_{LPF}$ , tanto (8) como (10) podem ser utilizadas.

pág. 65. Deseja-se demonstrar que, para  $a = 0$ , as respostas ao impulso  $\mathbf{h}_a$  e  $\mathbf{h}_{LPF}$  coincidem.

Para  $a = 0$ ,

$$h_{LPF}[n] = \operatorname{sinc}(n) = \delta[n] \text{ (pois } n \in \mathbb{Z}). \tag{11}$$

Considere-se primeiro o caso para  $N$  ímpar, em que

$$h_{a=0}[n] = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}\pi n}{\text{sen}\frac{\pi}{N}n}. \quad (12)$$

Para  $n \in [1, N - 1]$ , inteiro, temos que  $\text{sen}\pi n = 0$  e  $\text{sen}\frac{\pi}{N}n \neq 0$ , de modo que  $h_{a=0}[n] = 0$ . Para  $n = 0$ , aplicando a Regra de L'Hopital,

$$h_{a=0}[n \rightarrow 0] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{N} \frac{\text{sen}\pi n}{\text{sen}\frac{\pi}{N}n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{N} \frac{\pi \cos(\pi n)}{\frac{\pi}{N} \cos\left(\frac{\pi}{N}n\right)} = 1, \quad (13)$$

e, portanto,  $h_{a=0}[n] = \delta[n] = h_{LPP}[n]$ .

Para o caso de  $N$  par,

$$\begin{aligned} h_a[n] &= \frac{1}{N} \cotan \frac{\pi}{N}(n-a) \text{sen}\pi(n-a) + \frac{j}{N} (-1)^n \text{sen}\pi a \\ &= \underbrace{\frac{1}{N} \frac{\text{sen}\pi(n-a)}{\text{sen}\frac{\pi}{N}(n-a)} \cos \frac{\pi}{N}(n-a)}_{h_a[n] \text{ para } N \text{ ímpar}} + \underbrace{\frac{j}{N} (-1)^n \text{sen}\pi a}_{=0 \text{ para } a=0}, \end{aligned} \quad (14)$$

e unindo aos resultados obtidos para  $N$  ímpar, tem-se também que, para  $N$  par,  $h_a[n] = \delta[n] = h_{LPP}[n]$ .  $\square$

pág. 65. Deseja-se demonstrar que a representação polinomial de  $\mathbf{C}^a$  é  $\sum_{\ell=0}^{N-1} h_a[\ell] \mathbf{C}^\ell$ .

A partir de (2.12), sabendo que  $\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{F}^H$ , pode-se primeiro mostrar que  $\mathbf{C}^a = \frac{1}{N} \mathbf{F}^H \mathbf{\Lambda}_C^a \mathbf{F}$  é uma matriz circulante com a primeira coluna dada por  $\mathbf{h}_a$  em (4.14). Para tanto, sabendo que a matriz da DFT tem entradas  $F_{n,k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = w^{nk}$ , pode-se computar o produto  $\mathbf{F}^H \mathbf{\Lambda}_C^a$  e reescrever  $\mathbf{C}^a$  como

$$\mathbf{C}^a = \frac{1}{N} \mathbf{F}^H \mathbf{\Lambda}_C^a \mathbf{F} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \lambda_0^a & \lambda_1^a & \lambda_2^a & \dots & \lambda_{N-1}^a \\ \lambda_0^a & \lambda_1^a w^{-1} & \lambda_2^a w^{-2} & \dots & \lambda_{N-1}^a w^{-(N-1)} \\ \lambda_0^a & \lambda_1^a w^{-2} & \lambda_2^a w^{-4} & \dots & \lambda_{N-1}^a w^{-2(N-1)} \\ \lambda_0^a & \lambda_1^a w^{-3} & \lambda_2^a w^{-6} & \dots & \lambda_{N-1}^a w^{-3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^a & \lambda_1^a w^{-(N-1)} & \lambda_2^a w^{-2(N-1)} & \dots & \lambda_{N-1}^a w^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ 1 & w^3 & w^6 & \dots & w^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Seja  $\mathbb{Z}_N$  o conjunto dos inteiros módulo  $N$ , ou seja,  $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ . Uma matriz  $\mathbf{M} = \{m_{i,j}\}_{N \times N}$  é dita circulante se, e somente se,

$$\begin{aligned} &\text{as entradas } m_{n,n} \text{ são iguais } \forall n \in \mathbb{Z}_N, \\ &\text{as entradas } m_{n,(n-1) \bmod N} \text{ são iguais } \forall n \in \mathbb{Z}_N, \\ &\text{as entradas } m_{n,(n-2) \bmod N} \text{ são iguais } \forall n \in \mathbb{Z}_N, \\ &\quad \vdots \\ &\text{as entradas } m_{n,(n-N+1) \bmod N} \text{ são iguais } \forall n \in \mathbb{Z}_N. \end{aligned}$$

Equivalentemente, afirmando de forma mais suscinta,  $\mathbf{M} = \{m_{i,j}\}_{N \times N}$  é dita circulante se, e somente se, para qualquer valor de  $k \in \mathbb{Z}_N$ ,

$$\text{as entradas } m_{n,(n-k) \bmod N} \text{ são iguais } \forall n \in \mathbb{Z}_N. \quad (16)$$

Para verificar que  $\mathbf{C}^a$  é circulante, a condição (16) será verificada primeiro para  $k = 0$  e depois para os demais valores de  $k$ . Para  $k = 0$ , (16) implica  $(\mathbf{C}^a)_{n,n}$  ser o mesmo para todos os valores de  $n$ . De fato, calculando o produto ponto-a-ponto entre a  $n$ -ésima linha e a  $n$ -ésima coluna das matrizes em (15), vê-se que

$$(\mathbf{C}^a)_{0,0} = (\mathbf{C}^a)_{1,1} = \dots = (\mathbf{C}^a)_{N-1,N-1} = \sum_k \lambda_k^a. \quad (17)$$

Para cada um dos demais valores de  $k$ ,

$$(\mathbf{C}^a)_{n,(n-k) \bmod N} = \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i^a w^{-ni} w^{i[(n-k) \bmod N]} \right]. \quad (18)$$

Como  $0 \leq |n-k| < N$ , pode-se separar dois casos,

$$(\mathbf{C}^a)_{n,(n-k) \bmod N} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i^a w^{-ni} w^{i(n-k)} & \text{para } n-k \geq 0, \\ \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i^a w^{-ni} w^{i(n-k+N)} & \text{c.c.}, \end{cases} \quad (19)$$

nos quais o termo  $w^{-ni} w^{ni} = 1$  pode ser ignorado e, utilizando o fato de que  $w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  tem ordem multiplicativa igual a  $N$ , i. e.  $w^N = 1$ , mostra-se que ambos os casos convergem para o mesmo valor:

$$(\mathbf{C}^a)_{n,(n-k) \bmod N} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i^a w^{-ki} = (\text{DFT}^{-1}\{\hat{\mathbf{h}}_a\})_k = h_a[k], \quad (20)$$

que é o mesmo  $\forall n \in \mathbb{Z}_N$ , concluindo a demonstração de que  $\mathbf{C}^a$  é circulante. Mais do que isso, variando o valor de  $k$  em (20) é possível identificar cada entrada da matriz  $\mathbf{C}^a$  como entradas do vetor  $\mathbf{h}_a$ ; particularmente, a primeira coluna da matriz é precisamente dada por  $\mathbf{h}_a$ .

Além disso, uma vez que o produto de uma matriz à esquerda por  $\mathbf{C}$  causa um deslocamento circular para baixo em cada coluna da matriz, as potências de  $\mathbf{C}$  com expoente até  $N - 1$  formam uma base para o espaço de matrizes circulares  $N \times N$ . Tome-se, como exemplo ilustrativo,  $N = 4$ . As matrizes

$$\mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

formam uma base para o espaço de matrizes circulares  $4 \times 4$ . Do exposto, conclui-se que os coeficientes da representação polinomial de  $\mathbf{C}^a$  são as entradas de  $\mathbf{h}_a$ , i. e.

$$\mathbf{C}^a = \begin{bmatrix} h_a[0] & h_a[N-1] & h_a[N-2] & \dots & h_a[1] \\ h_a[1] & h_a[0] & h_a[N-1] & \dots & h_a[2] \\ h_a[2] & h_a[1] & h_a[0] & \dots & h_a[3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_a[N-1] & h_a[N-2] & h_a[N-3] & \dots & h_a[0] \end{bmatrix} = \sum_{\ell=0}^{N-1} h_a[\ell] \mathbf{C}^\ell. \quad (22)$$

□

## ANEXO

## IMAGENS DE TESTE UTILIZADAS

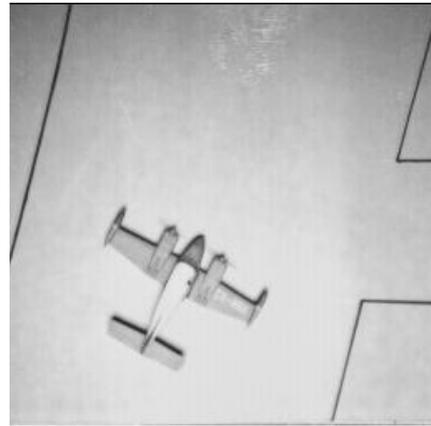
A seguir são exibidas as imagens de teste utilizadas para experimentos com o algoritmo de interpolação proposto, retiradas do banco de dados do *Signal and Image Processing Institute*, University of Southern California, disponível em: <<http://sipi.usc.edu/database/database.php?volume=misc>>.

**Figura 37** – Imagens em escala de cinza, 256x256 pixels, utilizadas para os testes de qualidade de interpolação.

(a) *aerial.tiff*



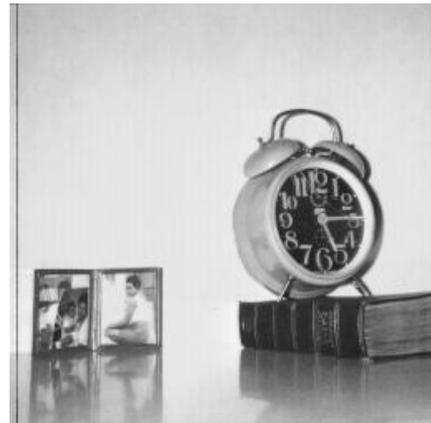
(b) *airplane.tiff*



(c) *chemical\_plant.tiff*



(d) *clock.tiff*

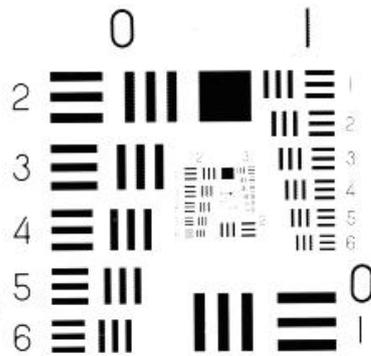




(e) lena\_gray\_256.tiff



(f) moon\_surface.tiff



(g) resolution\_chart.tiff

Fonte: banco de dados do *Signal and Image Processing Institute*, University of Southern California, disponível em: <<http://sipi.usc.edu/database/database.php?volume=misc>>.