

A ' A ' S

C F P ^ Ó G  
C U M ' P  
I E ' R ~  
C ,

Recife - Pernambuco - Brasil

Setembro de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

por

ANDRÉA ARAÚJO SOUSA

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica

ORIENTADOR: PROF. DR. GILBERTO PEREIRA

Recife, setembro de 2008.

©Andréa Araújo Sousa, 2008

**S729f**

**Sousa, Andréa Araújo.**

Fluxo de Potência Ótimo globalmente convergente utilizando métodos de pontos interiores com estratégias de região de confiança / Andréa Araújo Sousa. - Recife: O Autor, 2008.  
xix, 147 folhas, il : figs., tabs.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2008.

Inclui Bibliografia, Anexo e Índice Remissivo.

1. Engenharia Elétrica. 2. Fluxo de Potência Ótimo. 3. Otimização Não-Linear. 4. Métodos de Região de Confiança. 5. Convergência Global. I. Título.

**UFPE**

**621.3**

**CDD (22. ed.)**

**BCTG/2008-189**



**Universidade Federal de Pernambuco**

**Pós-Graduação em Engenharia Elétrica**

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE TESE DE  
DOUTORADO

# **ANDRÉA ARAÚJO SOUSA**

TÍTULO

**“FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO GLOBALMENTE  
CONVERGENTE UTILIZANDO MÉTODOS DE PONTOS  
INTERIORES COM ESTRATÉGIAS DE REGIÃO DE CONFIANÇA”**

A comissão examinadora composta pelos professores: GERALDO LEITE TORRES, DEESP/UFPE, RONALDO RIBEIRO BARBOSA DE AQUINO, DEESP/UFPE, ROBERTO DE SOUZA SALGADO, DEE/UFSC, BENEMAR ALENCAR DE SOUZA, DEE/UFCG e MANOEL AFONSO DE CARVALHO JÚNIOR, DEESP/UFPE sob a presidência do primeiro, consideram a candidata **ANDRÉA ARAÚJO SOUSA**

**APROVADA.**

Recife, 03 de setembro de 2008.

**EDUARDO FONTANA**

Coordenador e Membro Titular Interno

**GERALDO LEITE TORRES**

Orientador e Membro Titular Interno

**ROBERTO DE SOUZA SALGADO**

Membro Titular Externo

**RONALDO RIBEIRO BARBOSA DE AQUINO**

Membro Titular Interno

**BENEMAR ALENCAR DE SOUZA**

Membro Titular Externo

**MANOEL AFONSO DE CARVALHO JÚNIOR**

Membro Titular Externo

A meu marido, Rômulo,  
a minha mãe, Lourdes,  
a meu pai, Orlando (*in memoriam*),  
e a meus gatos, Laranja e Milady,  
pelo carinho, amor, apoio e companhia,  
**DEDICO.**

---

# Agradecimentos

---

A Deus, por cuidar de mim e de minha família. A Jesus Cristo, por me sustentar e proteger.

Ao meu orientador, Geraldo Leite Torres, pela orientação, pela instrução e pela confiança. Sua ajuda foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

Aos professores Benemar Alencar de Souza e Edson Guedes da UFCG por terem dado referências que me ajudaram a ingressar no doutorado.

Aos professores Antônio Jerônimo Belfort, Francisco de Assis dos Santos Neves e Manoel Afonso de Carvalho Jr. pelo conhecimento que adquiri nas disciplinas ministradas por eles.

A Vicente, Carlos, David e Ranieri pela convivência e auxílio no LOASP.

A Giovanna Angelis, pela amizade e companhia.

A Renata e Marcus André pela acolhida em sua casa nos meses de conclusão do doutorado.

À CAPES e à Coordenação de Pós-Graduação pela bolsa concedida durante o doutorado.

## **Agradecimentos Especiais**

A Rômulo e a meus pais, Lourdes e Orlando (*in memoriam*), que me apoiaram quando decidi pedir demissão da CHESF e começar o mestrado. Hoje, Rômulo e minha mãe me acompanham e me dão todo o suporte que preciso para realizar meus sonhos. Sem eles, eu nunca teria concluído este doutorado.

Resumo da Tese apresentada à UFPE como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

F P ^ Ó G C U  
M' P I E ' R ~ C ,

**Andréa Araújo Sousa**

Setembro de 2008

**Orientador:** Prof. Geraldo Leite Torres, PhD

**Área de Concentração:** Processamento da Energia

**Palavras-chave:** Fluxo de Potência Ótimo, Otimização Não-Linear, Métodos de Região de Confiança, Métodos de Pontos-Interiores, Convergência Global.

**Número de Páginas:** 147

O problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) vem sendo estudado desde a década de 1960 e vários métodos de resolução são encontrados na literatura. Em particular, os métodos de Pontos-Interiores (PI) vêm tendo um grande destaque devido a sua robustez e eficiência, alcançando convergência com reduzido número de iterações mesmo em problemas com um grande número de variáveis. Apesar do seu bom desempenho computacional no que se refere a número de iterações e tempo de processamento, os métodos de PI não possuem convergência global, que consiste em encontrar uma solução independente da escolha do ponto inicial. Um dos objetivos desta pesquisa é o desenvolvimento de um algoritmo de FPO globalmente convergente, ou seja, capaz de encontrar uma solução sempre que esta existir. Para atingir esse objetivo, o algoritmo proposto associa métodos de Região de Confiança com os eficientes métodos de PI. Algoritmos globalmente convergentes são sempre computacionalmente intensivos, de forma que três abordagens distintas para a resolução dos subproblemas de região de confiança foram estudadas. Quanto à formulação do problema de FPO, foram desenvolvidos modelos que consideram dispositivos FACTS, como o UPFC (*Unified Power Flow Controller*), e restrições de estabilidade de tensão. Algumas opções de função objetivo, como minimização de perdas, minimização de corte de carga e maximização de carregamento, foram testadas e o desempenho do algoritmo proposto foi avaliado comparando-o ao desempenho de algoritmos de PI já conhecidos.

Abstract of Thesis presented to UFPE as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

# G C O P F I -P M T R S

**Andréa Araújo Sousa**

September 2008

**Supervisor:** Prof. Geraldo Leite Torres, PhD

**Area of Concentration:** Energy processing

**Keywords:** Optimal Power Flow, Nonlinear Optimization, Trust Region Methods, Interior-Point Methods, Global Convergence.

**Number of Pages:** 147

The Optimal Power Flow (OPF) problem has been studied since the 1960's and several methods for its resolution are available in the literature. In particular, the Interior-Point (IP) methods have been widely used in nonlinear OPF solutions due to their robustness and efficiency, reaching convergence with few iterations even for problems with a large number of variables. Despite their good performance, the IP methods are not globally convergent, which means that convergence to a solution point is not dependent on the choice of the initial point. In this doctoral thesis, a globally convergent OPF solution algorithm based on trust region methods is proposed. The proposed OPF algorithm combines trust region methods with primal-dual IP methods. Because globally convergent optimization algorithms are always time consuming, three different approaches for solving the trust region subproblems are considered. Concerning the OPF problem formulation, it was developed OPF models that incorporate FACTS controllers, like the UPFC (Unified Power Flow Controller), and voltage stability constraints. A number of objective functions, like active loss minimization, load shedding minimization and loadability maximization, have been implemented to assess the performance of the proposed OPF solution algorithm, and its performance is compared with that of widely used IP algorithms.



---

# Sumário

---

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Algoritmos</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Símbolos e Abreviaturas</b>	<b>xv</b>
<b>1. Introdução</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos da Pesquisa . . . . .	6
1.2. Composição da Tese . . . . .	7
<b>2. Modelos de Fluxo de Potência Ótimo</b>	<b>9</b>
2.1. Forma Geral do Problema . . . . .	10
2.2. Equações Básicas de Fluxo de Potência . . . . .	13

---

2.2.1.	Fluxos de Potência e Correntes nos Circuitos . . . . .	13
2.2.2.	Injeções de Potências nos Nós . . . . .	17
2.2.3.	Equações de Balanço de Potência . . . . .	19
2.3.	Exemplos de Formulações de Fluxo de Potência Ótimo . . . . .	20
2.3.1.	Minimização de Perdas Ativas na Transmissão . . . . .	21
2.3.2.	Minimização do Corte de Carga . . . . .	23
2.3.3.	Maximização do Carregamento do Sistema . . . . .	25
2.3.4.	Maximização da Capacidade de Transferência Simultânea . . . . .	27
2.3.5.	FPO com Restrição de Estabilidade de Tensão . . . . .	28
2.4.	Estado-da-Arte das Técnicas de Solução . . . . .	30
2.5.	Considerações Finais . . . . .	33
<b>3.</b>	<b>Modelagem de Dispositivos FACTS no Fluxo de Potência Ótimo</b>	<b>34</b>
3.1.	Tipos de Controladores FACTS . . . . .	35
3.2.	Compensador Estático Paralelo: STATCOM . . . . .	36
3.3.	Compensador Estático Série: SSSC . . . . .	38
3.4.	Controlador Unificado de Fluxo de Potência: UPFC . . . . .	39
3.4.1.	Modelo do Conversor Série . . . . .	41
3.4.2.	Modelo do Conversor Paralelo . . . . .	43
3.4.3.	Modelo Completo do UPFC . . . . .	45
3.5.	Inclusão do UPFC no Cálculo de Fluxo de Potência . . . . .	46
3.5.1.	Equações de Fluxo de Potência sem UPFC . . . . .	46
3.5.2.	Solução pelo Método de Newton-Raphson . . . . .	48
3.5.3.	Equações de Fluxo de Potência com UPFC . . . . .	49
3.6.	Fluxo de Potência Ótimo com UPFC . . . . .	51
3.7.	Resultados Numéricos . . . . .	53

---

---

3.8. Considerações Finais . . . . .	55
<b>4. Métodos de Pontos-Interiores para Programação Não-Linear</b>	<b>57</b>
4.1. O Método Primal-Dual de Pontos-Interiores . . . . .	58
4.1.1. Cálculo das Direções de Busca . . . . .	60
4.1.2. Atualização das Variáveis . . . . .	61
4.1.3. Redução do Parâmetro de Barreira . . . . .	62
4.1.4. Testes de Convergência . . . . .	63
4.2. O Método Preditor-Corretor de Pontos Interiores . . . . .	64
4.2.1. O Passo Preditor . . . . .	66
4.2.2. O Passo Corretor . . . . .	67
4.3. Considerações Finais . . . . .	68
<b>5. Globalização da Convergência via Métodos de Região de Confiança</b>	<b>69</b>
5.1. Região de Confiança para Otimização Irrestrita . . . . .	72
5.2. O Algoritmo de Byrd e Omojokun para Otimização Restrita . . . . .	73
5.3. Resolvendo os Subproblemas de Região de Confiança . . . . .	78
5.3.1. Os Passos de Cauchy e de Newton . . . . .	80
5.3.2. O Método Dogleg . . . . .	81
5.3.3. O Método do Gradiente Conjugado de Steihaug . . . . .	84
5.4. Aspectos da Implementação Computacional . . . . .	86
5.4.1. Cálculo da Hessiana da Função de Lagrange . . . . .	86
5.4.2. Escolha entre o Método Dogleg e o Método de Steihaug . . . . .	87
5.4.3. Função Mérito . . . . .	89
5.4.4. Modificando o Tamanho da Região de Confiança . . . . .	92
5.4.5. Assegurando as Restrições de Limites Simples . . . . .	93
5.4.6. Sumário do Algoritmo de Byrd-Omojokun . . . . .	94

---

---

5.5. Considerações Finais . . . . .	95
<b>6. Métodos de Região de Confiança Associados a Métodos de Pontos-Interiores</b>	<b>96</b>
6.1. Método Primal-Dual de Pontos-Interiores para PQ . . . . .	100
6.1.1. Cálculo das Direções de Busca . . . . .	102
6.1.2. Atualização das Variáveis . . . . .	103
6.1.3. Redução do Parâmetro de Barreira . . . . .	104
6.1.4. Testes de Convergência . . . . .	105
6.2. Método Preditor-Corretor de Pontos Interiores para PQ . . . . .	105
6.2.1. O Passo Preditor . . . . .	107
6.2.2. O Passo Corretor . . . . .	108
6.3. Solução do Subproblema Horizontal sem Calcular $Z_k$ . . . . .	108
6.4. Sumário do Algoritmo de Região de Confiança . . . . .	110
6.5. Considerações Finais . . . . .	110
<b>7. Resultados Numéricos</b>	<b>112</b>
7.1. Atualização dos Multiplicadores de Lagrange . . . . .	114
7.2. Influência do Cálculo da Matriz $Z_k$ . . . . .	115
7.3. Resultados Numéricos . . . . .	116
7.3.1. Resolução dos Subproblemas de Região de Confiança . . . . .	118
7.3.2. Convergência para Casos Críticos . . . . .	120
7.4. Considerações Finais . . . . .	121
<b>8. Conclusões</b>	<b>123</b>
8.1. Perspectivas de Trabalhos Futuros . . . . .	125
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>127</b>

---

<b>A . Elementos das Matrizes Jacobiana e Hessiana para as Barras com UPFC</b>	<b>138</b>
A .1. Equações de Balanço de Potência . . . . .	139
A .2. Equação de Intercâmbio de Potência no Enlace CC . . . . .	144
<b>Índice Remissivo</b>	<b>147</b>

---

---

# Lista de Figuras

---

2.1. Representação geral de linhas de transmissão. . . . .	14
2.2. Representação geral de transformadores. . . . .	15
3.1. Configuração básica do STATCOM. . . . .	37
3.2. Esquema simplificado do STATCOM e diagrama fasorial. . . . .	37
3.3. Conexão do SSSC na linha de transmissão. . . . .	39
3.4. Configuração do UPFC. . . . .	40
3.5. Configuração do UPFC com duas fontes de tensão. . . . .	41
3.6. Configuração do conversor série. . . . .	41
3.7. Substituição da fonte de tensão por uma fonte de corrente. . . . .	42
3.8. Modelo do conversor série. . . . .	43
3.9. Configuração do conversor paralelo. . . . .	43
3.10. Modelo do conversor paralelo. . . . .	44
3.11. Modelo completo do UPFC. . . . .	46

---

3.12. Potência na barra de folga. . . . .	54
3.13. Perfil de tensão. . . . .	55
5.1. Trajetória <i>dogleg</i> . . . . .	81
5.2. O minimizador é o passo de Newton. . . . .	83
5.3. O minimizador é o passo de Cauchy. . . . .	83
5.4. O minimizador é a intersecção. . . . .	83

---

---

## Lista de Tabelas

---

7.1. Dimensões dos sistemas e do problema de FPO (2.1). . . . .	113
7.2. Carga inicial (ativa e reativa) e perdas ativas. . . . .	113
7.3. Número de iterações para convergência. . . . .	116
7.4. Número de iterações e perdas ativas finais do Algoritmo RCPI. . . . .	117
7.5. Processo de convergência do sistema-teste IEEE 30 barras. . . . .	117
7.6. Processo de convergência do sistema-teste IEEE 118 barras. . . . .	118
7.7. Processo de convergência do sistema Real4. . . . .	118
7.8. Processo de convergência do Subproblema Vertical - IEEE 118 barras. . . .	119
7.9. Processo de convergência do Subproblema Horizontal - IEEE 118 barras. .	119
7.10. Número de iterações e perdas ativas finais - Casos Críticos. . . . .	120
7.11. Processo de convergência do sistema-teste IEEE 30 barras - Crítico. . . .	120
7.12. Processo de convergência do sistema-teste IEEE 118 barras - Crítico. . . .	121
7.13. Processo de convergência do sistema-teste IEEE 300 barras - Crítico. . . .	121



---

# Lista de Algoritmos

---

3.1. Cálculo de fluxo de potência pelo método de Newton. . . . .	49
4.1. Método primal-dual de PI para resolver (2.1). . . . .	60
4.2. Método preditor-corretor de pontos interiores para resolver (2.1). . . . .	67
5.1. Método Dogleg. . . . .	84
5.2. Método de Steihaug. . . . .	85
5.3. O método de Steihaug aplicado a (5.15). . . . .	87
5.4. Heurística para modificar o parâmetro de penalidade. . . . .	91
5.5. Análise da aceitação do novo ponto. . . . .	92
5.6. Algoritmo de Byrd-Omojokun. . . . .	94
6.1. Método primal-dual de pontos interiores para resolver (6.8). . . . .	102
6.2. Método preditor-corretor de pontos interiores para resolver (6.8). . . . .	108
6.3. Algoritmo de região de confiança. . . . .	110

---

# Lista de Símbolos e Abreviaturas

---

## Abreviaturas

CA	: Corrente Alternada
CC	: Corrente Contínua
CSC	: Convertible Static Compensator
FACTS	: Flexible AC Transmission Systems
FPO	: Fluxo de Potência Ótimo
GTO	: Gate Turn Off Thyristor
IGBT	: Insulated Gate Bipolar Transistor
IPFC	: Interline Power Flow Controller
KKT	: condições Karush-Kuhn-Tucker
LTC	: Load Tap Changer
MCC	: Múltiplas Correções de Centralidade
PDPI	: Primal-Dual de Pontos-Interiores

PCPI	: Preditor-Corretor de Pontos-Interiores
PI	: Pontos Interiores
PL	: Programação Linear
PLS	: Programação Linear Sucessiva
PNL	: Programação Não-Linear
PQ	: Programação Quadrática
PQS	: Programação Quadrática Sucessiva
RC	: Região de Confiança
RCPI	: Pontos-Interiores e Região de Confiança
SSSC	: Static Synchronous Series Compensator
STATCOM	: Static Synchronous Shunt Compensator
SVC	: Static Var Compensator
TCR	: Thyristor Controlled Reactor
TCSC	: Thyristor Controlled Series Condensador
TR	: Trust Region
TSC	: Thyristor Switched Condensador
TSSC	: Thyristor Switched Series Condensador
UPFC	: Unified Power Flow Controller

---

## Símbolos

$\mathcal{B}$	: conjunto de pares de barras terminais dos ramos do sistema
$B_{ij}$	: elemento $ij$ da matriz susceptância $B$
$b_{se}$	: susceptância da linha de transmissão e do conversor série combinadas
$b_{sh}$	: susceptância do conversor paralelo
$C$	: conjunto das barras de carga elegíveis ao controle de reativos
$\delta$	: ângulo de defasagem entre as tensões da barra e do STATCOM
$\Delta$	: raio da região de confiança
$\Delta P$	: balanço de potência ativa
$\Delta P_E$	: intercâmbio de potência no enlace CC do UPFC
$\Delta Q$	: balanço de potência reativa
$\eta$	: parâmetro de penalidade da função mérito
$f(x)$	: função objetivo
$\tilde{f}(x)$	: aproximação quadrática da função objetivo
$\mathcal{F}$	: conjunto das barras com fontes fixas de reativos <i>shunt</i>
$F_{ij}$	: fluxo de potência no ramo $ij$
$\phi(x)$	: função mérito
$\tilde{\phi}(x)$	: aproximação quadrática da função mérito
$g(x)$	: vetor das funções de restrições de igualdade
$\tilde{g}(x)$	: aproximação quadrática das funções de restrições de igualdade
$\mathcal{G}$	: conjunto de todas as barras de geração
$G_{ij}$	: elemento $ij$ da matriz condutância $G$
$H_k$	: Hessiana da função de Lagrange
$\vec{I}$	: corrente complexa
$I_L$	: corrente através da reatância $X_L$
$\vec{I}_{se}$	: corrente equivalente de Thévenin do conversor série

---

$\vec{I}_{sh}$	: corrente do conversor paralelo
$\vec{I}_{SR}$	: corrente fluindo da barra $S$ para a barra $R$
$J_{PF}(V, \theta)$	: Jacobiana do problema de fluxo de potência não otimizado
$\lambda$	: multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade
$m_{se}$	: fator de escala da tensão do conversor série
$m_{sh}$	: fator de escala da tensão do conversor paralelo
$\mu$	: parâmetro de barreira
$\mathcal{N}$	: conjunto de todas as barras do sistema
$\tilde{\mathcal{N}}$	: conjunto de todas as barras exceto a barra de folga
$P_{serie}$	: potência ativa demandada pelo conversor série
$P_i^G$	: potência ativa gerada na barra $i$
$P_i^D$	: potência ativa demandada na barra $i$
$P_L$	: perdas ativas
$P_R$	: potência ativa na barra $R$
$P_{ical}$	: potência ativa injetada na barra $i$
$P_i^{UPFC}$	: potência ativa injetada na barra $i$ pelo UPFC
$P_S$	: potência ativa na barra $S$
$P_i^{se}$	: potência ativa injetada na barra $i$ pelo conversor série
$P_S^{sh}$	: potência ativa injetada na barra $S$ pelo conversor paralelo
$Q_i^G$	: potência reativa gerada na barra $i$
$Q_i^D$	: potência reativa demandada na barra $i$
$Q_R$	: potência reativa na barra $R$
$Q_{ical}$	: potência reativa calculada na barra $i$
$Q_i^{se}$	: potência reativa injetada na barra $i$ pelo conversor série
$Q_i^{UPFC}$	: potência reativa injetada na barra $i$ pelo UPFC
$Q_S$	: potência reativa na barra $S$
$Q_S^{sh}$	: potência reativa injetada na barra $S$ pelo conversor paralelo

---

---

$R$	: resistência
$redr$	: redução real
$redp$	: redução prevista
$\vec{S}_R^{se}$	: potência complexa injetada no nó $R$ pelo conversor série
$\vec{S}_S^{se}$	: potência complexa injetada no nó $S$ pelo conversor série
$\vec{S}_S^{sh}$	: potência complexa injetada no nó $S$ pelo conversor paralelo
$t_{ij}$	: tape entre os ramos $ij$
$\mathcal{T}$	: conjunto das barras terminais dos transformadores com LTC
$\theta_i$	: ângulo da tensão na barra $i$
$\theta_{se}$	: ângulo da tensão do conversor série
$\theta_{sh}$	: ângulo da tensão do conversor paralelo
$\mathcal{U}$	: conjunto das barras com UPFC conectado
$v$	: passo vertical
$V_I$	: tensão no STATCOM
$V_L$	: tensão sobre a reatância $X_L$
$\widehat{V}_i$	: tensão na barra $i$
$\widehat{V}_{S1}$	: tensão da linha depois do UPFC
$X$	: reatância
$X_L$	: reatância da linha de transmissão
$X_{se}$	: reatância da linha de transmissão e do conversor série combinadas
$X_{sh}$	: reatância do conversor paralelo
$Z_{ku}$	: passo horizontal

---

# Capítulo 1

---

## Introdução

---

*A ciência se compõe de erros que,  
por sua vez, são os passos até a verdade.*

**Júlio Verne**

**N**A OPERAÇÃO DIÁRIA de um sistema elétrico de potência, a decisão sobre uma ação de controle ótima, objetivando a operação tanto econômica quanto segura do sistema, é uma tarefa extremamente difícil, a qual é mais eficientemente executada por uma ferramenta de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) no centro de controle do sistema. Problemas de FPO de grande escala vêm sendo, ultimamente, resolvidos de modo eficiente por métodos de Pontos-Interiores (PI) [1–5], em especial os métodos Preditor-Corretor

---

(PC) e de Múltiplas Correções de Centralidade (MCC) [6]. Apesar do bom desempenho computacional desses métodos em termos de número de iterações e tempo de processamento, os algoritmos de PI carecem de convergência global. Convergência global é uma propriedade desejável para qualquer algoritmo de otimização, pois garante a convergência para um ponto solução do problema, se ao menos um houver, independente da escolha do ponto inicial.

Com a reestruturação dos sistemas elétricos de potência e a introdução de competitividade no mercado de energia elétrica, a tendência natural é que as empresas de energia elétrica, ao postergarem investimentos na expansão dos sistemas e almejem maiores lucros com os ativos existentes, operem os seus sistemas próximos aos limites de capacidade, ou seja, em pontos de operação altamente não-lineares, desafiando, assim, a robustez dos métodos numéricos comumente utilizados nas análises de modelos matemáticos. No caso específico de modelos de FPO, em [7, 8] são analisadas várias condições críticas para as quais um algoritmo de FPO pode divergir.

Uma das principais motivações para o desenvolvimento deste trabalho é a crescente necessidade por algoritmos de FPO com propriedade de convergência global, ou seja, capaz de obter a solução ótima sempre que ao menos uma existir. Pode-se eleger, então, como principal objetivo desta pesquisa de doutorado o desenvolvimento de um algoritmo de solução de FPO com grande robustez de convergência. Esse objetivo será perseguido associando-se métodos de Região de Confiança (RC) [9, 10] com os eficientes e rápidos algoritmos de PI do tipo Primal-Dual de Barreira Logarítmica.

O termo *região de confiança* (do inglês *trust region*) foi inicialmente usado por Cellis, Dennis e Tapia [11] em 1985, mas estudos preliminares já eram desenvolvidos desde 1970 por Powell [12, 13]. Os principais métodos de região de confiança são descritos em [9, 10, 14]. Esses métodos pertencem a uma classe relativamente nova de algoritmos de otimização não-linear e consistem na minimização de uma aproximação  $\tilde{f}(x)$  da função objetivo  $f(x)$  dentro de uma região fechada, chamada de *região de confiança*. A expectativa é de conseguir uma redução em  $\tilde{f}(x)$  e que esta represente também uma redução na função original,  $f(x)$ .

Os métodos de região de confiança diferem entre si tanto na forma de modelar a função objetivo quanto no tratamento das restrições, sendo a estratégia clássica a utilização da aproximação quadrática para minimização irrestrita, dada por uma expansão em série de

---



---

Taylor truncada. Essa modelagem pode ser encontrada, por exemplo, em [9, 15]. Aplicações com restrições de igualdade, desigualdade e/ou de canalização podem ser encontradas em [9, 16–18].

Problemas de otimização restritos podem ser resolvidos também por meio de algoritmos de região de confiança para otimização irrestrita. Para esse fim, usa-se uma função mérito para incorporar as restrições à função objetivo, transformando, assim, o problema restrito em irrestrito. Nessas transformações são usadas, por exemplo, a função Lagrangeano Aumentado [19], funções de penalidade [9] e função barreira logarítmica [20].

Aplicações de métodos de região de confiança em sistemas de potência começaram a surgir apenas recentemente e há poucos trabalhos desenvolvidos. Pajic e Clements [21, 22] utilizam um método de região de confiança na estimação de estados de sistemas de potência, o qual minimiza uma aproximação quadrática da função objetivo que é construída por mínimos quadrados ponderados. Zhou, Zhang e Liu [23] apresentam um algoritmo para otimização de potência reativa que combina Programação Quadrática Sucessiva com região de confiança. Nessa metodologia a função mérito usada é a função de penalidade  $l_1$ . Costa, Salgado e Haas em [24] utilizam métodos de RC na solução de problemas de estimação de estado.

Métodos de região de confiança podem ser associados a outras técnicas de otimização na construção de novos algoritmos. Nesta pesquisa de doutorado, busca-se a associação de métodos de região de confiança a métodos de pontos-interiores tipo primal-dual de barreira logarítmica. Espera-se assim obter um algoritmo de solução de FPO que apresente a robustez de convergência do método de região de confiança associada a rapidez e flexibilidade do método de pontos-interiores. O problema a ser tratado é de otimização de larga escala com restrições de igualdades e desigualdades, de forma que a estratégia clássica de resolução (minimização irrestrita) não poderá ser diretamente usada nesse caso.

Pode-se eleger como uma contribuição importante desta pesquisa o desenvolvimento de um algoritmo de PI com estratégias de região de confiança para otimização restrita de larga escala, levando em conta a forma padrão dos problemas de FPO, ou seja, problemas de otimização não-linear com restrições de igualdades e desigualdades tipo canalização (limites mínimos e máximos sobre a mesma variável ou função de restrição). Alguns trabalhos associando métodos de pontos-interiores a métodos de região de confiança podem ser encontrados em [25–30]. Contudo, nenhum desses trabalhos é aplicado a FPO nem leva

---

em consideração a forma padrão desse problema.

Além de robustez de convergência e bom desempenho computacional em termos de tempo de processamento, é importante que um programa de FPO seja abrangente, ou seja, disponha de várias opções de função objetivo e de flexibilidade na especificação de restrições. Uma vez que o algoritmo de solução em desenvolvimento leva em consideração uma forma padrão geral do FPO, o mesmo poderá ser facilmente aplicado à solução de diversos problemas de FPO, como: minimização de perdas ativas, cálculo do máximo carregamento do sistema, minimização de corte de carga, etc. Esta pesquisa de doutorado propõe também contribuir com novas formulações de FPO, as quais devem levar em consideração restrições de estabilidade de tensão e a presença de dispositivos FACTS (*Flexible AC Transmission Systems*) no sistema elétrico.

A motivação para inclusão de dispositivos FACTS na formulação de FPO deriva da crescente evolução da tecnologia de eletrônica de potência e a introdução cada vez mais freqüente desses dispositivos nos sistemas. Os maiores problemas envolvendo a operação e o planejamento de um sistema elétrico devem-se às linhas de transmissão, pois os seus limites técnicos de operação restringem o nível de potência que pode ser transmitido com segurança [31]. Por causa disso, tornou-se necessário o desenvolvimento de novos meios de controle do fluxo de potência na rede elétrica. A utilização de novos dispositivos de eletrônica de potência, como controladores FACTS, tornou-se uma necessidade imperativa. Dispositivos FACTS são capazes de mudar, de forma rápida e efetiva, os parâmetros da rede elétrica, tornando possível o controle de fluxo de potência ativa e reativa, de módulo e de ângulo da tensão, visando a operação ótima, além de melhorar, de forma generalizada, a estabilidade do sistema [32–34].

A coordenação otimizada dos diferentes dispositivos de controle conectados à rede só é possível por meio de programas de FPO que os incorporem em suas formulações. Um dispositivo FACTS considerado nesta pesquisa é o *Unified Power Flow Controller* (UPFC). A implementação de programas de fluxo de potência com UPFC ou qualquer outro dispositivo FACTS requer uma modelagem matemática do dispositivo inserido na rede elétrica. De uma forma geral, o UPFC é modelado por dois conversores, um série e outro paralelo, que trabalham de forma independente, mas com interação via o enlace CC entre os dois, conforme desenvolvido por Nabavi-Niaki e Iravani [35].

Noroozian et al [36] e Tumay e Vural [37] propõem um modelo simplificado do UPFC,

---

no qual o conversor paralelo tem a função principal de prover potência ativa para o conversor série, não participando, portanto, do controle de fluxo. Tal função é desempenhada somente pelo conversor série. Em [36] as perdas entre os conversores série e paralelo são desprezadas, enquanto que em [37] essas perdas são estimadas em 2%. Modelos mais completos, considerando a atuação do conversor paralelo no controle de fluxo, podem ser encontrados em [34, 38–40].

Programas de FPO incorporando UPFC foram desenvolvidos por Lai e Ma [41], usando algoritmos genéticos, por Ambriz-Pérez et al [38], usando método de Newton, por Zhang e Handschin [34], usando um método de pontos-interiores e por Singh, Verma e Gupta [42], Lehmköster [43] e Palma-Behnke et al [44] usando programação quadrática seqüencial. Silva e Almeida apresentam em [45] a implementação dos dispositivos FACTS STATCOM e SSSC no FPO por pontos-interiores. O FPO é utilizado para determinar as melhores localizações para esses equipamentos e os seus impactos na operação de regime permanente.

A motivação para a inclusão de restrições de estabilidade de tensão no programa de FPO deriva da conjuntura política e econômica atual: a preocupação com a escassez dos recursos naturais, as políticas de racionamento e a reestruturação do mercado de energia têm limitado o crescimento da capacidade de transmissão e de geração dos sistemas de energia elétrica. Isso tem levado as empresas de energia a operarem seus sistemas altamente carregados e muito próximos dos limites de estabilidade.

Os problemas de estabilidade em sistemas de potência estão relacionados à capacidade das máquinas síncronas manterem-se em sincronismo e à habilidade do sistema em manter as tensões nas barras em níveis aceitáveis em condições de operação normal e após uma contingência [46]. O primeiro caso diz respeito à estabilidade angular e está relacionado com a transferência de potência ativa. O segundo caso refere-se à estabilidade de tensão e está fortemente ligado à capacidade do sistema em suprir a demanda de potência reativa.

Embora os problemas de estabilidade de uma forma geral venham sendo estudados desde a década de 1920, os problemas de instabilidade de tensão em particular vêm tendo uma atenção especial a partir da década de 1970, principalmente depois de alguns episódios importantes de colapso de tensão no Japão, nos Estados Unidos e na Europa [46]. Os programas de FPO têm sido largamente usados para solucionar problemas como despacho de potência ativa e reativa, minimizar perdas elétricas, maximizar o carregamento, minimi-

---

zar corte de carga e melhorar o perfil de tensão. Tradicionalmente, esses problemas são considerados desacoplados e têm sido tratados de forma independente. Entretanto, em um sistema fortemente carregado esses problemas não são, necessariamente, desligados, sendo necessário incorporar indicadores de estabilidade de tensão nos limites operacionais dos programas de FPO para que os problemas sejam tratados de forma integrada [47].

Índices de estabilidade de tensão podem ser calculados eficientemente e existem vários trabalhos disponíveis na literatura, como, por exemplo, [48–51]. Tiranuchit e Thomas [52] e Löf et al [53] propuseram o uso do valor singular mínimo da matriz Jacobiana das equações de fluxo de potência como um índice para detectar o limite de estabilidade de tensão. Esse índice foi usado mais tarde no conjunto de restrições de um programa de FPO por Cañizares et al [47]. Posteriormente, Kodsi e Cañizares [54] e Muñoz [55] propuseram restrições de estabilidade de tensão baseadas em um índice proposto por Cañizares et al [56], calculado pela seguinte expressão:

$$\sigma_i = u_i^T J_{PF}(V, \theta) w_i \quad (1.1)$$

em que  $u_i$  e  $w_i$  são os autovetores à direita e à esquerda, respectivamente, associados ao menor autovalor da Jacobiana do problema de fluxo de potência não otimizado,  $J_{PF}(V, \theta)$ . A restrição de estabilidade tensão consiste, então, em impor um valor mínimo para esse índice, ou seja,  $\sigma_i \geq \sigma_i^{\min}$ .

Uma relativa dificuldade com a implementação da restrição de estabilidade de tensão

$$u_i^T J_{PF}(V, \theta) w_i \geq \sigma_i^{\min} \quad (1.2)$$

é que a função de restrição é uma função implícita da solução do FPO, uma vez que os autovetores à esquerda e à direita,  $u_i$  e  $w_i$ , da Jacobiana do fluxo de potência  $J_{PF}(V, \theta)$  devem ser calculados no ponto solução. Para contornar essa dificuldade, utiliza-se um procedimento iterativo em que várias soluções de FPO são obtidas.

## 1.1 Objetivos da Pesquisa

Os principais objetivos desta pesquisa de doutorado podem ser resumidos como segue:

---

- Estudar detalhadamente os principais métodos de região de confiança para otimização irrestrita e restrita que podem ser aplicados na otimização de sistemas elétricos de potência;
- Desenvolver, a partir dos estudos do item anterior, um algoritmo de otimização não-linear de larga escala, utilizando métodos de pontos-interiores com estratégias de região de confiança, levando em consideração a forma geral de um problema de FPO.
- Implementar computacionalmente, na linguagem MATLAB, o algoritmo de FPO que utiliza métodos de pontos-interiores e métodos de região de confiança, levando-se em conta os principais aspectos para maior eficiência computacional, como estrutura de dados, montagem eficiente de matrizes Jacobianas e Hessianas esparsas, inicialização de variáveis, etc;
- Estudar os principais modelos para análise em regime permanente do dispositivo FACTS UPFC e descrever a sua implementação eficiente no algoritmo de FPO desenvolvido;
- Desenvolver e implementar formulações de FPO que contenham:
  - modelagem do dispositivo FACTS UPFC;
  - inclusão de restrições de estabilidade de tensão.
- Testar exaustivamente o programa computacional de FPO desenvolvido em diversos sistemas testes, visando comprovar a eficácia do algoritmo de otimização proposto, sobretudo com relação à robustez de convergência, comparando o seu desempenho ao desempenho dos algoritmos de PI largamente utilizados na solução de problemas de FPO.

## 1.2 Composição da Tese

Esta tese encontra-se organizada em oito capítulos, descritos a seguir:

Capítulo 1 Apresentam-se a motivação para a pesquisa, a análise de alguns trabalhos relacionados com o tema da Tese e os principais objetivos do trabalho proposto.

---

- 
- Capítulo 2 São apresentadas a formulação geral dos problemas de FPO e as funções-objetivo estudadas nesta Tese.
- Capítulo 3 Faz-se uma revisão teórica sobre dispositivos FACTS em geral, e em particular sobre os dispositivos STATCOM e SSSC, com o objetivo de facilitar a compreensão do funcionamento do UPFC. É apresentada detalhadamente a formulação matemática para inclusão do UPFC em programas de fluxo de potência convencional (não otimizado) e em programas de FPO.
- Capítulo 4 Faz-se uma apresentação detalhada dos métodos de Pontos-Interiores do tipo Primal-Dual e Preditor-Corretor. Esses dois métodos, adaptados para programação quadrática, são usados no algoritmo de região de confiança para resolução dos subproblemas vertical e horizontal.
- Capítulo 5 Faz-se uma revisão teórica sobre a técnica clássica de região de confiança para minimização irrestrita. Depois, apresenta-se o método de região de confiança para minimização restrita de Byrd-Omojokun adaptado para minimização com restrições de igualdades e de limites simples.
- Capítulo 6 Apresenta-se a técnica de região de confiança de Byrd-Omojokun adaptada por Plantenga associada aos métodos de pontos-interiores para resolução dos subproblemas de região de confiança. O algoritmo de FPO proposto nesta Tese usa os métodos descritos neste capítulo, que se constitui um dos mais importantes desta Tese.
- Capítulo 7 Apresentam-se os resultados numéricos obtidos com o programa de FPO na linguagem MATLAB implementando o método proposto e os métodos de PI, e faz-se uma discussão detalhada desses resultados.
- Capítulo 8 Apresentam-se as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros.
- Anexo A Traz as expressões matemáticas das derivadas primeiras e segundas não-nulas das restrições de igualdades dos termos correspondentes às barras com UPFC.
-

# Capítulo 2

---

## Modelos de Fluxo de Potência Ótimo

---

**A** OPERAÇÃO ECONÔMICA E SEGURA de um Sistema Elétrico de Potência (SEP) requer que vários níveis de controle, envolvendo um complexo conjunto de dispositivos, sejam selecionados e apropriadamente coordenados. Na operação de um SEP, as demandas das cargas por potências ativa e reativa modificam-se constantemente e muitas vezes resultam em níveis de tensões que estão bem além dos limites toleráveis, provavelmente violando restrições de operação de equipamentos de consumidores e da própria empresa de energia elétrica.

Para corrigir essas condições de operação inaceitáveis, os operadores do sistema são constantemente requisitados para controlarem a produção, a absorção e o fluxo de potência em todos os níveis do sistema, através do ajuste de diversas variáveis de controle do SEP, tais como a geração de potência ativa e a tensão terminal dos geradores, o tap dos transfor-

madores com dispositivos LTC (comutação de tape sob carga), o ângulo de defasagem dos transformadores defasadores (*phase shifters*), a susceptância de capacitores e de reatores em paralelo, etc.

Devido ao fato de que os SEPs recebem injeções de potência de várias unidades de geração, e de que eles suprem potência para um grande número de cargas que são dispersas em áreas geográficas de grandes dimensões, a tarefa de manter as tensões dentro dos limites requeridos pode ser bastante complexa. O controle de tensão é largamente reconhecido como sendo fortemente relacionado ao controle da potência reativa. Porém, face ao elevado número de variáveis de controle que podem ser manipuladas, associado com o elevado número de restrições que são impostas à operação do sistema, a seleção apropriada e a coordenação dos equipamentos para exercer esse controle está entre os maiores desafios da engenharia de potência.

No entanto, essa tarefa pode ser eficientemente executada por programas de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) existentes nos centros de controle do sistema elétrico, seja de forma totalmente automática ou como ferramenta de auxílio a tomada de decisão pelo operador. O FPO é uma sofisticada ferramenta computacional que se utiliza de técnicas avançadas de otimização na determinação do estado operativo ótimo do SEP, minimizando ou maximizando um determinado índice de desempenho do sistema enquanto satisfaz um conjunto de restrições impostas sobre a operação.

## 2.1 Forma Geral do Problema

Vários problemas de FPO podem ser expressos na seguinte forma geral de um problema de programação não-linear:

$$\text{Minimize } f(x) \tag{2.1a}$$

$$\text{sujeito a } g(x) = 0 \tag{2.1b}$$

$$\underline{x}_l \leq x_l \leq \bar{x}_l \tag{2.1c}$$

em que:

- $x \in \mathbb{R}^n$  é um vetor com as variáveis de decisão explícitas, incluindo as variáveis de



controle (tensões das barras de geração, taps dos transformadores, compensação de reativo em paralelo, potência ativa dos geradores, fator de carregamento, etc) e as variáveis dependentes que não são funções (ângulo de fase das tensões, tensões das barras de carga, potência reativa dos geradores, etc);

- $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  é a função escalar que representa um dado objetivo de otimização da operação ou do planejamento do SEP, tal como o custo da geração, perdas de potência no sistema de transmissão, corte de carga para tornar operativo um sistema não operativo, etc;
- $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  é um vetor não-linear que contém as equações usuais de balanço de potência nas barras, ocasionalmente aumentado por algumas restrições especiais de igualdades, tal como o controle do fluxo de potência entre sistemas numa operação em *pool*, ou fluxos que são estabelecidos em um determinado valor, etc;
- $x_l \in \mathbb{R}^p$  é o vetor com as variáveis  $x$  sujeitas a limites máximos  $\bar{x}_l$  e mínimos  $\underline{x}_l$  correspondentes a limites físicos de equipamentos e limites operacionais do sistema.

Em vez de minimizar, o objetivo pode ser de maximizar uma função. Dentre os objetivos usualmente utilizados, encontram-se:

- *Minimização de custos de geração*: minimiza o custo da geração da potência ativa para a configuração base da rede elétrica enquanto assegura a viabilidade nas configurações de contingências;
  - *Minimização de perdas ativas*: minimiza as perdas ativas na configuração base enquanto assegura a viabilidade nas configurações de contingências;
  - *Minimização de corte de carga*: minimiza o corte de carga para corrigir violações de restrições operacionais tais como sobrecargas em circuitos, problemas de tensão, etc, no caso base e nas configurações de contingências;
  - *Minimização do movimento de variáveis de controle*: determina o menor número de dispositivos de controle a serem ajustados de forma a corrigir violações de restrições operacionais;
-

- *Maximização do fluxo ativo em um conjunto de circuitos*: maximiza o fluxo ativo através de um conjunto de circuitos na configuração base enquanto assegura a viabilidade nas configurações de contingências;
- *Maximização da carga em um conjunto de barras*: maximiza a carga num conjunto de barras, mantendo o mesmo fator de potência da carga e a viabilidade no caso base e configurações de contingências;
- *Maximização da potência transferida entre duas barras*: maximiza a potência transferida entre duas barras, mantendo a viabilidade no caso base e configurações de contingências.

Para otimizar (minimizar ou maximizar) a função objetivo especificada, as seguintes variáveis de controle podem ser utilizadas:

- Potência reativa de bancos de capacitores e indutores chaveáveis, de compensadores síncronos, de compensadores estáticos, etc;
- Tapes dos transformadores com dispositivo LTC;
- Tensão terminal dos geradores;
- Potência ativa dos geradores;
- Ângulo dos defasadores controlando fluxo ativo;
- Corte de carga, etc.

O conjunto de restrições geralmente é constituído por:

- Limites (máximos e mínimos) das tensões das barras;
  - Limites dos fluxos nos circuitos (MVA, MW e/ou MVA<sub>r</sub>);
  - Limites dos tapes dos transformadores com dispositivo LTC;
  - Limites dos ângulos dos defasadores;
  - Limites das gerações de potência ativa e potência reativa;
-

- Limites das injeções de potência reativa de fontes em paralelo controláveis;
- Intercâmbio de potência ativa e reativa entre áreas, etc.

Além do caso base, a solução pode contemplar a operação do sistema sob contingências, tais como:

- Perda de circuito (linha de transmissão ou transformador);
- Perda de barramento;
- Perda de gerador;
- Adição de circuito (reconfiguração), etc.

Idealmente, a formulação de FPO deve permitir a definição de controles e limites diferentes na condição base e nas configurações de contingências.

## 2.2 Equações Básicas de Fluxo de Potência

As equações básicas do problema de fluxo de potência tradicional [57], ou seja, o fluxo de potência não-otimizado, são de fundamental importância para a formulação matemática de uma ampla variedade de problemas de FPO. Para o desenvolvimento dessas equações, são inicialmente apresentados os modelos de dois componentes básicos da rede elétrica: as linhas de transmissão e os transformadores. No caso de transformadores, é apresentado um modelo bastante geral, que modela até os sofisticados transformadores defasadores.

### 2.2.1 Fluxos de Potência e Correntes nos Circuitos

#### Linhas de Transmissão

Nos estudos de fluxo de potência, as linhas de transmissão são, geralmente, modeladas pelo circuito  $\Pi$ , ilustrado na Figura 2.1, em que  $\vec{y}_{ij} = g_{ij} + jb_{ij}$  representa a admitância série da linha e  $\vec{y}_{ij}^{sh} = jb_{ij}^{sh}$  representa o efeito do carregamento capacitivo da linha (metade do carregamento total concentrado em cada terminal).

---

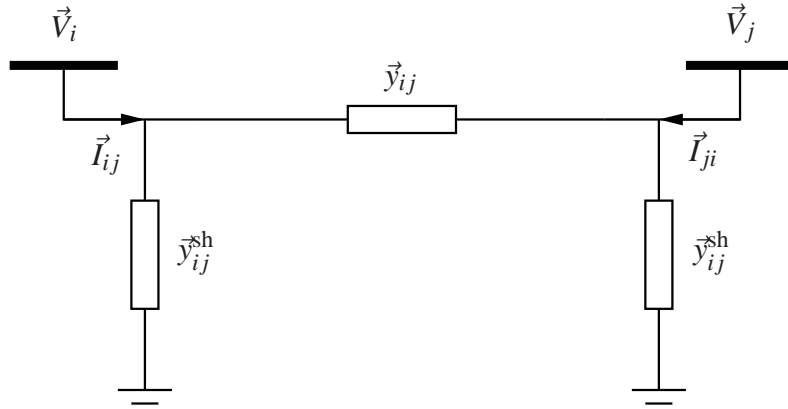


Figura 2.1: Representação geral de linhas de transmissão.

Deduz-se, da Figura 2.1, que a corrente complexa que flui do nó  $i$  para o nó  $j$  é dada por:

$$\begin{aligned}\vec{I}_{ij} &= \vec{y}_{ij}^{\text{sh}} \vec{V}_i + \vec{y}_{ij} (\vec{V}_i - \vec{V}_j) \\ &= (\vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) \vec{V}_i - \vec{y}_{ij} \vec{V}_j\end{aligned}\quad (2.2)$$

Analogamente, a corrente complexa que flui do nó  $j$  para o nó  $i$  é calculada por:

$$\begin{aligned}\vec{I}_{ji} &= \vec{y}_{ij}^{\text{sh}} \vec{V}_j + \vec{y}_{ij} (\vec{V}_j - \vec{V}_i) \\ &= -\vec{y}_{ij} \vec{V}_i + (\vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) \vec{V}_j\end{aligned}\quad (2.3)$$

Matricialmente, temos a relação entre as correntes  $\vec{I}_{ij}$  e  $\vec{I}_{ji}$  e as tensões de nós  $\vec{V}_i$  e  $\vec{V}_j$  dada por:

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_{ij} \\ \vec{I}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) & -\vec{y}_{ij} \\ -\vec{y}_{ij} & (\vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_i \\ \vec{V}_j \end{bmatrix}.\quad (2.4)$$

A potência complexa que flui do nó  $i$  para o nó  $j$  é calculada por:

$$\begin{aligned}\vec{S}_{ij} &= \vec{V}_i \vec{I}_{ij}^* \\ &= \vec{V}_i [(\vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) \vec{V}_i - \vec{y}_{ij} \vec{V}_j]^* \\ &= \vec{V}_i [\vec{y}_{ij} (\vec{V}_i - \vec{V}_j) + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}} \vec{V}_i]^*\end{aligned}\quad (2.5)$$

A potência complexa que flui do nó  $j$  para o nó  $i$  é calculada por:

$$\begin{aligned}\vec{S}_{ji} &= \vec{V}_j \vec{I}_{ji}^* \\ &= \vec{V}_j [-\vec{y}_{ij} \vec{V}_i + (\vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) \vec{V}_j]^* \\ &= \vec{V}_j [\vec{y}_{ij} (\vec{V}_j - \vec{V}_i) + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}} \vec{V}_j]^*\end{aligned}\quad (2.6)$$

Matricialmente, temos a relação entre os fluxos de potências complexas e as tensões de nós dada por:

$$\begin{bmatrix} \vec{S}_{ij} \\ \vec{S}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V}_i & 0 \\ 0 & \vec{V}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) & -\vec{y}_{ij} \\ -\vec{y}_{ij} & (\vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_i \\ \vec{V}_j \end{bmatrix}^* \quad (2.7)$$

### Transformadores em Fase e Defasadores

Uma representação geral de transformadores (em-fase e defasadores) é ilustrada na Figura 2.2, a qual consiste de uma admitância série  $\vec{y}_{ij}$  e de um auto-transformador ideal com relação de transformação complexa na forma  $1 : \vec{t}_{ij}$ , ou seja, o tape  $\vec{t}_{ij}$  no lado da admitância série. Temos que  $\vec{t}_{ij} = t_{ij} e^{j\phi_{ij}}$ , sendo  $\phi_{ij} = 0$  no caso de transformadores em-fase. Para a

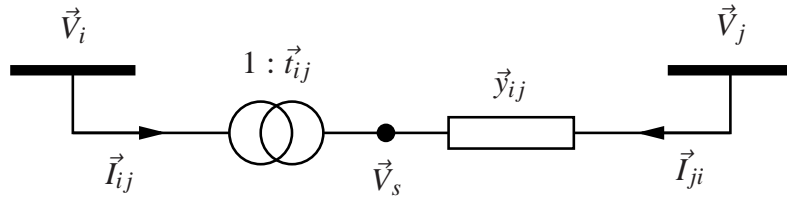


Figura 2.2: Representação geral de transformadores.

representação de transformadores da Figura 2.2, na qual o tape está do lado da admitância série  $\vec{y}_{ij}$ , a relação entre as tensões dos nós terminais do transformador ideal é como segue:

$$\frac{\vec{V}_s}{\vec{V}_i} = \vec{t}_{ij} \quad (2.8)$$

Uma vez que as potências complexas na entrada e na saída do transformador ideal devem ser iguais, temos:

$$\vec{V}_i \vec{I}_{ij}^* + \vec{V}_s \vec{I}_{ji}^* = 0 \quad (2.9)$$

Podemos, agora, a partir das relações (2.8) e (2.9), deduzir a relação entre as correntes complexas  $\vec{I}_{ij}$  e  $\vec{I}_{ji}$  injetadas nos terminais do transformador, isto é:

$$\begin{aligned}\frac{\vec{I}_{ij}}{\vec{I}_{ji}} &= -\frac{\vec{V}_s^*}{\vec{V}_i^*} \\ &= -\vec{t}_{ij}^*\end{aligned}\quad (2.10)$$

Podemos deduzir, da Figura 2.2, que a corrente complexa que flui do nó  $j$  para o nó  $i$  é dada por:

$$\vec{I}_{ji} = \vec{y}_{ij}(\vec{V}_j - \vec{V}_s) \quad (2.11)$$

Utilizando as expressões (2.10) e (2.11), calculamos a corrente complexa que flui do nó  $i$  para o nó  $j$  como:

$$\begin{aligned}\vec{I}_{ij} &= -\vec{t}_{ij}^* \vec{I}_{ji} \\ &= -\vec{t}_{ij}^* \vec{y}_{ij}(\vec{V}_j - \vec{V}_s)\end{aligned}\quad (2.12)$$

Matricialmente, temos a relação entre os fluxos de correntes e as tensões dos nós terminais na forma:

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_{ij} \\ \vec{I}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{t}_{ij}^* \vec{t}_{ij}^*) \vec{y}_{ij} & -\vec{t}_{ij}^* \vec{y}_{ij} \\ -\vec{t}_{ij}^* \vec{y}_{ij} & \vec{y}_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_i \\ \vec{V}_j \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

A potência complexa que flui do nó  $i$  para o nó  $j$  é calculada por:

$$\begin{aligned}\vec{S}_{ij} &= \vec{V}_i \vec{I}_{ij}^* \\ &= \vec{V}_i (-\vec{t}_{ij}^* \vec{y}_{ij} (\vec{V}_j - \vec{V}_s))^* \\ &= \vec{V}_s (\vec{y}_{ij} (\vec{V}_s - \vec{V}_j))^*\end{aligned}\quad (2.14)$$

A potência complexa que flui do nó  $j$  para o nó  $i$  é calculada por:

$$\begin{aligned}\vec{S}_{ji} &= \vec{V}_j \vec{I}_{ji}^* \\ &= \vec{V}_j (\vec{y}_{ij} (\vec{V}_j - \vec{V}_s))^*\end{aligned}\quad (2.15)$$

Matricialmente, temos a relação entre os fluxos de potências complexas e as tensões de nós

na forma:

$$\begin{bmatrix} \vec{S}_{ij} \\ \vec{S}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V}_i & 0 \\ 0 & \vec{V}_j \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} (\vec{t}_{ij}\vec{t}_{ij}^*)\vec{y}_{ij} & -\vec{t}_{ij}^*\vec{y}_{ij} \\ -\vec{t}_{ij}\vec{y}_{ij} & \vec{y}_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_i \\ \vec{V}_j \end{bmatrix} \right)^* \quad (2.16)$$

### Equações Gerais de Fluxos

Comparando as equações de transformadores (2.13) e (2.16) com as equações de linhas de transmissão (2.4) e (2.7), podemos deduzir as seguintes equações gerais de fluxos de correntes e de potências complexas:

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_{ij} \\ \vec{I}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{t}_{ij}\vec{t}_{ij}^*\vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) & -\vec{t}_{ij}^*\vec{y}_{ij} \\ -\vec{t}_{ij}\vec{y}_{ij} & (\vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_i \\ \vec{V}_j \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{S}_{ij} \\ \vec{S}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V}_i & 0 \\ 0 & \vec{V}_j \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} (\vec{t}_{ij}\vec{t}_{ij}^*\vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) & -\vec{t}_{ij}^*\vec{y}_{ij} \\ -\vec{t}_{ij}\vec{y}_{ij} & (\vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_i \\ \vec{V}_j \end{bmatrix} \right)^* \quad (2.18)$$

em que:

- $t_{ij} = 1$  e  $\phi_{ij} = 0$ , no caso de linhas de transmissão;
- $\vec{y}_{ij}^{\text{sh}} = 0$  e  $\phi_{ij} = 0$ , no caso de transformadores em fase;
- $\vec{y}_{ij}^{\text{sh}} = 0$  e  $t_{ij} = 1$ , no caso de defasadores puros; e
- $\vec{y}_{ij}^{\text{sh}} = 0$ , no caso de transformadores defasadores.

### 2.2.2 Injeções de Potências nos Nós

A potência líquida injetada em uma barra é definida como sendo a diferença entre a geração total e a carga total naquela barra. Essa potência vem a ser também a soma das potências que fluem nos circuitos que têm aquela barra como um de seus terminais. Ou seja:

$$\begin{aligned} \vec{S}_i &= \vec{S}_i^G - \vec{S}_i^D \\ &= \sum_j \vec{S}_{ji} + \sum_k \vec{S}_{ik} \end{aligned} \quad (2.19)$$

A potência complexa líquida injetada no nó  $i$  é calculada por:

$$\vec{S}_i = \vec{V}_i \vec{I}_i^* \quad (2.20)$$

em que  $\vec{I}_i$  é a corrente líquida injetada no nó  $i$ , ou seja, a  $i$ -ésima componente no vetor  $\vec{I}$  da equação de rede:

$$\vec{Y}\vec{V} = \vec{I} \quad (2.21)$$

Temos, portanto, de (2.20) e (2.21), que as potências complexas líquidas injetadas nos nós  $i$  e  $j$  são:

$$\vec{S}_i = \vec{V}_i \left( \sum_{k \in \mathcal{I}} \vec{Y}_{ik} \vec{V}_k \right)^* \quad (2.22)$$

$$\vec{S}_j = \vec{V}_j \left( \sum_{k \in \mathcal{J}} \vec{Y}_{jk} \vec{V}_k \right)^* \quad (2.23)$$

em que  $\vec{Y}_{jk}$  e  $\vec{Y}_{ik}$  são elementos da matriz admitância de nó  $\vec{Y}$ ;  $\mathcal{I}$  é o conjunto das barras adjacentes a barra  $i$ , incluindo a própria barra  $i$  e  $\mathcal{J}$  é o conjunto das barras adjacentes à barra  $j$ , incluindo a própria barra  $j$ .

Admitindo que as barras  $i$  e  $j$  são interligadas, seja por linhas de transmissão ou por transformadores, e explicitando em (2.22) e (2.23) os termos das tensões dessas barras,  $\vec{V}_i$  e  $\vec{V}_j$ , obtemos:

$$\vec{S}_i = \vec{V}_i \left( \vec{Y}_{ii} \vec{V}_i + \vec{Y}_{ij} \vec{V}_j + \sum_{(k \neq i, j) \in \mathcal{I}} \vec{Y}_{ik} \vec{V}_k \right)^* \quad (2.24)$$

$$\vec{S}_j = \vec{V}_j \left( \vec{Y}_{ji} \vec{V}_i + \vec{Y}_{jj} \vec{V}_j + \sum_{(k \neq i, j) \in \mathcal{J}} \vec{Y}_{jk} \vec{V}_k \right)^* \quad (2.25)$$

Considerando que  $\vec{Y}_{ii}^0$ ,  $\vec{Y}_{ij}^0$ ,  $\vec{Y}_{ji}^0$  e  $\vec{Y}_{jj}^0$  denotam elementos da matriz admitância de nó antes da inclusão do circuito- $ij$  (que pode ser uma linha ou um transformador), temos que a inclusão do circuito- $ij$  (que assumimos ser um transformador) modifica as equações de injeções de



potência da seguinte forma:

$$\vec{S}_i = \vec{V}_i \left( (\vec{Y}_{ii}^0 + \vec{t}_{ij} \vec{t}_{ij}^* \vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) \vec{V}_i + (\vec{Y}_{ij}^0 - \vec{t}_{ij} \vec{y}_{ij}) \vec{V}_j + \sum_{(k \neq i, j) \in \mathcal{I}} \vec{Y}_{ik} \vec{V}_k \right)^* \quad (2.26)$$

$$\vec{S}_j = \vec{V}_j \left( (\vec{Y}_{ji}^0 - \vec{t}_{ij} \vec{y}_{ij}) \vec{V}_i + (\vec{Y}_{jj}^0 + \vec{y}_{ij} + \vec{y}_{ij}^{\text{sh}}) \vec{V}_j + \sum_{(k \neq i, j) \in \mathcal{J}} \vec{Y}_{jk} \vec{V}_k \right)^* \quad (2.27)$$

### 2.2.3 Equações de Balanço de Potência

As formulações matemáticas dos problemas de FPO usam as equações de balanço de potência ativa e de potência reativa nas barras do sistema. Faz-se necessária, portanto, a identificação das componentes real (potência ativa) e imaginária (potência reativa) das injeções de potência complexa nas barras. Uma vez que:

$$\vec{S}_i = P_i + jQ_i \quad (2.28)$$

as injeções líquidas de potência ativa ( $P_i = \Re\{\vec{S}_i\}$ ) e de potência reativa ( $Q_i = \Im\{\vec{S}_i\}$ ) são dadas por:

$$P_i = V_i \sum_{j \in \mathcal{I}} V_j (G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)) \quad (2.29)$$

$$Q_i = V_i \sum_{j \in \mathcal{I}} V_j (G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)) \quad (2.30)$$

em que  $V_i$  e  $\theta_i$  são, respectivamente, a magnitude e o ângulo de fase da tensão complexa da barra  $i$ ,  $\widehat{V}_i = V_i e^{j\theta_i}$ ,  $G_{ij}$  é o elemento  $ij$  da matriz condutância de barra,  $G$ , e  $B_{ij}$  é o elemento  $ij$  da matriz susceptância de barra,  $B$ . Os tapes de transformadores estão presentes implicitamente em elementos das matrizes  $G$  e  $B$ .

Seja:

$$\vec{S}_{ij} = P_{ij} + jQ_{ij} \quad (2.31)$$

então, os fluxos de potência ativa,  $P_{ij} = \Re\{\vec{S}_{ij}\}$ , e de potência reativa,  $Q_{ij} = \Im\{\vec{S}_{ij}\}$ , no

sentido do nó  $i$  para o nó  $j$ , são calculados por:

$$P_{ij} = V_i^2 g_{ij} - V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) - V_i V_j b_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) \quad (2.32)$$

$$Q_{ij} = -V_i^2 (b_{ij} + b_{ij}^{sh}) + V_i V_j b_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) - V_i V_j g_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) \quad (2.33)$$

e no sentido do nó  $j$  para o nó  $i$ , por:

$$P_{ji} = V_j^2 g_{ij} - V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + V_i V_j b_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) \quad (2.34)$$

$$Q_{ji} = -V_j^2 (b_{ij} + b_{ij}^{sh}) + V_i V_j b_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + V_i V_j g_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) \quad (2.35)$$

em que  $g_{ij}$ ,  $b_{ij}$  e  $b_{ij}^{sh}$  são, respectivamente, a condutância série, a susceptância série e a susceptância em paralelo do circuito- $ij$ .

A partir dos fluxos de potência ativa (2.32) e (2.34), em sentidos opostos, calcula-se a perda de potência ativa no circuito  $ij$  como:

$$P_{ij} + P_{ji} = g_{ij}(V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos(\theta_i - \theta_j)). \quad (2.36)$$

As perdas ativas globais no sistema de transmissão,  $P_{perdas}$ , são calculadas como a soma das perdas ativas em todos os circuitos do sistema, ou seja:

$$P_{perdas} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} g_{ij}(V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos(\theta_i - \theta_j)). \quad (2.37)$$

As equações (2.29) a (2.37) formam a base para o desenvolvimento dos modelos de FPO.

## 2.3 Exemplos de Formulações de Fluxo de Potência Ótimo

Problemas de FPO podem ser matematicamente formulados de várias maneiras. Nesta seção são apresentadas, como exemplos, as formulações em quatro variantes importantes nessa ampla família de problemas de otimização da operação: (a) minimização de perdas ativas no sistema de transmissão, conhecido como despacho ótimo da potência reativa; (b) minimização do corte de carga; (c) maximização da capacidade de carregamento; e (d)

maximização da capacidade de transferência simultânea da potência.

Os seguintes conjuntos de índices são utilizados neste capítulo: representa-se por  $\mathcal{N}$  o conjunto de todas as barras do sistema, por  $\tilde{\mathcal{N}}$ , o conjunto de todas as barras exceto a barra de referência, por  $\mathcal{G}$ , o conjunto de barras de *geração*, por  $\mathcal{F}$ , o conjunto de barras de carga com fontes de reativos em paralelo *fixas* e por  $\mathcal{C}$ , o conjunto de barras de carga *candidatas* ao controle da potência reativa. As seguintes relações entre conjuntos são observadas:  $\mathcal{N} = \mathcal{G} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$  e  $\mathcal{G} \cap \mathcal{F} = \mathcal{G} \cap \mathcal{C} = \mathcal{F} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ . Representa-se por  $\mathcal{N}_i$  o conjunto de todas as barras eletricamente vizinhas a barra  $i$ , ou seja, que estão diretamente conectadas a barra  $i$ . O conjunto de pares de índices ordenados

$$\mathcal{B} = \{(i, j) \mid i \in \mathcal{N}, j \in \mathcal{N}_i \text{ e } j > i\}$$

é definido como sendo o conjunto dos pares de barras terminais de todos os ramos (linhas de transmissão e transformadores) do sistema. Define-se  $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$  como o conjunto das barras terminais  $(i, j)$  dos transformadores com dispositivo LTC e  $\mathcal{U}$  o conjunto de barras conectadas ao terminal do UPFC.

### 2.3.1 Minimização de Perdas Ativas na Transmissão

O problema da minimização da perda de potência ativa no sistema de transmissão, como formulado nesta seção, apresenta como restrições: as equações básicas de balanço de potência ativa e reativa nas barras; os limites de operação em relação aos níveis de tensões em todas as barras; os limites de operação em relação a geração de reativos pelos geradores; e os limites físicos das susceptâncias em paralelo e dos tapes dos transformadores com LTC.

Assume-se que as injeções de potência ativa em todas as barras do sistema, exceto a barra de referência, são conhecidas e permanecem fixas nos valores definidos pelo despacho econômico (DE) de geração, ou seja, as gerações de potência ativa não são consideradas como variáveis do problema.

As variáveis de controle (aquelas que podem ser diretamente manipuladas pelo operador) são: as tensões terminais dos geradores, as susceptâncias em paralelo dos capacitores e reatores, e os tapes dos transformadores com dispositivo LTC. As variáveis de estado ou dependentes são: as tensões nas barras de carga, o ângulo de fase das tensões nodais, e a

potência reativa dos geradores.

De forma compacta, o problema de minimização de perdas ativas no sistema de transmissão pode ser matematicamente expresso como segue:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize } P_{\text{perdas}}(V, \theta, t) \\
& \text{sujeito a } \begin{aligned}
& P_i(V, \theta, t) + P_{D_i}(V_i) - P_{G_i} = 0, & \text{para } i \in \mathcal{N} \\
& Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} = 0, & \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} = 0, & \text{para } i \in \mathcal{F} \\
& Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} - b_i^{sh} V_i^2 = 0, & \text{para } i \in \mathcal{C} \\
& F_{ij}(V, \theta, t) - F_{ij} = 0, & \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B} \\
& V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max}, & \text{para } i \in \mathcal{N} \\
& t_{ij}^{\min} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{\max}, & \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{T} \\
& P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, & \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, & \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& b_i^{\min} \leq b_i^{sh} \leq b_i^{\max}, & \text{para } i \in \mathcal{C} \\
& F_{ij}^{\min} \leq F_{ij} \leq F_{ij}^{\max}, & \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B}
\end{aligned} \tag{2.38}
\end{aligned}$$

em que  $P_{\text{perdas}}(V, \theta, t)$ ,  $P_i(V, \theta, t)$  e  $Q_i(V, \theta, t)$  são as funções perdas elétricas, injeção líquida de potência ativa e injeção líquida de potência reativa, calculadas pelas expressões (2.37), (2.29) e (2.30), respectivamente.  $P_{D_i}(V_i)$  e  $Q_{D_i}(V_i)$  são as demandas de potências ativa e reativa na barra  $i$ , respectivamente, as quais admitimos poderem variar com o módulo da tensão da barra, segundo o modelo ZIP de carga [57]:

$$P_{D_i}(V_i) = (a_p + b_p V_i + c_p V_i^2) P_i^{\text{nom}} \tag{2.39}$$

$$Q_{D_i}(V_i) = (a_q + b_q V_i + c_q V_i^2) Q_i^{\text{nom}} \tag{2.40}$$

em que  $a + b + c = 1$ , e  $P_i^{\text{nom}}$  e  $Q_i^{\text{nom}}$  são as demandas na tensão nominal  $V_i = 1$  p.u. A variável  $F_{ij}$  representa o fluxo no ramo  $ij$ , seja de potência aparente, potência ativa, potência reativa ou de corrente. Observe que, para reduzir o número de restrições do problema, são incluídas restrições de limites de fluxos apenas em um subconjunto dos ramos, aqueles considerados mais críticos e com maior possibilidade de violação. O primeiro grupo de restrições de igualdades impõe o balanço de potência ativa nas barras do sistema, enquanto o segundo, terceiro e quarto grupos de restrições impõem o balanço de potência reativa nas barras de geração, nas barras de carga com reativo fixo, e nas barras de carga

com reativo controlável, respectivamente. A quinta restrição de igualdade juntamente o último conjunto de restrições de desigualdades impõe os limites de carregamento nos circuitos selecionados. Outras restrições de igualdade podem ser incorporadas à formulação, como, por exemplo, restrições de controle de intercâmbio entre áreas.

As desigualdades representam os limites físicos sobre as susceptâncias em paralelo, sobre os tapas dos transformadores com LTC, sobre as tensões, sobre a geração de reativos pelos geradores e sobre os fluxos nas linhas e nos transformadores. Observe que as equações básicas do problema de fluxo de potência tradicional (não-otimizado) fazem parte do conjunto de restrições do problema (2.38).

Alternativamente, pode-se definir uma função objetivo que considere as perdas ativas apenas em uma certa área do sistema, como segue:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{(i,j) \in \Omega} P_{ij} + P_{ji},$$

em que  $\Omega$  é o conjunto dos índices das barras terminais dos circuitos que definem a área de interesse onde as perdas devem ser minimizadas. Alternativamente, pode-se definir a função objetivo como sendo as perdas reativas no sistema ou em uma certa área do sistema. Essa função objetivo tem vários efeitos benéficos [58]. Ela reduz as perdas ativas, mantém o perfil de tensões plano e aumenta consideravelmente as reservas de potência reativa dos geradores.

### 2.3.2 Minimização do Corte de Carga

Em várias situações na operação de um sistema de potência, esquemas de cortes de carga são utilizados para reduzir a carga atual do sistema para um nível que possa ser suprido com segurança pela geração e pela topologia da rede disponível. Esse tipo de situação pode ocorrer, por exemplo, quando um sistema fortemente carregado é submetido à perda de um equipamento importante, tal como uma linha de transmissão, um transformador ou um gerador, de maneira tal que ele não pode mais suprir toda a demanda da carga com a geração e a rede de transmissão pós-contingência.

O problema de minimização do corte de carga consiste em determinar o corte mínimo da carga que é necessário para restaurar a viabilidade da operação (atender limites que

---

estão sendo violados), ou mesmo para restaurar a solvabilidade das equações de balanço de potência nas barras as quais, sem uma redução na carga, não teriam solução. Uma formulação possível para esse problema é como segue:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize } \tau \\
& \text{sujeito a} \quad P_i(V, \theta, t) + P_{D_i}^0(V_i)(1 - \tau) - P_{G_i} = 0, \quad \text{para } i \in \mathcal{N} \\
& \quad \quad \quad Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}^0(V_i)(1 - \tau) - Q_{G_i} = 0, \quad \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& \quad \quad \quad Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}^0(V_i)(1 - \tau) - Q_{G_i} = 0, \quad \text{para } i \in \mathcal{F} \\
& \quad \quad \quad Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}^0(V_i)(1 - \tau) - Q_{G_i} - b_i^{sh} V_i^2 = 0, \quad \text{para } i \in \mathcal{C} \\
& \quad \quad \quad F_{ij}(V, \theta, t) - F_{ij} = 0, \quad \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B} \\
& \quad \quad \quad V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max}, \quad \text{para } i \in \mathcal{N} \\
& \quad \quad \quad t_{ij}^{\min} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{\max}, \quad \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{T} \\
& \quad \quad \quad P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, \quad \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& \quad \quad \quad Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, \quad \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& \quad \quad \quad b_i^{\min} \leq b_i^{sh} \leq b_i^{\max}, \quad \text{para } i \in \mathcal{C} \\
& \quad \quad \quad F_{ij}^{\min} \leq F_{ij} \leq F_{ij}^{\max}, \quad \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

em que  $\tau$  é o fator de corte de carga nas barras, e  $P_{D_i}^0$  e  $Q_{D_i}^0$  são as demandas originais das potências ativa e reativa, ou seja, as demandas anteriores à ocorrência da contingência.

Observe que a formulação do problema de corte de carga é relativamente simples e pouco difere da formulação para minimização de perdas elétricas, principalmente com relação ao conjunto de restrições, o que facilita a sua implementação a partir de um programa existente para minimização de perdas. A diferença básica está na multiplicação da potência da carga pelo fator de corte da carga a ser minimizado. Assim, um novo perfil de carga pode ser determinado de forma que os limites operacionais sejam atendidos com o menor corte de carga possível.

Observe ainda que essa formulação considera que o mesmo percentual de corte de carga é aplicado a todas as barras do sistema, o que pode ser impraticável, uma vez que a área mais crítica do sistema que é a diretamente afetada pela contingência poderá requerer um percentual de carga bem maior do que o necessário em outras barras/áreas do sistema. Além do fator de corte comum, o mesmo está presente em todas as barras do sistema, enquanto na prática ocorre somente em determinados conjuntos de barras.

Para diferenciar os consumidores no evento de um corte de carga, pode-se considerar a

formulação:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} && \sum_{i \in \mathcal{N}} w_i \tau_i \\
& \text{sujeito a} && P_i(V, \theta, t) + P_{D_i}^0(V_i)(1 - \tau_i) - P_{G_i} = 0, && \text{para } i \in \mathcal{N} \\
& && Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}^0(V_i)(1 - \tau_i) - Q_{G_i} = 0, && \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& && Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}^0(V_i)(1 - \tau_i) - Q_{G_i} = 0, && \text{para } i \in \mathcal{F} \\
& && Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}^0(V_i)(1 - \tau_i) - Q_{G_i} - b_i^{sh} V_i^2 = 0, && \text{para } i \in \mathcal{C} \\
& && F_{ij}(V, \theta, t) - F_{ij} = 0, && \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B} \\
& && V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{N} \\
& && t_{ij}^{\min} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{\max}, && \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{T} \\
& && P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& && Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& && b_i^{\min} \leq b_i^{sh} \leq b_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{C} \\
& && F_{ij}^{\min} \leq F_{ij} \leq F_{ij}^{\max}, && \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

em que  $w_i$  é um coeficiente de ponderação da importância da barra  $i$  no montante do corte de carga.

Observa-se nas formulações (2.41) e (2.42) que o mesmo parâmetro de corte de carga,  $\tau$  ou  $\tau_i$ , é utilizado para o corte da carga ativa  $P_{D_i}^0$  e da carga reativa  $Q_{D_i}^0$ . Isso significa que o fator de potência das cargas permanecerá constante. Todavia, pode-se facilmente modelar o corte com modificação do fator de potência.

### 2.3.3 Maximização do Carregamento do Sistema

Para um estado de operação viável qualquer de um sistema, o problema de maximização do carregamento é o de determinar o máximo crescimento da carga que o sistema ainda pode suportar (seja a carga total do sistema, a carga em uma certa área do sistema ou a carga em uma determinada barra ou conjunto de barras), ainda satisfazendo às restrições de operação da empresa e dos equipamentos dos consumidores. Um programa capaz de calcular o máximo crescimento da carga do sistema, sem contemplar novos investimentos na geração e no sistema de transmissão, é uma ferramenta bastante valiosa em estudos de estabilidade de tensão. Dependendo de como o problema é formulado, sua solução pode ser utilizada para definir contratos com grandes consumidores, definir transações entre

sistemas interligados, etc.

Uma formulação particular do problema de maximização do carregamento do sistema é como segue:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize} && \tau \\
& \text{sujeito a} && P_i(V, \theta, t) + P_{D_i}^0(V_i)(1 + \tau) - P_{G_i} = 0, && \text{para } i \in \mathcal{N} \\
& && Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}^0(V_i)(1 + \tau) - Q_{G_i} = 0, && \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& && Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}^0(V_i)(1 + \tau) - Q_{G_i} = 0, && \text{para } i \in \mathcal{F} \\
& && Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}^0(V_i)(1 + \tau) - Q_{G_i} - b_i^{sh} V_i^2 = 0, && \text{para } i \in \mathcal{C} \\
& && F_{ij}(V, \theta, t) - F_{ij} = 0, && \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B} \\
& && V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{N} \\
& && t_{ij}^{\min} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{\max}, && \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{T} \\
& && P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& && Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& && b_i^{\min} \leq b_i^{sh} \leq b_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{C} \\
& && F_{ij}^{\min} \leq F_{ij} \leq F_{ij}^{\max}, && \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

em que  $\tau$  é o fator de crescimento da carga.

Observe que, para resolver o problema (2.43) parte-se de um estado de operação viável (ou seja, um estado no qual as restrições em (2.43) podem ser satisfeitas para  $\tau = 0$ ) e então aumenta-se o parâmetro  $\tau$  até que o conjunto viável de (2.43) no espaço definido por  $(V, \theta, t)$  deixe de existir, pelo menos localmente, para o novo nível de carga  $(1 + \tau)P_{D_i}^0$  e  $(1 + \tau)Q_{D_i}^0$ . Portanto, o problema do máximo crescimento da carga trata com condições de operação altamente não-lineares. Observe também que há uma grande semelhança entre a formulação do problema de minimização do corte de carga (2.41) e o de maximização do carregamento do sistema (2.43). A principal diferença diz respeito ao sinal do fator de carregamento  $\tau$ . As dificuldades numéricas que esses dois problemas impõem sobre a técnica de otimização empregada na solução são as mesmas.

De forma similar ao problema de minimização do corte de carga, podem-se considerar



crescimentos de carga distintos nas barras, resolvendo-se o problema:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize} && \sum_{i \in \mathcal{N}} w_i \tau_i \\
& \text{sujeito a} && P_i(V, \theta, t) + P_{D_i}^0(V_i)(1 + \tau_i) - P_{G_i} = 0, && \text{para } i \in \mathcal{N} \\
& && Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}^0(V_i)(1 + \tau_i) - Q_{G_i} = 0, && \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& && Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}^0(V_i)(1 + \tau_i) - Q_{G_i} = 0, && \text{para } i \in \mathcal{F} \\
& && Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}^0(V_i)(1 + \tau_i) - Q_{G_i} - b_i^{sh} V_i^2 = 0, && \text{para } i \in \mathcal{C} \\
& && F_{ij}(V, \theta, t) - F_{ij} = 0, && \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B} \\
& && V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{N} \\
& && t_{ij}^{\min} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{\max}, && \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{T} \\
& && P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& && Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& && b_i^{\min} \leq b_i^{sh} \leq b_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{C} \\
& && F_{ij}^{\min} \leq F_{ij} \leq F_{ij}^{\max}, && \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

em que  $w_i$  é um coeficiente de diferenciação da barra  $i$  no crescimento da carga.

### 2.3.4 Maximização da Capacidade de Transferência Simultânea

Outro problema de grande interesse no planejamento da operação de um SEP é o da determinação da máxima potência que pode ser transferida de um sistema para outro interligado, ou de uma área para outra do mesmo sistema. A solução desse problema é conhecida como máxima capacidade de transferência simultânea, e o problema pode ser formulado da se-

guinte forma:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize} && \sum_{ij \in \Omega} P_{ij}(V, \theta, t) \\
& \text{sujeito a} && P_i(V, \theta, t) + P_{D_i}(V_i) - P_{G_i} = 0, && \text{para } i \in \mathcal{N} \\
& && Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} = 0, && \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& && Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} = 0, && \text{para } i \in \mathcal{F} \\
& && Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} - b_i^{sh} V_i^2 = 0, && \text{para } i \in \mathcal{C} \\
& && F_{ij}(V, \theta, t) - F_{ij} = 0, && \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B} \\
& && V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{N} \\
& && t_{ij}^{\min} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{\max}, && \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{T} \\
& && P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& && Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{G} \\
& && b_i^{\min} \leq b_i^{sh} \leq b_i^{\max}, && \text{para } i \in \mathcal{C} \\
& && F_{ij}^{\min} \leq F_{ij} \leq F_{ij}^{\max}, && \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

em que  $\Omega$  é o conjunto dos índices  $(i, j)$  das barras terminais dos ramos nos quais se deseja maximizar o fluxo de potência ativa, ao mesmo tempo em que um conjunto de restrições é satisfeito.

### 2.3.5 FPO com Restrição de Estabilidade de Tensão

Vários índices de estabilidade de tensão vêm sendo estudados como propostas de restrição de estabilidade de tensão no problema de FPO. Devido à complexidade das funções, a maior dificuldade encontrada na implementação computacional dos programas que utilizam esses índices é a eficiência computacional em termos de tempo de execução [55].

Com o objetivo de tornar a inclusão de restrições de estabilidade de tensão computacionalmente mais prática e atrativa, uma nova formulação foi recentemente proposta em [54]. Na formulação proposta, seja  $J_{PF}(V, \theta)$  a matriz Jacobiana do problema de fluxo de potência não-otimizado. Ou seja:

$$J_{PF}(V, \theta) = \begin{bmatrix} H(V, \theta) & N(V, \theta) \\ M(V, \theta) & L(V, \theta) \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

A restrição de estabilidade de tensão proposta em [55] é expressa da seguinte forma:

$$u_i^T J_{PF}(V, \theta) w_i \geq \sigma_i^{\min} \quad (2.47)$$

em que  $u_i$  e  $w_i$  são os autovetores à direita e à esquerda, respectivamente, associados ao menor autovalor da jacobiana  $J_{PF}(V, \theta)$  e  $\sigma_i^{\min}$  é o mínimo valor aceitável para o menor autovalor de  $J_{PF}(V, \theta)$ .

Um problema de FPO com a restrição de estabilidade de tensão (2.47) pode ser escrito na forma geral:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(x) \\ & \text{sujeito a} \quad P_i(V, \theta, t) + P_{D_i}(V_i) - P_{G_i} = 0, \quad \text{para } i \in \mathcal{N} \\ & \quad Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} = 0, \quad \text{para } i \in \mathcal{G} \\ & \quad Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} = 0, \quad \text{para } i \in \mathcal{F} \\ & \quad Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} - b_i^{sh} V_i^2 = 0, \quad \text{para } i \in \mathcal{C} \\ & \quad F_{ij}(V, \theta, t) - F_{ij} = 0, \quad \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B} \\ & \quad u_i^T J_{PF}(V, \theta) w_i - \tau_i = 0, \\ & \quad V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max}, \quad \text{para } i \in \mathcal{N} \\ & \quad t_{ij}^{\min} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{\max}, \quad \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{T} \\ & \quad P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, \quad \text{para } i \in \mathcal{G} \\ & \quad Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, \quad \text{para } i \in \mathcal{G} \\ & \quad b_i^{\min} \leq b_i^{sh} \leq b_i^{\max}, \quad \text{para } i \in \mathcal{C} \\ & \quad F_{ij}^{\min} \leq F_{ij} \leq F_{ij}^{\max}, \quad \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B} \\ & \quad \sigma_i^{\min} \leq \sigma_i \leq \sigma_i^{\max} \end{aligned} \quad (2.48)$$

em que a restrição de desigualdade (2.47) foi transformada na restrição de igualdade:

$$u_i^T J_{PF}(V, \theta) w_i - \sigma_i = 0 \quad (2.49)$$

que define a variável índice de estabilidade de tensão  $\sigma_i$ , acrescida da restrição de limites simples:

$$\sigma_i^{\min} \leq \sigma_i \leq \sigma_i^{\max} \quad (2.50)$$

Restrições de estabilidade de tensão invariavelmente tornam a solução do FPO mais complexa. Uma dificuldade com a restrição (2.47) é que ela é uma função implícita da

solução do problema, uma vez que os autovetores à esquerda e à direita,  $u_i$  e  $w_i$ , da Jacobiana do fluxo de potência  $J_{PF}(V, \theta)$ , devem ser calculados no ponto solução, e a solução que contempla a restrição de estabilidade de tensão não pode ser obtida sem a presença da restrição na formulação. Essa dificuldade é contornada usando um processo iterativo de solução no qual sucessivas soluções de FPO são calculadas.

## 2.4 Estado-da-Arte das Técnicas de Solução

Os problemas de FPO são inevitavelmente problemas de programação não-linear não-convexa de grande escala, bastante complicados nas aplicações práticas pela presença de um grande número de variáveis discretas, tais como os taps dos transformadores, as susceptâncias dos capacitores em paralelo, etc.

Dada a sua importância nas atividades de planejamento e operação, o FPO tem sido um tema de intensa pesquisa há cerca de quatro décadas [58, 59]. Métodos do gradiente foram as primeiras técnicas utilizadas para resolver um problema de FPO [60], o qual foi formulado matematicamente pela primeira vez por Carpentier em 1962.

Desde então, melhorias nas ferramentas de FPO têm sido alcançadas de duas maneiras principais: (a) formulações mais eficientes do problema, e (b) técnicas de otimização mais eficientes, flexíveis e robustas. As principais técnicas para resolver os problemas de FPO incluem métodos do gradiente reduzido, métodos baseados no Lagrangeano aumentado, funções de penalidades exatas e, principalmente, métodos baseados em aproximações locais, tais como Programação Linear Sucessiva (PLS) e Programação Quadrática Sucessiva (PQS).

As técnicas de PLS e PQS têm sido largamente utilizadas na otimização de sistemas de potência. Atualmente, elas podem tirar proveito dos eficientes métodos de Pontos-Interiores (PI) para resolver os subproblemas de Programação Linear (PL) ou Programação Quadrática (PQ) que são gerados a cada iteração PLS ou PQS [61, 62]. Entretanto, o processo de convergência da PLS e PQS é, entre outros fatores, altamente dependente da existência de um bom ponto de operação inicial para a aproximação local das funções não-lineares, o que nem sempre ocorre.

Por outro lado, tem sido crescente a necessidade de resolverem-se problemas de FPO na

sua forma não-linear original. Portanto, técnicas de otimização baseadas em aproximações locais sucessivas, como PLS e QLS, tornaram-se menos atrativas. Por outro lado, a solução eficiente de FPOs na forma não-linear pode ser um problema bastante complexo. Várias condições sob as quais um algoritmo de FPO pode falhar na convergência são estudadas em [7].

Um algoritmo que teve grande repercussão na solução não-linear de problemas de FPO foi o proposto por Sun et al. [63]. Ele combina, no mesmo algoritmo, o método de Newton (para otimização sem restrições) e funções de penalidade. Uma estrutura de dados bem projetada, a qual possibilita a fatorização em blocos, associada ao uso eficiente de técnicas de esparsidade, tornou esse algoritmo bastante atrativo na ocasião. Entretanto, sua eficiência computacional revelou-se altamente dependente da identificação das restrições ativas, um problema que foi posteriormente estudado em [64].

Recentemente, os problemas de otimização em sistemas de potência [1–4, 65, 66], em especial os problemas de FPO, têm sido resolvidos de forma eficiente por métodos de PI, tanto na forma linear quanto na forma não-linear. Na área de programação matemática, nos últimos vinte anos as pesquisas sobre os métodos de PI experimentaram um avanço impressionante, tanto na teoria quanto na prática computacional.

O primeiro método de PI é atribuído a Frisch [67], o qual é um método de barreira logarítmica que foi posteriormente, nos anos 1960, extensivamente estudado por Fiacco e McCormick [68] para resolver problemas com desigualdades não-lineares. No entanto, foi na área de PL, em 1984, que o extraordinário desempenho computacional de um método de PI foi demonstrado na prática [69]. Desde então, vários métodos de PI foram propostos e implementados.

Os primeiros resultados teóricos para os métodos de PI do tipo primal-dual seguidor de trajetória são devidos a Megiddo [70]. Os métodos primal-dual de PI que incorporam passos de predição e correção, tal como o método preditor-corretor de Mehrotra [71], são atualmente aceitos como os métodos de PI computacionalmente mais eficientes. Melhorias adicionais sobre o método preditor-corretor de Mehrotra foram posteriormente alcançadas com o uso de múltiplos passos de correção [72, 73]. Aplicações dos métodos de PI com múltiplos passos de correção em problemas de FPO foram propostas em [6, 74, 75]. Atualmente, variantes do método primal-dual de PI estão sendo estudadas para resolver todos os tipos de problemas: de linear a não-linear, e de convexo a não-convexo.

---

Otimização de sistemas de potência é uma das áreas onde os métodos de PI estão sendo aplicados extensivamente [5]. Isso porque, devido as dimensões e as características especiais de tais problemas, os métodos de PI têm demonstrado, na prática computacional, serem bastante eficientes no que diz respeito ao tempo de processamento e à robustez de convergência. Entre as diversas aplicações dos métodos de PI em sistemas de potência, citam-se: (a) estimação de estados [65, 76], (b) modelos diversos de FPO [1–4, 61, 62, 66, 74, 77, 78], (c) coordenação hidro-térmica [79], (d) colapso de tensão [80], e (e) controle de reservatórios [81].

Nas aplicações supracitadas, os algoritmos de solução incluem diferentes métodos de PI aplicados a sequências de subproblemas de PL [62, 77], a sequências de subproblemas de PQ [61], ou diretamente ao problema não-linear original [1–4, 65, 66, 78, 80]. Diversos métodos de PI foram considerados, tais como o método *dual affine-scaling* [77, 82], variantes do método primal-dual de barreira logarítmica para PNL [1, 65], e variantes tipo preditor-corretor para PL [62] e para PNL [2, 4, 66].

O bom desempenho computacional das aplicações descritas em [1, 2, 65], em termos de robustez de convergência e tempo de processamento, foi responsável pelo crescente interesse nos métodos de PI para resolver problemas de otimização não-linear de grande porte em sistemas de potência. Resultados computacionais nas primeiras aplicações em FPO, baseados em redes elétricas de 2423 barras [2] e 3467 barras [1], mostraram que o número de iterações para convergência dos métodos de PI é insensível ao tamanho do sistema elétrico (número de barras e circuitos), e que tais métodos são numericamente robustos.

Como exemplos da robustez dos métodos de PI, cita-se as soluções dos problemas de minimização de corte de carga [3] e de maximização do carregamento [4]. Esses problemas são variantes altamente não-lineares do problema de FPO, que dificilmente são resolvidas por técnicas baseadas em PL. Uma característica interessante do método primal-dual de PI é que a viabilidade é geralmente alcançada durante o processo iterativo, na busca pela otimalidade. Isto significa que as equações de balanço de potência não precisam ser satisfeitas desde o ponto inicial. Essa característica é particularmente interessante na solução do problema de mínimo corte de carga, situação em que a não solvabilidade das equações de fluxo de carga é o problema em questão.

---

## 2.5 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentada a formulação geral dos problemas de FPO como serão tratados nesta tese e apresentadas as formulações dos problemas de minimização de perdas ativas na transmissão, minimização do corte de carga e maximização do carregamento do sistema. Para validação do programa proposto nesta pesquisa, será usado o problema de minimização de perdas elétricas ativas, por ser um problema clássico, com um grande número de soluções propostas no estado-da-arte, tornando mais fácil a sua comparação.

No tocante a novos modelos de FPO, foi apresentado neste capítulo uma formulação com restrição de estabilidade de tensão. No entanto, face à grande complexidade da implementação computacional eficiente dessa restrição os resultados numéricos apresentados nesta tese não contemplam essa restrição.

Propõe-se ainda nesta pesquisa incorporar ao programa de FPO restrições que levem em conta a presença de dispositivos FACTS na rede elétrica. Neste trabalho, optou-se pelo estudo do dispositivo FACTS UPFC. No próximo capítulo é estudado o modelo do UPFC e a inclusão de restrições no programa de FPO desenvolvido que levem em conta a presença do UPFC no sistema elétrico.

# Capítulo 3

---

## Modelagem de Dispositivos FACTS no Fluxo de Potência Ótimo

---

**O**S SISTEMAS ELÉTRICOS MODERNOS têm demandado novos meios de controle do fluxo de potência na rede elétrica. A utilização de novos dispositivos de eletrônica de potência, como controladores FACTS, tornou-se uma necessidade imperativa. Dispositivos FACTS são capazes de mudar, de forma rápida e efetiva, os parâmetros da rede elétrica, tornando possível o controle de fluxo de potência ativa e reativa, de módulo e de ângulo da tensão, visando a operação ótima, além de melhorar, de forma generalizada, a estabilidade do sistema [32–34].

A concepção de sistemas FACTS envolve, de maneira geral, equipamentos de eletrônica de potência aplicados a sistemas de transmissão para controle em tempo real do fluxo



de potência e da tensão de barra. Equipamentos com conceito FACTS começaram a ser implementados a partir do final da década de 1960 por diversos grupos, mas o nome FACTS, *Flexible AC Transmission Systems*, só passou a existir a partir de 1988, quando Hingorani [83] publicou os seus artigos.

O conceito FACTS agrupa um conjunto de novos equipamentos de eletrônica de potência que permitem maior flexibilidade de controle dos sistemas elétricos. Nesse caso, entende-se flexibilidade como a capacidade de rápida e contínua alteração dos parâmetros que controlam a dinâmica de funcionamento de um sistema elétrico.

Neste capítulo, é apresentada uma visão geral dos dispositivos FACTS e uma análise mais detalhada dos dispositivos STATCOM e SSSC, com o objetivo de facilitar a compreensão do funcionamento do UPFC. Por fim, apresenta-se a inclusão do UPFC em programas de fluxo de potência convencional (não otimizado) e em programas de FPO.

### 3.1 Tipos de Controladores FACTS

Os controladores FACTS estão divididos em quatro categorias principais [33]:

- Controladores série;
- Controladores em paralelo;
- Controladores combinados série-série;
- Controladores combinados série-paralelo.

Os controladores podem ser classificados também em gerações, como segue [33]:

- Na primeira geração estão os equipamentos FACTS utilizando tiristores. Equipamentos que são conectados em paralelo à rede são: i) *Static Var Compensator* (SVC), composto por TCR (*Thyristor Controlled Reactors*), e ii) *Thyristor Switched Compensator* (TSC). Equipamentos que são conectados em série à rede são: i) *Thyristor Switched Series Compensator* (TSSC), e ii) *Thyristor Controlled Series Compensator* (TCSC). Um equipamento que possui as características série e paralelo de forma integrada é o *Phase Shifter*.
-

- A segunda geração é composta por equipamentos que utilizam tiristores tipo IGBT (*Insulated Gate Bipolar Transistor*) ou GTO (*Gate Turn Off Thyristor*). Equipamentos dessa geração são os compensadores estáticos paralelo, STATCOM (*Static Synchronous Shunt Compensator*), e série, SSSC (*Static Synchronous Series Compensator*).
- A terceira geração de equipamentos FACTS é composta pela integração de equipamentos série e paralelo numa mesma linha de transmissão, tal como faz o UPFC.

Pode-se considerar a existência de uma quarta geração de equipamentos FACTS, em que a integração dos equipamentos série e paralelo é feita em linhas diferentes. Isso resulta em equipamentos com os nomes IPFC (*Interline Power Flow Controller*), CSC (*Convertible Static Compensator*) e outras possibilidades.

O UPFC é o resultado de uma combinação do STATCOM com o SSSC. Por isso, para melhor compreensão do princípio de funcionamento do UPFC, o STATCOM e o SSSC serão estudados antes da sua apresentação.

## 3.2 Compensador Estático Paralelo: STATCOM

O STATCOM é um equipamento FACTS usado para o controle de potência reativa. O STATCOM é o equivalente eletrônico do compensador síncrono ideal. Sua principal função é injetar corrente reativa no sistema de potência de forma controlada. Para isso, é necessário que o STATCOM trabalhe como uma fonte de tensão controlada. Pode-se ver, na Figura 3.1 [31], a configuração básica do STATCOM.

O princípio de funcionamento do STATCOM pode ser descrito observando-se o diagrama da Figura 3.2, que representa uma simplificação do STATCOM e do sistema elétrico. No esquema simplificado, o sistema elétrico e o STATCOM são representados, respectivamente, pelas fontes de tensão  $V_S$  e  $V_I$ . A reatância indicada por  $X_L$  representa as reatâncias somadas dos circuitos equivalentes de Thévenin considerando o sistema e o transformador de conexão do STATCOM. Vê-se também na Figura 3.2 o diagrama fasorial das tensões, em que  $\delta$  é o ângulo de defasagem entre as tensões do sistema e do STATCOM.

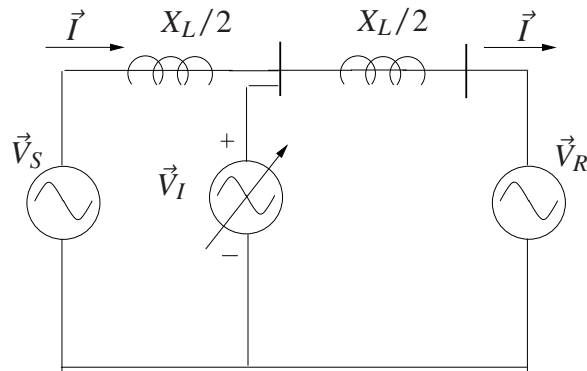


Figura 3.1: Configuração básica do STATCOM.

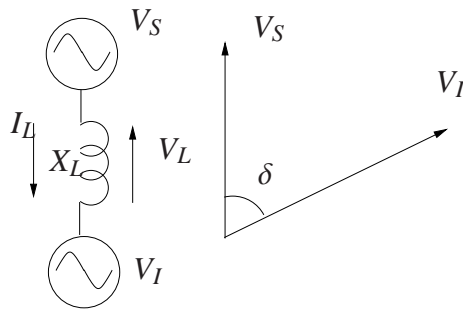


Figura 3.2: Esquema simplificado do STATCOM e diagrama fasorial.

Considerando que a relação  $R_L \ll X_L$  é válida, o fluxo de potência ativa e reativa entre as duas fontes de tensão, em regime permanente, pode ser descrito por:

$$P_S = \frac{V_S V_I}{X_L} \sin \delta \quad (3.1)$$

$$Q_S = \frac{V_S^2}{X_L} - \frac{V_S V_I}{X_L} \cos \delta \quad (3.2)$$

em que

$$\delta \cong \sin^{-1} \left( \frac{X_L P_S}{V_S V_I} \right) \quad \text{e} \quad V_S - V_I \cong \frac{X_L Q_S}{V_S}$$

Um exame dessas relações mostra que o sentido do fluxo de potência  $P_S$  é determinado pela abertura angular  $\delta$  e o fluxo de potência reativa é aproximadamente determinado pela diferença escalar entre as tensões das duas barras. Ou seja, se uma barra 1 tem ângulo de fase adiantado em relação a uma barra 2 e tem-se  $V_1 > V_2$ , então os fluxos de potência ativa e reativa são na direção  $1 \rightarrow 2$ .

Das equações de potência dadas e o diagrama fasorial na Figura 3.2, identificam-se as situações [84]:

- Quando a tensão  $V_I$  está adiantada da tensão  $V_S$  a potência ativa flui do STATCOM para a rede;
- Quando a tensão  $V_I$  está atrasada da tensão  $V_S$ , a potência ativa flui da rede para o STATCOM;
- Quando a tensão  $V_I$  está em fase com a tensão  $V_S$  e  $|V_I| = |V_S|$ , não há fluxo de potência ativa nem reativa;
- Quando a tensão  $V_I$  está em fase com a tensão  $V_S$  e  $|V_I| < |V_S|$ , não há fluxo de potência ativa, enquanto potência reativa indutiva flui da rede para o STATCOM;
- Quando a tensão  $V_I$  está em fase com a tensão  $V_S$  e  $|V_I| > |V_S|$ , não há fluxo de potência ativa, enquanto potência reativa capacitiva flui do STATCOM para a rede.

Nas situações apresentadas, vê-se como o STATCOM opera em relação ao sistema elétrico ao qual está conectado. Analisando esses resultados, verifica-se que, caso as tensões do sistema e do STATCOM estejam sincronizadas e em fase, não há potência ativa em nenhum sentido, porém, se as amplitudes das tensões forem diferentes, observa-se a existência de potência reativa. Desta forma, o STATCOM pode operar como um banco trifásico de indutores variáveis, gerando correntes atrasadas de  $90^\circ$  em relação à tensão do sistema elétrico, ou como um banco de capacitores trifásicos variáveis, gerando correntes adiantadas de  $90^\circ$ , realizando, portanto, o controle contínuo da tensão da rede elétrica.

### 3.3 Compensador Estático Série: SSSC

Um exemplo de equipamento FACTS baseado em um conversor de tensão CC-CA é o SSSC, cujo princípio de funcionamento baseia-se na inserção de uma fonte de tensão em série com a linha de transmissão. A tensão gerada pelo conversor deve estar em quadratura e atrasada em relação à corrente, de forma que apresente a mesma característica de um condensador, proporcionando um efeito capacitivo sobre o sistema elétrico, alterando a impedância da linha de transmissão. A característica indutiva também pode ser sintetizada

---

e pode ser útil nos casos em que se deseja diminuir o fluxo de potência transmitida. Na Figura 3.3 [31] está ilustrada a conexão de um SSSC a uma linha de transmissão.

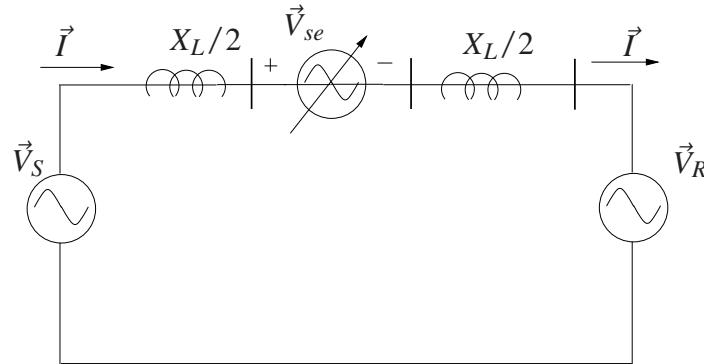


Figura 3.3: Conexão do SSSC na linha de transmissão.

O sistema  $V_S$  representa a fonte CA trifásica (geração), a impedância é representada por  $X_L$  e a carga é representada pelo sistema  $V_R$ . O compensador deve gerar tensões em quadratura, em avanço ou atraso, em relação à corrente da linha, correspondendo, desta forma, a um capacitor ou a um indutor, respectivamente. Para gerar essas tensões, a corrente de linha é medida e o bloco do controlador do SSSC calcula a tensão de compensação. A amplitude dessa tensão está relacionada com o nível de potência reativa que se deseja gerar ou absorver. O SSSC proporciona o controle de fluxo de potência de uma linha de transmissão alterando, de forma eletrônica, a sua impedância.

### 3.4 Controlador Unificado de Fluxo de Potência: UPFC

O equipamento UPFC foi originalmente proposto por Gyugyi [85] em 1992. O UPFC é constituído, basicamente, pelo agrupamento do STATCOM com o SSSC, apresentados anteriormente, formando um único equipamento. Ou seja, o UPFC é formado por dois conversores ligados pelo lado CC, sendo que um deles é ligado em série com a linha de transmissão e o outro, em derivação pelo lado CA [31]. O diagrama esquemático do UPFC pode ser visto na Figura 3.4.

Uma das principais vantagens dessa topologia é que as duas fontes podem operar separadamente, como dois compensadores distintos de potência reativa (um série e o outro em derivação), compensando ainda potência ativa. Além disso, as potências reativas compen-

sadas pelos conversores em derivação e em série podem ser escolhidas independentemente uma da outra, dando assim uma grande flexibilidade no controle do fluxo de potência pela linha.

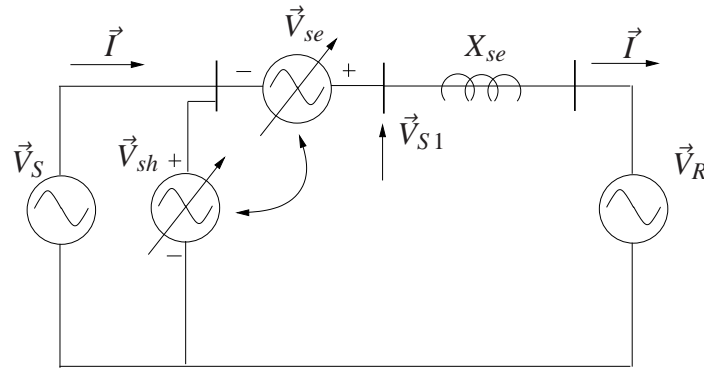


Figura 3.4: Configuração do UPFC.

Tem-se na figura acima que:  $\vec{V}_{se} = m_{se} \vec{V}_S \angle \theta_{se}$ , em que  $0 \leq m_{se} \leq \overline{m_{se}}$  é o fator de escala e  $0 \leq \theta_{se} \leq 2\pi$  é o ângulo da tensão do conversor série; e  $\vec{V}_{sh} = m_{sh} \vec{V}_S \angle \theta_{sh}$ , em que  $0 \leq m_{sh} \leq \overline{m_{sh}}$  é o fator de escala e  $0 \leq \theta_{sh} \leq 2\pi$  é o ângulo da tensão do conversor paralelo. Valores típicos de  $m_{se}$  situam-se entre 0 e 0.5 e de  $m_{sh}$  estão entre 0.9 e 1.1 [35].

O conversor série provê a função principal do UPFC, que é o controle de fluxo de potência ativa e reativa, adicionando uma tensão de magnitude e ângulo controlados ( $\vec{V}_{se}$ ) em série com a linha de transmissão, modificando, assim, a tensão da linha  $\vec{V}_{S1}$  e, conseqüentemente, a corrente de linha  $\vec{I}$ . As potências ativas fornecidas pelo conversor paralelo irão satisfazer a demanda do conversor série e o intercâmbio da potência se dá através do enlace CC entre eles.

O conversor paralelo opera como um compensador de reativos da linha de transmissão, podendo ser usado para controle de tensão da barra à qual está conectado [36, 86, 87].

Em regime-permanente, o UPFC pode ser representado por duas fontes de tensão,  $\vec{V}_{se}$  e  $\vec{V}_{sh}$ , em série com suas respectivas impedâncias  $X_{se}$  e  $X_{sh}$ , em que  $X_{se}$  representa as impedâncias da linha de transmissão e do transformador série combinadas [37]. O modelo do UPFC está ilustrado na Figura 3.5.

O modelo completo do UPFC pode ser desenvolvido a partir dos modelos do conversor série e do conversor paralelo combinados. Para facilitar o entendimento, são vistas as duas representações separadamente.

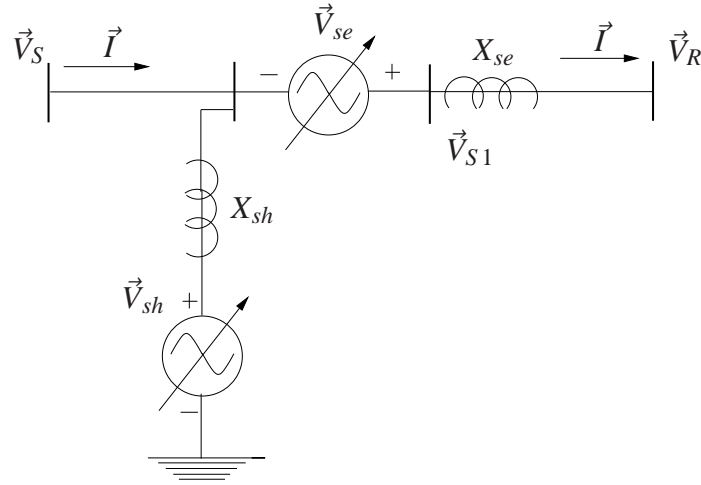


Figura 3.5: Configuração do UPFC com duas fontes de tensão.

### 3.4.1 Modelo do Conversor Série

Suponha que uma fonte de tensão é conectada entre os nós  $S$  e  $R$  de uma linha de transmissão. Essa fonte de tensão pode ser representada por uma fonte ideal  $\vec{V}_{se}$  em série com uma impedância  $X_{se}$  (Figura 3.6). Na figura,  $\vec{V}_{S1}$  é a tensão sobre a reatância  $X_{se}$ , sendo dada por  $\vec{V}_{S1} = \vec{V}_S + \vec{V}_{se}$ .

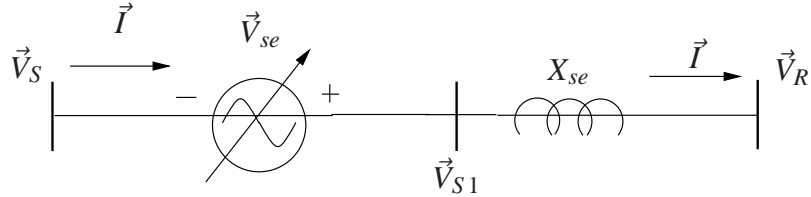


Figura 3.6: Configuração do conversor série.

O modelo do UPFC pode ser obtido pela substituição da fonte de tensão série  $\vec{V}_{se}$  por uma fonte de corrente  $\vec{I}_{se}$  em paralelo com a linha de transmissão [36] (Figura 3.7), sendo  $\vec{I}_{se} = -jb_{se}\vec{V}_{se}$ , com  $b_{se} = 1/X_{se}$ .

As potências injetadas  $\vec{S}_S^{se}$  e  $\vec{S}_R^{se}$  correspondentes a fonte de corrente  $\vec{I}_{se}$  são:

$$\vec{S}_S^{se} = -\vec{V}_S \vec{I}_{se}^* \quad (3.3)$$

$$\vec{S}_R^{se} = \vec{V}_R \vec{I}_{se}^* \quad (3.4)$$

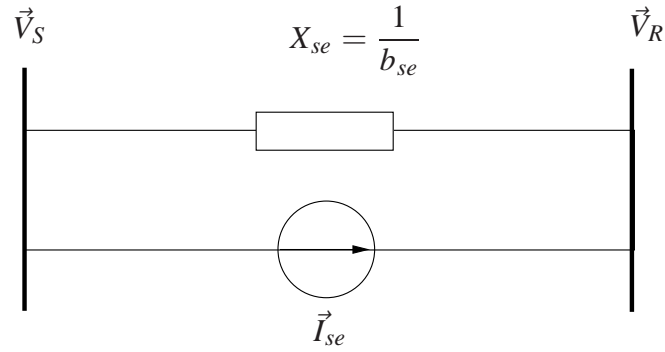


Figura 3.7: Substituição da fonte de tensão por uma fonte de corrente.

A potência complexa em (3.3) injetada no nó  $S$  é calculada por:

$$\begin{aligned}
 \vec{S}_S^{se} &= V_S e^{j\theta_S} (-jm_{se}b_{se}V_S e^{-j\theta_{se}} e^{-j\theta_S}) \\
 &= -jm_{se}b_{se}V_S^2 e^{-j\theta_{se}} \\
 &= -jm_{se}b_{se}V_S^2 (\cos \theta_{se} - j \sin \theta_{se}) \\
 &= -m_{se}b_{se}V_S^2 \sin \theta_{se} - jm_{se}b_{se}V_S^2 \cos \theta_{se}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Tem-se, então, que as potências ativa e reativa são dadas por:

$$P_S^{se} = -m_{se}b_{se}V_S^2 \sin \theta_{se} \tag{3.6}$$

$$Q_S^{se} = -m_{se}b_{se}V_S^2 \cos \theta_{se} \tag{3.7}$$

De forma similar, a potência complexa em (3.4) injetada no nó  $R$  é calculada por:

$$\begin{aligned}
 \vec{S}_R^{se} &= V_R e^{j\theta_R} (jm_{se}b_{se}V_S e^{-j\theta_{se}} e^{-j\theta_S}) \\
 &= jm_{se}b_{se}V_S V_R e^{-j(\theta_{SR} + \theta_{se})} \\
 &= jm_{se}b_{se}V_S V_R [\cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) - j \sin(\theta_{SR} + \theta_{se})] \\
 &= m_{se}b_{se}V_S V_R \sin(\theta_{SR} + \theta_{se}) + jm_{se}b_{se}V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se})
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

em que  $\theta_{SR} = \theta_S - \theta_R$ .

As potências ativa e reativa são:

$$P_R^{se} = m_{se}b_{se}V_S V_R \sin(\theta_{SR} + \theta_{se}) \tag{3.9}$$

$$Q_R^{se} = m_{se}b_{se}V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \tag{3.10}$$



Pelas equações de injeções de potências acima, o conversor série pode ser visto como duas cargas dependentes. O modelo do conversor série está representado na Figura 3.8 [37].

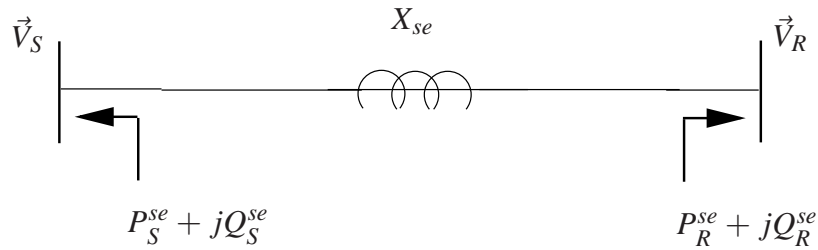


Figura 3.8: Modelo do conversor série.

### 3.4.2 Modelo do Conversor Paralelo

O circuito equivalente do conversor paralelo conectado à barra  $S$  é visto na Figura 3.9 [40]. A corrente que circula pelo conversor paralelo é dada por:

$$\vec{I}_{sh} = -jb_{sh}(\vec{V}_{sh} - \vec{V}_S) \quad (3.11)$$

em que  $b_{sh} = 1/X_{sh}$ .

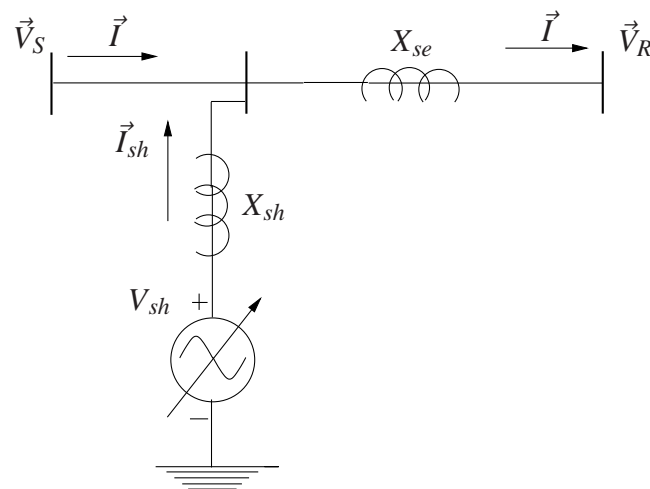


Figura 3.9: Configuração do conversor paralelo.

A potência complexa injetada no nó  $S$  é calculada por [40]:

$$\begin{aligned}
 \vec{S}_S^{sh} &= \vec{V}_S \vec{I}_{sh}^* \\
 &= V_S e^{j\theta_S} [j b_{sh} (m_{sh} V_S e^{-j\theta_{sh}} e^{-j\theta_S} - V_S e^{-j\theta_S})] \\
 &= j m_{sh} b_{sh} V_S^2 e^{-j\theta_{sh}} - j b_{sh} V_S^2 \\
 &= j m_{sh} b_{sh} V_S^2 (\cos \theta_{sh} - j \sin \theta_{sh}) - j b_{sh} V_S^2 \\
 &= m_{sh} b_{sh} V_S^2 \sin \theta_{sh} + j b_{sh} (m_{sh} V_S^2 \cos \theta_{sh} - V_S^2)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Tem-se, então, que as injeções de potências ativa e reativa são dadas por:

$$P_S^{sh} = m_{sh} b_{sh} V_S^2 \sin \theta_{sh} \tag{3.13}$$

$$Q_S^{sh} = b_{sh} (m_{sh} V_S^2 \cos \theta_{sh} - V_S^2) \tag{3.14}$$

Pelas equações de injeções de potências acima, o conversor paralelo pode ser visto como uma carga conectada no fim do trecho. O modelo do conversor paralelo está representado na Figura 3.10 [37].

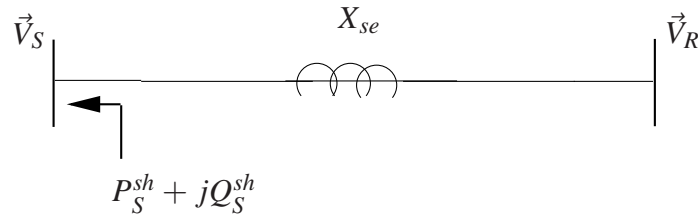


Figura 3.10: Modelo do conversor paralelo.

No UPFC, o conversor paralelo tem a função principal de fornecer a potência ativa demandada pelo conversor série, sendo esse intercâmbio da potência feito pelo enlace CC. Desta forma:

$$P_{\text{serie}} = -P_S^{sh} \tag{3.15}$$

A igualdade (3.15) é válida quando as perdas entre os conversores são desprezadas. De acordo com a Figura 3.6, a corrente no ramo série é:

$$\begin{aligned}
 \vec{I}_{SR} &= -j b_{se} (\vec{V}_{S1} - \vec{V}_R) \\
 &= -j b_{se} [(\vec{V}_S + \vec{V}_{se}) - \vec{V}_R]
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

A potência complexa suprida pelo conversor série é calculada por:

$$\begin{aligned}
 \vec{S}_{\text{serie}} &= \vec{V}_{se} \vec{I}_{SR}^* \\
 &= m_{se} V_S e^{j\theta_{se}} e^{j\theta_S} [j b_{se} (V_S e^{-j\theta_S} + m_{se} V_S e^{-j\theta_{se}} e^{-j\theta_S} - V_R e^{-j\theta_R})] \\
 &= -m_{se} b_{se} [V_S^2 \text{sen } \theta_{se} - V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se})] \\
 &\quad + j [m_{se}^2 b_{se} V_S^2 + m_{se} b_{se} V_S^2 \cos \theta_{se} - m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se})]
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Assim, as potências ativa e reativa supridas pelo conversor série são:

$$P_{\text{serie}} = -m_{se} b_{se} [V_S^2 \text{sen } \theta_{se} - V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se})] \tag{3.18}$$

$$Q_{\text{serie}} = m_{se}^2 b_{se} V_S^2 + m_{se} b_{se} V_S^2 \cos \theta_{se} - m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \tag{3.19}$$

### 3.4.3 Modelo Completo do UPFC

O modelo completo de injeção de potência do UPFC é formado somando-se as parcelas de potência do conversor série e do conversor paralelo, ou seja [40]:

$$\begin{aligned}
 P_S^{\text{UPFC}} &= P_S^{se} + P_S^{sh} \\
 &= P_S^{se} - P_{\text{serie}} \\
 &= -m_{se} b_{se} V_S^2 \text{sen } \theta_{se} - (-m_{se} b_{se} [V_S^2 \text{sen } \theta_{se} - V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se})]) \\
 &= -m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se})
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 Q_S^{\text{UPFC}} &= Q_S^{se} + Q_S^{sh} \\
 &= -m_{se} b_{se} V_S^2 \cos \theta_{se} - b_{sh} V_S^2 (1 - m_{sh} \cos \theta_{sh})
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 P_R^{\text{UPFC}} &= P_R^{se} \\
 &= m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se})
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
 Q_R^{\text{UPFC}} &= Q_R^{se} \\
 &= m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se})
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

em que  $P_S^{\text{UPFC}}$  e  $Q_S^{\text{UPFC}}$  são as potências ativa e reativa injetadas pelo UPFC na barra  $S$  e  $P_R^{\text{UPFC}}$  e  $Q_R^{\text{UPFC}}$  são as potências ativa e reativa injetadas pelo UPFC na barra  $R$ .

O modelo completo do UPFC pode ser visto na Figura 3.11.

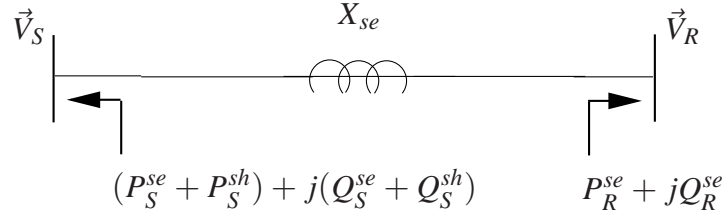


Figura 3.11: Modelo completo do UPFC.

## 3.5 Inclusão do UPFC no Cálculo de Fluxo de Potência

Para incorporar o UPFC em um programa de fluxo de potência convencional são necessárias algumas modificações em sua formulação e no algoritmo de solução tradicional (Newton completo, métodos desacoplados, etc). Nesta seção, são analisadas as alterações necessárias em um algoritmo de solução de fluxo de potência para incorporação do UPFC. A partir dessas alterações, pode-se verificar de que maneira o UPFC impacta também nas formulações de FPO, uma vez que as equações básicas de fluxo de potência compõem o problema de FPO.

### 3.5.1 Equações de Fluxo de Potência sem UPFC

Conforme apresentado no Capítulo 2, as injeções de potência ativa e reativa em uma barra  $i$  são dadas por:

$$P_i(V, \theta) = V_i \sum_{j \in \mathcal{I}} V_j (G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)) \quad (3.24)$$

$$Q_i(V, \theta) = V_i \sum_{j \in \mathcal{I}} V_j (G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)) \quad (3.25)$$

em que  $V_i$  e  $\theta_i$  são, respectivamente, a magnitude e o ângulo de fase da tensão complexa  $\vec{V}_i = V_i e^{j\theta_i}$ ,  $G_{ij}$  é o elemento  $ij$  da matriz condutância de barra  $G$ , e  $B_{ij}$  é o elemento  $ij$  da

matriz susceptância de barra  $B$ .

O problema de fluxo de potência é o de calcular as magnitudes das tensões  $V$  e os ângulos de fase  $\theta$  tais que as potências calculadas em (3.24) e (3.25), para  $i = 1, 2, \dots, n$ , satisfaçam o balanço de potências nas barras:

$$\begin{aligned} P_i(V, \theta) &= P_{G_i} - P_{D_i} = P_i^{\text{def}} \\ Q_i(V, \theta) &= Q_{G_i} - Q_{D_i} = Q_i^{\text{def}} \end{aligned}$$

em que  $P_{G_i}$  e  $Q_{G_i}$  são potências geradas e  $P_{D_i}$  e  $Q_{D_i}$  são potências de cargas (demandas). Para um sistema CA simples, é necessário resolver o conjunto de equações não lineares de balanço de potência ativa:

$$P_i^{\text{def}} - V_i \sum_{j \in \mathcal{I}} V_j (G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)) = 0 \quad (3.26)$$

para as barras tipo PQ e PV, e o conjunto de equações de balanço de potência reativa:

$$Q_i^{\text{def}} - V_i \sum_{j \in \mathcal{I}} V_j (G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)) = 0 \quad (3.27)$$

para as barras tipo PQ, em que  $P_i^{\text{def}}$  e  $Q_i^{\text{def}}$  são os valores especificados de injeções de potência ativa e reativa, respectivamente, para a barra  $i$ .

Há um segundo conjunto de equações que deve ser avaliado por aplicação direta das tensões e dos ângulos calculados:

$$Q_i = V_i \sum_{j \in \mathcal{I}} V_j (G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)) \quad (3.28)$$

para as barras tipo  $V\theta$  e PV, e

$$P_1 = V_1 \sum_{j \in \mathcal{I}} V_j (G_{1j} \cos(\theta_1 - \theta_j) + B_{1j} \sin(\theta_1 - \theta_j)) \quad (3.29)$$

a potência ativa injetada na barra de referência, considerada aqui, sem perda de generalidade, como sendo a barra 1. As potências reativas calculadas em (3.28) são comparadas aos limites de operação que são impostos. Se o limite de potência reativa em uma barra

tipo PV estiver sendo violado, essa barra passa a ser considerada como uma barra tipo PQ, com o valor de potência reativa especificado sendo o do limite violado.

### 3.5.2 Solução pelo Método de Newton-Raphson

No problema de fluxo de potência, desejamos resolver as equações não-lineares (3.26) e (3.27) para as magnitudes das tensões das barras PQ e para os ângulos de fase das barras PQ e PV. Esse problema consiste em determinar as raízes das equações não-lineares:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{\text{def}} \\ Q^{\text{def}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P(V, \theta) \\ Q(V, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Na iteração  $k$ , o método de Newton-Raphson requer a solução do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} H(V_k, \theta_k) & N(V_k, \theta_k) \\ M(V_k, \theta_k) & L(V_k, \theta_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_k \\ \Delta V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P(V_k, \theta_k) \\ \Delta Q(V_k, \theta_k) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

em que:

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = \begin{cases} V_i V_j (G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)) & \text{se } i \neq j \\ -Q_i - (V_i)^2 B_{ii} & \text{se } i = j \end{cases} \quad (3.32)$$

$$N_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial V_j} = \begin{cases} V_i (G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)) & \text{se } i \neq j \\ P_i / V_i + V_i G_{ii} & \text{se } i = j \end{cases} \quad (3.33)$$

$$M_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} = \begin{cases} -V_i V_j (G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)) & \text{se } i \neq j \\ P_i - (V_i)^2 G_{ii} & \text{se } i = j \end{cases} \quad (3.34)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = \begin{cases} V_i (G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)) & \text{se } i \neq j \\ Q_i / V_i - V_i B_{ii} & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (3.35)$$

1. Faça uma escolha inicial das magnitudes e dos ângulos de fase das tensões de barra (tipicamente,  $V_i^0 = 1$  e  $\theta_i^0 = 0$ .)
2. Calcule os resíduos de potência ativa nas barras PQ e PV, e reativa nas barras PQ:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_k \\ \Delta Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{\text{def}} \\ Q^{\text{def}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P(V_k, \theta_k) \\ Q(V_k, \theta_k) \end{bmatrix}$$

Pare o processo iterativo se  $\|\Delta P(V_k, \theta_k)\|_\infty \leq \epsilon$  e  $\|\Delta Q(V_k, \theta_k)\|_\infty \leq \epsilon$

3. Forme o sistema linear

$$\begin{bmatrix} H(V_k, \theta_k) & N(V_k, \theta_k) \\ M(V_k, \theta_k) & L(V_k, \theta_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_k \\ \Delta V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P(V_k, \theta_k) \\ \Delta Q(V_k, \theta_k) \end{bmatrix}$$

e resolva para as correções  $\Delta \theta_k$  e  $\Delta V_k$ .

4. Obtenha uma nova estimativa para a solução como

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta \theta_k$$

$$V_{k+1} = V_k + \Delta V_k.$$

Faça  $k \leftarrow k + 1$  e retorne para o passo 2.

Algoritmo 3.1: Cálculo de fluxo de potência pelo método de Newton.

### 3.5.3 Equações de Fluxo de Potência com UPFC

O UPFC pode ser facilmente incorporado na formulação de fluxo de potência efetuando-se as seguintes modificações nas equações de balanço de potência das barras terminais do UPFC [36,37]:

$$\Delta P_S(V, \theta) = P_{G_S} - P_{D_S} + P_S^{\text{UPFC}}(V, \theta) - P_S(V, \theta) \quad (3.36)$$

$$\Delta Q_S(V, \theta) = Q_{G_S} - Q_{D_S} + Q_S^{\text{UPFC}}(V, \theta) - Q_S(V, \theta) \quad (3.37)$$

$$\Delta P_R(V, \theta) = P_{G_R} - P_{D_R} + P_R^{\text{UPFC}}(V, \theta) - P_R(V, \theta) \quad (3.38)$$

$$\Delta Q_R(V, \theta) = Q_{G_R} - Q_{D_R} + Q_R^{\text{UPFC}}(V, \theta) - Q_R(V, \theta) \quad (3.39)$$

em que  $P_S^{\text{UPFC}}$ ,  $Q_S^{\text{UPFC}}$ ,  $P_R^{\text{UPFC}}$  e  $Q_R^{\text{UPFC}}$  denotam as injeções de potências ativas e reativas pelo UPFC nas suas barras terminais, as quais são calculadas pelas expressões (3.20) a (3.23).

Como as injeções de potências pelo UPFC são funções apenas das tensões e ângulos das suas barras terminais, apenas quatro elementos das submatrizes da Jacobiana das equações de balanço de potência são afetados pela inclusão do UPFC, a saber [36]:

Na submatriz  $H(V, \theta)$ :

$$\begin{aligned} H_{SS} &= H_{SS}^0 - Q_R^{\text{UPFC}} \\ H_{SR} &= H_{SR}^0 + Q_R^{\text{UPFC}} \\ H_{RS} &= H_{RS}^0 + Q_R^{\text{UPFC}} \\ H_{RR} &= H_{RR}^0 - Q_R^{\text{UPFC}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Na submatriz  $N(V, \theta)$ :

$$\begin{aligned} N_{SS} &= N_{SS}^0 + P_S^{\text{UPFC}} / V_S \\ N_{SR} &= N_{SR}^0 + P_S^{\text{UPFC}} / V_R \\ N_{RS} &= N_{RS}^0 + P_R^{\text{UPFC}} / V_S \\ N_{RR} &= N_{RR}^0 + P_R^{\text{UPFC}} / V_R \end{aligned} \quad (3.41)$$

Na submatriz  $M(V, \theta)$ :

$$\begin{aligned} M_{SS} &= M_{SS}^0 \\ M_{SR} &= M_{SR}^0 \\ M_{RS} &= M_{RS}^0 - P_R^{\text{UPFC}} \\ M_{RR} &= M_{RR}^0 + P_R^{\text{UPFC}} \end{aligned} \quad (3.42)$$



Na submatriz  $L(V, \theta)$ :

$$\begin{aligned}
 L_{SS} &= L_{SS}^0 + 2Q_S \text{UPFC} / V_S \\
 L_{SR} &= L_{SR}^0 \\
 L_{RS} &= L_{RS}^0 + Q_R \text{UPFC} / V_S \\
 L_{RR} &= L_{RR}^0 + Q_R \text{UPFC} / V_R
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

O sobrescrito  $^0$  denota o elemento da matriz sem a presença do UPFC [36]. Além dos ajustes nas equações de balanço de potência, (3.36) a (3.39), e nos elementos da Jacobiana, (3.40) a (3.43), deve-se observar também que na montagem da matriz admitância de barra  $\vec{Y}$  a admitância de ramo  $\vec{Y}_{SR}$  deve ser a soma da admitância da linha de transmissão com a admitância do conversor série.

### 3.6 Fluxo de Potência Ótimo com UPFC

O controle do fluxo de potência na rede e da tensão nas barras onde o UPFC está conectado é feito mediante ajuste dos parâmetros  $m_{se}$ ,  $m_{sh}$ ,  $\theta_{se}$  e  $\theta_{sh}$ . Para incorporar o UPFC em um programa de FPO e efetuar esses ajustes de forma automática, é necessário efetuar algumas modificações na formulação original (sem UPFC).

As equações de balanço de potência fazem parte do conjunto de restrições de igualdade do problema de otimização. Nas barras com UPFC, essas equações são modificadas, como visto na seção 3.5.3:

$$\Delta P_S = P_{G_S} - P_{D_S} - P_S - m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \tag{3.44a}$$

$$\Delta Q_S = Q_{G_S} - Q_{D_S} - Q_S - m_{se} b_{se} V_S^2 \cos \theta_{se} - b_{sh} V_S^2 (1 - m_{sh} \cos \theta_{sh}) \tag{3.44b}$$

$$\Delta P_R = P_{G_R} - P_{D_R} - P_R + m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \tag{3.44c}$$

$$\Delta Q_R = Q_{G_R} - Q_{D_R} - Q_R + m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \tag{3.44d}$$

Supondo que as perdas entre os conversores série e paralelo são nulas, e respeitando o intercâmbio de potência entre eles pelo enlace CC, dado pela equação (3.15), a seguinte

restrição de igualdade deve ser adicionada à formulação:

$$\Delta P_E = m_{sh} b_{sh} V_S^2 \text{sen } \theta_{sh} - m_{se} b_{se} [V_S^2 \text{sen } \theta_{se} - V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se})] \quad (3.45)$$

Os seguintes limites de ajustes dos parâmetros do UPFC devem ser adicionados:

$$m_{se}^{\min} \leq m_{se} \leq m_{se}^{\max}, \quad (3.46a)$$

$$m_{sh}^{\min} \leq m_{sh} \leq m_{sh}^{\max}, \quad (3.46b)$$

$$\theta_{se}^{\min} \leq \theta_{se} \leq \theta_{se}^{\max}, \quad (3.46c)$$

$$\theta_{sh}^{\min} \leq \theta_{sh} \leq \theta_{sh}^{\max}. \quad (3.46d)$$

Em resumo, a incorporação do UPFC em um programa de FPO dá-se mediante a adição de quatro variáveis de controle ( $m_{se}$ ,  $m_{sh}$ ,  $\theta_{se}$  e  $\theta_{sh}$ ), pela adição da restrição de igualdade (3.45) à formulação e pela modificação das restrições de balanço de potência (3.44) nas barras com UPFC. O problema de FPO com restrições que levam em conta a presença do UPFC na rede elétrica pode ser escrito genericamente da seguinte forma:

Minimize  $f(x)$

sujeito a

$$\begin{aligned}
P_i(V, \theta, t) + P_{D_i}(V_i) - P_{G_i} &= 0, & \text{para } i \in \mathcal{N} \text{ e } i \notin \mathcal{U} \\
Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} &= 0, & \text{para } i \in \mathcal{G} \\
Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} &= 0, & \text{para } i \in \mathcal{F} \\
Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} - b_i^{sh} V_i^2 &= 0, & \text{para } i \in \mathcal{C} \\
P_i(V, \theta, t) + P_{D_i}(V_i) - P_{G_i} - P_i^{\text{UPFC}}(V, \theta) &= 0, & \text{para } i \in \mathcal{U} \\
Q_i(V, \theta, t) + Q_{D_i}(V_i) - Q_{G_i} - Q_i^{\text{UPFC}}(V, \theta) &= 0, & \text{para } i \in \mathcal{U} \\
P_{serie_i} + P_{S_i}^{sh} &= 0, & \text{para } i \in \mathcal{U} \\
F_{ij}(V, \theta, t) - F_{ij} &= 0, & \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B} \\
u_i^T J_{PF}(V, \theta) w_i - \sigma_i &= 0, \\
V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max}, & \text{para } i \in \mathcal{N} \\
t_{ij}^{\min} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{\max}, & \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{T} \\
P_i^{\min} \leq P_{G_i} \leq P_i^{\max}, & \text{para } i \in \mathcal{G} \\
Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, & \text{para } i \in \mathcal{G} \\
b_i^{\min} \leq b_i^{sh} \leq b_i^{\max}, & \text{para } i \in \mathcal{C} \\
F_{ij}^{\min} \leq F_{ij} \leq F_{ij}^{\max}, & \{(i, j)\} \subseteq \mathcal{B} \\
\sigma_i^{\min} \leq \sigma_i \leq \sigma_i^{\max} \\
m_{se_i}^{\min} \leq m_{se_i} \leq m_{se_i}^{\max}, & \text{para } i \in \mathcal{U} \\
m_{sh_i}^{\min} \leq m_{sh_i} \leq m_{sh_i}^{\max}, & \text{para } i \in \mathcal{U} \\
\theta_{se_i}^{\max} \leq \theta_{se_i} \leq \theta_{se_i}^{\min}, & \text{para } i \in \mathcal{U} \\
\theta_{sh_i}^{\min} \leq \theta_{sh_i} \leq \theta_{sh_i}^{\max}, & \text{para } i \in \mathcal{U}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

A incorporação das variáveis de controle  $m_{se}$ ,  $m_{sh}$ ,  $\theta_{se}$  e  $\theta_{sh}$  na formulação acarreta a adição dessas variáveis nas matrizes Jacobiana e Hessiana das restrições. As derivadas primeiras e segundas das restrições em relação a essas novas variáveis encontram-se no Anexo A .

### 3.7 Resultados Numéricos

Para avaliar a inclusão do UPFC na rede elétrica, simulou-se um UPFC fictício inserido entre as barras 1 e 2 do sistema IEEE de 57 barras.

Os parâmetros do UPFC utilizados nas simulações foram escolhidos empiricamente,

sendo:  $m_{se} = 0.5$ ,  $m_{sh} = 0.1$ ,  $\theta_{se} = -\pi/6$ ,  $\theta_{sh} = -\pi/4$ ,  $R_{se} = 0.01$  p.u.,  $R_{sh} = 0.01$  p.u.,  $X_{se} = 10$  p.u., e  $X_{sh} = 10$  p.u. Após a otimização, os resultados obtidos foram:  $m_{se} = 0.36$ ,  $m_{sh} = 0.21$ ,  $\theta_{se} = -0.13$ ,  $\theta_{sh} = -0.29$ . Os resultados obtidos antes e depois da otimização são apresentados nas Figuras 3.12 e 3.13. Na figura 3.12, apresenta-se a diminuição da potência na barra de folga e na Figura 3.13 é ilustrado o perfil de tensão do sistema antes e depois da otimização.

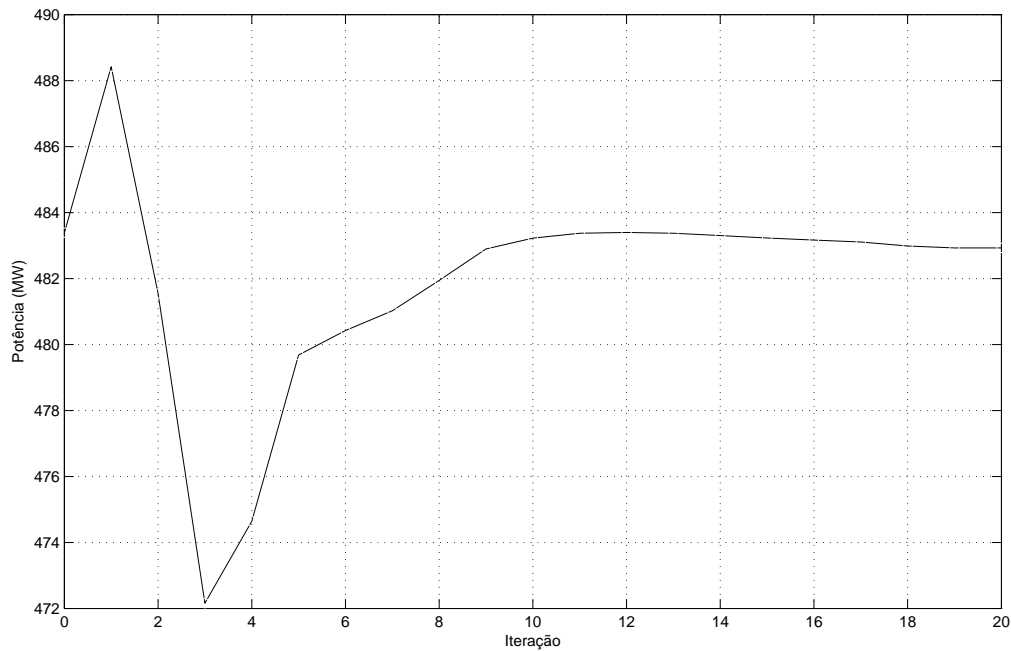


Figura 3.12: Potência na barra de folga.

Os resultados apresentados demonstram o efeito esperado do UPFC na rede elétrica. A sua no sistema provocou uma melhora no perfil de tensão, aumentando a tensão nas barras com nível mais baixo e mantendo os níveis de todas as barras em torno de um valor médio. Além disso, associa-se a esse efeito a diminuição da potência gerada na barra de folga, possibilitando um ganho de potência.

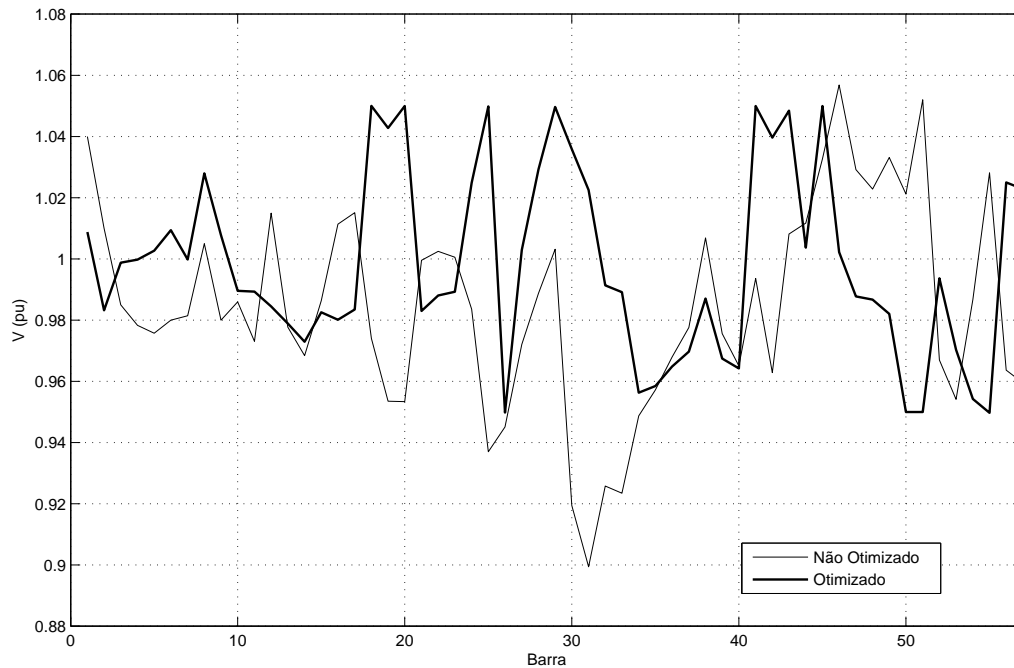


Figura 3.13: Perfil de tensão.

## 3.8 Considerações Finais

Neste capítulo, foi apresentada uma visão geral sobre dispositivos FACTS, com uma análise mais detalhada dos dispositivos STATCOM e SSSC com o objetivo de facilitar a compreensão do funcionamento do UPFC. O modelo matemático do UPFC foi apresentado detalhadamente e, a partir do estudo da solução de fluxo de potência pelo método de Newton-Raphson, sua inclusão em um programa de fluxo de potência não otimizado foi claramente definida. Por fim, foi estudada a introdução do UPFC em programas de FPO.

A adição de quatro variáveis de controle e de uma restrição de igualdade por UPFC à formulação de FPO implica aumentar quatro colunas e uma linha na matriz Jacobiana das funções de restrições e vinte e uma linhas e colunas na matriz de coeficientes do sistema linear a ser resolvido nas iterações de PI, por UPFC incorporado. Isso não deve, entretanto, causar um aumento considerável no tempo de iteração de programa devido ao pequeno número de equipamentos instalados por sistema.

No próximo capítulo, são apresentados os dois métodos de pontos-interiores para PNL (primal-dual simples e preditor-corretor) a partir dos quais são desenvolvidas as versões para PQ utilizadas na resolução dos subproblemas de região de confiança. Além de base para o desenvolvimento dos algoritmos de PI para PQ, os algoritmos de PI para PNL são utilizados como referências nas comparações dos resultados obtidos pela técnica de otimização proposta.

---

# Capítulo 4

---

## Métodos de Pontos-Interiores para Programação Não-Linear

---

**H**Á uma grande variedade de métodos de otimização para a solução de problemas restritos como o FPO formulado em (2.1) (ver [9, 88, 89]). No que se refere à resolução de problemas de FPO, ultimamente tem-se utilizado uma classe de métodos chamados de métodos de Pontos-Interiores (PI). Este capítulo descreve dois algoritmos de PI de grande sucesso computacional na solução de problemas de FPO: o método primal-dual simples e a variante primal-dual preditor-corretor.

O texto apresentado no presente capítulo segue a referência [74] e os textos de relatórios de pesquisa produzidos no Laboratório de Otimização Aplicada a Sistemas de Potência da Universidade Federal de Pernambuco, onde esta tese foi desenvolvida.

Para o desenvolvimento dos algoritmos de PI, consideramos inicialmente o problema de otimização expresso na forma (2.1), o qual é reescrito abaixo por conveniência de apresentação:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & g(x) = 0 \\ & \underline{x}_l \leq \widehat{I}x \leq \bar{x}_l \end{aligned}$$

em que  $\widehat{I}$  é uma matriz  $p \times n$  contendo  $p$  linhas da matriz identidade  $n \times n$ , cujo produto pelo vetor  $x$  resulta no vetor das variáveis sujeitas a limites, ou seja,  $\widehat{I}x = x_l$ .

## 4.1 O Método Primal-Dual de Pontos-Interiores

O método primal-dual de PI para resolver o problema (2.1) opera sobre um problema modificado que emerge quando transformamos todas as restrições de desigualdades em igualdades, adicionando os vetores de variáveis de folga  $s \geq 0$  e  $z \geq 0$ , como segue:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & g(x) = 0 \\ & \underline{x}_l + s - \widehat{I}x = 0, \quad s \geq 0, \\ & \widehat{I}x + z - \bar{x}_l = 0, \quad z \geq 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

As condições de não-negatividade  $s \geq 0$  e  $z \geq 0$  em (4.1) são incorporadas em uma função de barreira logarítmica que é agregada à função objetivo, resultando no problema modificado:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x) - \mu_k \sum_{i=1}^p (\ln s_i + \ln z_i) \\ \text{sujeito a} \quad & g(x) = 0, \\ & \underline{x}_l + s - \widehat{I}x = 0, \quad s > 0, \\ & \widehat{I}x + z - \bar{x}_l = 0, \quad z > 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$



em que  $\mu_k > 0$  é o parâmetro de barreira, que é monotonicamente reduzido para zero quando as iterações avançam, ou seja,  $\mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_k > \dots > \mu_\infty = 0$ .

As condições de positividade estrita  $s > 0$  e  $z > 0$  devem ser impostas para que os termos logarítmicos sejam definidos. Entretanto, essas condições são tratadas implicitamente, pelo controle do tamanho do passo, conforme é descrito abaixo.

As condições necessárias de otimalidade para o problema modificado (4.2), com o parâmetro de barreira  $\mu_k$  fixo, podem ser derivadas a partir da função de Lagrange,  $L(y; \mu_k)$ , associada ao problema (4.2), definida como:

$$L(y; \mu_k) = f(x) - \mu_k \sum_{i=1}^p (\ln s_i + \ln z_i) + \lambda^T g(x) + \pi^T (\underline{x}_l + s - \widehat{I}x) + \nu^T (\widehat{I}x + z - \bar{x}_l) \quad (4.3)$$

em que  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ,  $\pi \in \mathbb{R}_+^p$  e  $\nu \in \mathbb{R}_+^p$  são vetores de multiplicadores de Lagrange, conhecidos como variáveis duais, e  $y = (s, z, \pi, \nu, \lambda, x)$  é o vetor com todas as variáveis.

Um mínimo local de (4.2) é caracterizado por um ponto estacionário da função de Lagrange, o qual deve satisfazer as condições necessárias de primeira-ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

$$\nabla_s L = \pi - \mu_k S^{-1} e = 0, \quad (4.4a)$$

$$\nabla_z L = \nu - \mu_k Z^{-1} e = 0, \quad (4.4b)$$

$$\nabla_\pi L = \underline{x}_l + s - \widehat{I}x = 0, \quad (4.4c)$$

$$\nabla_\nu L = \widehat{I}x + z - \bar{x}_l = 0, \quad (4.4d)$$

$$\nabla_\lambda L = g(x) = 0, \quad (4.4e)$$

$$\nabla_x L = \nabla f(x) + \nabla g(x) \lambda - \widehat{I}^T \pi + \widehat{I}^T \nu = 0, \quad (4.4f)$$

em que  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ .

O sistema de equações (4.4) é mais convenientemente expresso como:

$$S\pi - \mu_k e = 0, \quad (4.5a)$$

$$Zv - \mu_k e = 0, \quad (4.5b)$$

$$\underline{x}_l + s - \widehat{I}x = 0, \quad (4.5c)$$

$$\widehat{I}x + z - \bar{x}_l = 0, \quad (4.5d)$$

$$g(x) = 0, \quad (4.5e)$$

$$\nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda - \widehat{I}^T \pi + \widehat{I}^T v = 0. \quad (4.5f)$$

Uma iteração do método primal-dual de PI para resolver (2.1) invariavelmente aplica apenas uma iteração do método de Newton para achar raízes de equações sobre (4.5), calcula um comprimento de passo na direção de Newton, atualiza as variáveis e reduz o parâmetro de barreira  $\mu_k$ . O processo iterativo termina quando a inviabilidade primal, a inviabilidade dual e o resíduo de complementaridade estão abaixo de tolerâncias pré-determinadas. Os passos principais do algoritmo primal-dual de PI são como segue:

1. Faça  $k = 0$ , escolha  $\mu_0 > 0$  e um ponto inicial  $y_0$  que satisfaça as condições de estrita positividade  $(s_0, z_0, \pi_0, v_0) > 0$ .

2. Obtenha o sistema de Newton para (4.5) no ponto corrente,

$$\nabla_{yy}^2 L(y_k; \mu_k) \Delta y = -\nabla_y L(y_k; \mu_k),$$

e resolva para a direção de Newton  $\Delta y$ .

3. Calcule o comprimento de passo  $\alpha_k$  na direção de Newton  $\Delta y$  e obtenha uma nova estimativa da solução como  $y_{k+1} = y_k + \alpha_k \Delta y$ .

4. Se  $y_{k+1}$  satisfaz o critério de convergência, então FIM. Caso contrário, faça  $k \leftarrow k + 1$ , reduza o parâmetro  $\mu_k$ , e retorne para o passo 2.

Algoritmo 4.1: Método primal-dual de PI para resolver (2.1).

### 4.1.1 Cálculo das Direções de Busca

Embora o sistema das condições de KKT (4.5) seja não-linear, sua solução é usualmente aproximada por uma única iteração do método de Newton para achar raízes de equações

(a direção de Newton é apenas um meio para seguir o caminho de minimizadores  $x(\mu_k)$  parametrizado por  $\mu_k$ ). Quando tomamos os termos de primeira-ordem na aproximação em série de Taylor do sistema de equações não-lineares (4.5) em torno do ponto  $y_k$ , obtemos o seguinte sistema linear indefinido:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & Z & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\widehat{I} \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & \widehat{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla g(x)^T \\ 0 & 0 & -\widehat{I}^T & \widehat{I}^T & \nabla g(x) & \nabla_{xx}^2 L(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta z \\ \Delta \pi \\ \Delta v \\ \Delta \lambda \\ \Delta x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S\pi - \mu_k e \\ Zv - \mu_k e \\ \underline{x}_l + s - \widehat{I}x \\ \widehat{I}x + z - \bar{x}_l \\ g(x) \\ \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda - \widehat{I}^T \pi + \widehat{I}^T v \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

em que  $\Pi = \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_p)$ ,  $Y = \text{diag}(v_1, \dots, v_p)$ , e  $\nabla_{xx}^2 L(y)$  é a Hessiana da função de Lagrange definida a seguir. No sistema acima omitimos o contador de iterações  $k$  para simplificar a apresentação.

A avaliação da Hessiana da função de Lagrange com relação às variáveis  $x$ ,  $\nabla_{xx}^2 L(y)$ , envolve uma combinação da Hessiana da função objetivo  $\nabla^2 f(x)$  com as Hessianas das funções de restrições  $\nabla^2 g_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , da seguinte forma:

$$\nabla_{xx}^2 L(y) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 g_i(x). \quad (4.7)$$

### 4.1.2 Atualização das Variáveis

Novas estimativas para as variáveis primais e duais são calculadas por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \alpha_k^P \Delta x, \\ s_{k+1} &= s_k + \alpha_k^P \Delta s, \\ z_{k+1} &= z_k + \alpha_k^P \Delta z, \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k + \alpha_k^D \Delta \lambda, \\ \pi_{k+1} &= \pi_k + \alpha_k^D \Delta \pi, \\ v_{k+1} &= v_k + \alpha_k^D \Delta v, \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que  $\alpha_k^P \in (0, 1]$  e  $\alpha_k^D \in (0, 1]$  são os comprimentos de passos primal e dual, respectivamente.

Os comprimentos de passos máximos que podem ser tomados na direção de Newton são geralmente determinados pelos testes:

$$\alpha_k^P = \min \left\{ 1, \gamma \min_i \left\{ \frac{-s_i^k}{|\Delta s_i|} |\Delta s_i| < 0, \frac{-z_i^k}{|\Delta z_i|} |\Delta z_i| < 0 \right\} \right\}, \quad (4.9a)$$

$$\alpha_k^D = \min \left\{ 1, \gamma \min_i \left\{ \frac{-\pi_i^k}{|\Delta \pi_i|} |\Delta \pi_i| < 0, \frac{-v_i^k}{|\Delta v_i|} |\Delta v_i| < 0 \right\} \right\}. \quad (4.9b)$$

O escalar  $\gamma \in (0, 1)$  é um fator de segurança para assegurar que o próximo ponto satisfará as condições de estrita positividade; um valor típico é  $\gamma = 0.99995$ .

O uso de comprimentos de passos distintos nos espaços primal e dual é uma vantagem do método primal-dual de pontos interiores, e tem provado na prática ser altamente eficaz, reduzindo o número de iterações para convergência entre 10% a 20% em um problema típico. Entretanto, em programação não-linear, a interdependência de variáveis primais e duais, presente na condição de viabilidade dual (4.5e), não permite rigorosamente o uso de comprimentos de passos distintos nos espaços primal e dual. Assim, um comprimento de passo comum para atualizar as variáveis primais e duais deve ser calculado por:

$$\alpha_k^P = \alpha_k^D \leftarrow \min \{ \alpha_k^P, \alpha_k^D \}. \quad (4.10)$$

Embora haja o acoplamento mencionado entre as variáveis primais e duais, na prática, o uso de um comprimento de passo comum ou o uso de comprimentos de passos distintos têm ambos desempenhado bem.

### 4.1.3 Redução do Parâmetro de Barreira

O esquema para reduzir  $\mu_k$  que é descrito aqui é uma extensão de esquemas que são utilizados com sucesso em programação linear e programação quadrática [90]. Na  $k$ -ésima iteração, o resíduo das condições de complementaridade, chamado de resíduo de complementaridade, é obtido por:

$$\rho_k = s_k^T \pi_k + z_k^T v_k. \quad (4.11)$$

Se as iterações convergem para uma solução ótima, então  $\rho_k \rightarrow 0$ . O relacionamento entre  $\rho_k$  e  $\mu_k$ , que está implícito em (4.5a) e (4.11), na forma:

$$\sum_{i=1}^p s_i \pi_i + \sum_{i=1}^p z_i v_i = 2p\mu_k = \rho \quad (4.12)$$

sugere que  $\mu_k$  pode ser reduzido em função do decréscimo do resíduo de complementaridade, tal como:

$$\mu_{k+1} = \sigma \frac{\rho_k}{2p} \quad (4.13)$$

em que  $\sigma = 0.2$  é o esperado, mas não necessariamente realizado, decréscimo no resíduo de complementaridade. O parâmetro  $\sigma \in (0, 1)$  é chamado de parâmetro de centralização. Se  $\sigma = 1$ , então o sistema de KKT (4.5) define uma direção de centralização, um passo em direção a um ponto na trajetória de barreira. No outro extremo,  $\sigma = 0$  fornece o passo de Newton puro, conhecido como a direção *affine-scaling*. Para balancear os objetivos de reduzir  $\mu_k$  e melhorar a centralidade,  $\sigma$  pode ser escolhido no intervalo  $(0, 1)$ .

#### 4.1.4 Testes de Convergência

As iterações do algoritmo PDPI são consideradas terminadas assim que:

$$\max \left\{ \max_i \{ \underline{x}_i - x_i^k \}, \max_i \{ x_i^k - \bar{x}_i \}, \|g(x_k)\|_\infty \right\} \leq \epsilon_1, \quad (4.14a)$$

$$\frac{\|\nabla f(x_k) + \nabla g(x_k)\lambda - \widehat{I}^T \pi_k + \widehat{I}^T v_k\|_\infty}{1 + \|x_k\|_2 + \|\lambda_k\|_2 + \|\pi_k\|_2 + \|v_k\|_2} \leq \epsilon_1, \quad (4.14b)$$

$$\frac{\rho_k}{1 + \|x_k\|_2} \leq \epsilon_2. \quad (4.14c)$$

Se os testes (4.14a), (4.14b) e (4.14c) são satisfeitos, então a viabilidade primal, a viabilidade dual e as condições de complementaridade são satisfeitas, significando que  $x_k$  é um ponto de KKT de precisão  $\epsilon_1$ . Tolerâncias de convergência típicas são  $\epsilon_1 = 10^{-4}$  e  $\epsilon_2 = 10^{-2}\epsilon_1$ .

## 4.2 O Método Preditor-Corretor de Pontos Interiores

Para obtermos o algoritmo preditor-corretor de Mehrotra, em vez de aplicarmos o método de Newton a (4.5) para calcular a correção  $\Delta y$  para  $y_k$ , substituímos o novo ponto  $y_{k+1} = y_k + \Delta y$  diretamente em (4.5), para obter a aproximação:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & Z & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\widehat{I} \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & \widehat{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla g(x)^T \\ 0 & 0 & -\widehat{I}^T & \widehat{I}^T & \nabla g(x) & \nabla_{xx}^2 L(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta z \\ \Delta \pi \\ \Delta v \\ \Delta \lambda \\ \Delta x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S \pi \\ Z v \\ \underline{x}_l + s - \widehat{I} x \\ \widehat{I} x + z - \bar{x}_l \\ g(x) \\ \nabla_x L(y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_k e \\ \mu_k e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta S \Delta \pi \\ \Delta Z \Delta v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

em que  $\nabla_x L(y) = \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda - \widehat{I}^T \pi + \widehat{I}^T v$ ,  $\Delta S = \text{diag}(\Delta s_1, \dots, \Delta s_p)$ , e  $\Delta Z = \text{diag}(\Delta z_1, \dots, \Delta z_p)$ .

A maior diferença entre os sistemas de equações (4.15) e (4.6) é que o vetor do lado direito de (4.15) não pode ser determinado de antemão por causa dos  $\Delta$ -termos não-lineares  $\Delta S \Delta \pi$  e  $\Delta Z \Delta v$  em termos das incógnitas. A direção  $\Delta y$  que é obtida de (4.15) consiste de três componentes, digamos:

$$\Delta y = \Delta y_{af} + \Delta y_{ce} + \Delta y_{co}, \quad (4.16)$$

em que cada componente é determinada por um dos três vetores no lado direito de (4.15). As três componentes de direções podem ser interpretadas como segue:

$\Delta y_{af}$ : É a direção *affine-scaling*, a direção pura de Newton que é obtida quando fazemos  $\mu_k = 0$  em (4.6). É determinada pelo primeiro vetor no lado direito de (4.15), ou seja, como a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & Z & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\widehat{I} \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & \widehat{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla g(x)^T \\ 0 & 0 & -\widehat{I}^T & \widehat{I}^T & \nabla g(x) & \nabla_{xx}^2 L(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s_{af} \\ \Delta z_{af} \\ \Delta \pi_{af} \\ \Delta v_{af} \\ \Delta \lambda_{af} \\ \Delta x_{af} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S \pi \\ Z v \\ \underline{x}_l + s - \widehat{I} x \\ \widehat{I} x + z - \bar{x}_l \\ g(x) \\ \nabla_x L(y) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

e é responsável pela otimização, ou seja, por reduzir as inviabilidades primal e dual e o resíduo de complementaridade.

$\Delta y_{ce}$  : É a direção de *centralização*, cujo tamanho é governado pelo parâmetro  $\mu_k$  que é escolhido adaptativamente. A direção  $\Delta y_{ce}$  é determinada pelo segundo vetor no lado direito de (4.15), ou seja, como a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & Z & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\widehat{I} \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & \widehat{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla g(x)^T \\ 0 & 0 & -\widehat{I}^T & \widehat{I}^T & \nabla g(x) & \nabla_{xx}^2 L(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s_{ce} \\ \Delta z_{ce} \\ \Delta \pi_{ce} \\ \Delta v_{ce} \\ \Delta \lambda_{ce} \\ \Delta x_{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_k e \\ \mu_k e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

e mantém o ponto corrente afastado da fronteira da região viável e idealmente próximo da trajetória de barreira para melhorar as chances de tomar um passo grande na próxima iteração.

$\Delta y_{co}$  : É a direção de *correção* que tenta compensar algumas das não-linearidades na direção  $\Delta y_{af}$ . A direção  $\Delta y_{co}$  é determinada pelo terceiro vetor no lado direito de (4.15), ou seja, como a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & Z & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\widehat{I} \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & \widehat{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla g(x)^T \\ 0 & 0 & -\widehat{I}^T & \widehat{I}^T & \nabla g(x) & \nabla_{xx}^2 L(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s_{co} \\ \Delta z_{co} \\ \Delta \pi_{co} \\ \Delta v_{co} \\ \Delta \lambda_{co} \\ \Delta x_{co} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta S \Delta \pi \\ \Delta Z \Delta v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

As direções  $\Delta y_{af}$  e  $\Delta y_{ce}$ , quando combinadas, definem a direção de Newton que é calculada de (4.6). Entretanto, para lidar com as não-linearidades em (4.15), a direção  $\Delta y_{af}$  é calculada separadamente e antes da direção  $\Delta y_{ce}$ . Esse arranjo no cálculo de  $\Delta y$  nos provê a possibilidade de escolhermos  $\mu_{k+1}$  adaptativamente, e com um meio de aproximarmos os termos de segunda-ordem  $\Delta S \Delta \pi$  e  $\Delta Z \Delta v$ .

### 4.2.1 O Passo Predictor

Para determinar um passo que aproximadamente satisfaz (4.15), primeiro retiramos os  $\mu_k$ -termos e os  $\Delta$ -termos no lado direito de (4.15) e resolvemos para a direção *affine-scaling*:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & Z & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\widehat{I} \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & \widehat{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla g(x)^T \\ 0 & 0 & -\widehat{I}^T & \widehat{I}^T & \nabla g(x) & \nabla_{xx}^2 L(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s_{af} \\ \Delta z_{af} \\ \Delta \pi_{af} \\ \Delta v_{af} \\ \Delta \lambda_{af} \\ \Delta x_{af} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S\pi \\ Z\nu \\ \underline{x}_l + s - \widehat{I}x \\ \widehat{I}x + z - \bar{x}_l \\ g(x) \\ \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda - \widehat{I}^T\pi + \widehat{I}^T\nu \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

A direção  $\Delta y_{af}$  é utilizada em duas formas distintas: (a) para aproximar os  $\Delta$ -termos no lado direito de (4.15) e (b) para dinamicamente estimar o parâmetro de barreira  $\mu_{k+1}$ .

Para estimar  $\mu_{k+1}$ , primeiro consideramos a regra padrão (4.9) para determinarmos o passo  $\alpha_{af}$  que seria dado se a direção  $\Delta y_{af}$  fosse, de fato, utilizada:

$$\alpha_{af}^P = \min \left\{ 1, \gamma \times \min_i \left\{ \frac{-s_i^k}{|\Delta s_{af}^i|} \Delta s_{af}^i < 0, \frac{-z_i^k}{|\Delta z_{af}^i|} \Delta z_{af}^i < 0 \right\} \right\}, \quad (4.21a)$$

$$\alpha_{af}^D = \min \left\{ 1, \gamma \times \min_i \left\{ \frac{-\pi_i^k}{|\Delta \pi_{af}^i|} \Delta \pi_{af}^i < 0, \frac{-v_i^k}{|\Delta v_{af}^i|} \Delta v_{af}^i < 0 \right\} \right\}. \quad (4.21b)$$

Segundo, calculamos uma estimativa do resíduo de complementaridade por:

$$\rho_{af} = (s_k + \alpha_{af}^P \Delta s_{af})^T (\pi_k + \alpha_{af}^D \Delta \pi_{af}) + (z_k + \alpha_{af}^P \Delta z_{af})^T (v_k + \alpha_{af}^D \Delta v_{af}). \quad (4.22)$$

Finalmente, obtemos uma estimativa  $\mu_{af}$  para  $\mu_{k+1}$  de:

$$\mu_{af} = \min \left\{ \left( \frac{\rho_{af}}{\rho_k} \right)^2, 0.2 \right\} \frac{\rho_{af}}{p}. \quad (4.23)$$

Esse procedimento escolhe  $\mu_{af}$  pequeno se a direção  $\Delta y_{af}$  produzir um decréscimo grande no resíduo de complementaridade, ou seja, se  $\rho_{af} \ll \rho_k$ , e escolhe  $\mu_{af}$  grande caso contrário.



### 4.2.2 O Passo Corretor

Em vez de calcularmos a direção composta  $\Delta y_{ce} + \Delta y_{co}$  para adicionar a  $\Delta y_{af}$  e então obtermos  $\Delta y$ , calculamos a direção  $\Delta y$  de uma só vez de:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & Z & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\widehat{I} \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & \widehat{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla g(x)^T \\ 0 & 0 & -\widehat{I}^T & \widehat{I}^T & \nabla g(x) & \nabla_{xx}^2 L(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta z \\ \Delta \pi \\ \Delta v \\ \Delta \lambda \\ \Delta x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S\pi - \mu_{af}e + \Delta S_{af}\Delta\pi_{af} \\ Zv - \mu_{af}e + \Delta Z_{af}\Delta v_{af} \\ \underline{x}_l + s - \widehat{I}x \\ \widehat{I}x + z - \bar{x}_l \\ g(x) \\ \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda - \widehat{I}^T\pi + \widehat{I}^T v \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Uma vez que os passos preditor e corretor são baseados sobre a mesma fatorização de matriz (ver as matrizes de coeficientes em (4.17) e (4.24)), o esforço adicional no método preditor-corretor está na solução do sistema linear extra para calcular a direção  $\Delta y_{af}$ , e no teste extra utilizado para calcular  $\mu_{af}$ . Os benefícios que geralmente são obtidos desse esforço extra são reduções no contador de iterações e no tempo total de solução. Os passos principais do algoritmo preditor-corretor de pontos interiores são como segue:

1. Faça  $k = 0$ , escolha  $\mu_0 > 0$  e um ponto inicial  $y_0$  que satisfaça as condições de estrita positividade  $(s_0, z_0, \pi_0, v_0) > 0$ .
2. Forme a matriz  $\nabla_{yy}^2 L(y_k; \mu_k)$  e obtenha a sua fatorização.
  - 2a. Resolva o sistema (4.17) para a direção  $\Delta y_{af}$ , calcule  $\alpha_{af}$  de (4.21), e obtenha  $\mu_{af}$  de (4.22).
  - 2b. Resolva o sistema (4.24) para a direção  $\Delta y$ .
3. Calcule o comprimento de passo  $\alpha_k$  na direção  $\Delta y$  e obtenha um novo ponto como  $y_{k+1} = y_k + \alpha_k \Delta y$ .
4. Se  $y_{k+1}$  satisfaz o critério de convergência, então FIM. Caso contrário, faça  $k \leftarrow k + 1$ , reduza o parâmetro  $\mu_k$ , e retorne para o Passo 2.

Algoritmo 4.2: Método preditor-corretor de pontos interiores para resolver (2.1).

### 4.3 Considerações Finais

Neste capítulo fez-se uma apresentação detalhada dos métodos de Pontos-Interiores do tipo Primal-Dual e Preditor-Corretor para programação não-linear (PNL). Essas duas técnicas, adaptadas para programação quadrática, são usadas no algoritmo de região de confiança (RC) proposto nesta tese para resolver os subproblemas vertical e horizontal gerados no processo iterativo.

Procura-se, com a associação das técnicas de RC ao algoritmos de PI, o desenvolvimento de um algoritmo com robustez de convergência sem grande comprometimento do tempo computacional. No próximo capítulo, são detalhadamente apresentadas as técnicas de região de confiança empregadas neste trabalho e, posteriormente, os métodos de solução dos subproblemas de RC via métodos de pontos-interiores para programação quadrática.

---

# Capítulo 5

---

## Globalização da Convergência via Métodos de Região de Confiança

---

**N**A INDÚSTRIA DE POTÊNCIA atual a tendência natural é que os sistemas elétricos de potência operem próximos aos seus limites de capacidade, dando origem a fortes não-linearidades na trajetória das soluções dos modelos matemáticos dos sistemas, tais como os de FPO. A reestruturação da indústria de potência tem levado também a novos e complexos modelos de FPO [91], desafiando as técnicas de solução comumente empregadas, principalmente no que diz respeito à robustez de convergência. Neste capítulo descreve-se, de forma tutorial, o desenvolvimento de um algoritmo de FPO globalmente convergente.

*Convergência global* é uma propriedade desejável para qualquer algoritmo de otimiza-

ção não-linear. Por convergência global entende-se que o algoritmo de otimização deve ser capaz de obter uma solução, se uma existir, para qualquer escolha do ponto inicial. Há duas abordagens clássicas para globalizar um algoritmo localmente convergente [9]: utilizar uma *busca em linha* ou impor uma *região de confiança*.

Com motivação na pesquisa em [18], nesta tese considera-se um método de região de confiança por duas razões principais: primeiro, devido ao grande sucesso que esses métodos têm alcançado na globalização de algoritmos para otimização irrestrita e, segundo, devido ao fato de que um esforço de pesquisa bem maior já foi feito na exploração de buscas em linha. Mais especificamente, descreve-se uma aplicação no problema de FPO não-linear de grande porte da técnica de região de confiança proposta por Byrd [16] e Omojokun [17].

Métodos de região de confiança podem ser definidos como uma classe relativamente nova de algoritmos de otimização que minimizam uma aproximação quadrática da função objetivo não-linear dentro de uma região fechada chamada Região de Confiança. A região fechada é assim denominada porque, dentro dessa região, o modelo quadrático pode ser adotado como uma boa aproximação para a função objetivo não-linear. Espera-se que a redução alcançada na aproximação quadrática corresponda a uma redução na função objetivo original.

O desenvolvimento dos métodos de região de confiança remonta aos trabalhos de Levenberg [92] e Marquardt [93] para problemas não-lineares de mínimos quadrados. Os métodos de região de confiança diferem entre si na forma em que modelam a função objetivo e na maneira em que tratam as restrições. A técnica clássica de região de confiança usa aproximações quadráticas para minimização irrestrita [9, 10].

A técnica de Byrd e Omojokun estudada nesta tese pode ser vista como uma Programação Quadrática Sequencial (PQS) com uma região de confiança. O método de Byrd e Omojokun decompõe cada subproblema de programação quadrática em dois subproblemas menores de solução bem mais fácil, tornando o método bastante atrativo para otimização de grande escala, tal como ocorre na otimização de sistemas de potência.

Aplicações de métodos de região de confiança em sistemas de potência estão apenas começando a surgir na literatura de engenharia de potência. Pajic e Clements [21, 22] foram os primeiros a utilizar um algoritmo de região de confiança para resolver problemas de estimação de estados. Zhou et al [94] utilizam um algoritmo de região de confiança para resolver um problema de FPO de despacho de potência reativa. Wang et al [91] utilizam

---

um algoritmo de região de confiança para lidar com problemas de convergência em modelos de FPO de mercado de energia envolvendo funções não-suaves (funções não continuamente diferenciáveis). Sousa e Torres em [95] apresentam um algoritmo de pontos-interiores com região de confiança para solução do FPO não-linear, tendo esse algoritmo as seguintes características:

- A restrição de região de confiança é definida utilizando a norma infinita, resultando em subproblemas de FPO de região de confiança tipo programação quadrática (PQ);
- Os subproblemas de FPO gerados são resolvidos por um algoritmo primal-dual de pontos-interiores para PQ;
- As decisões sobre aceitar ou não o passo calculado e sobre aumentar ou não o tamanho da região de confiança são tomadas com base em uma função mérito.

O algoritmo de FPO utilizando região de confiança descrito neste capítulo difere do apresentado em [95] em três aspectos principais:

- A restrição de região de confiança é definida utilizando a norma-2, resultando em subproblemas quadraticamente restritos, enquanto no algoritmo em [95] é definida utilizando a norma- $\infty$ , resultando em subproblemas linearmente restritos;
- Os subproblemas quadraticamente restritos são resolvidos pelo método *dogleg* de Powell ou pelo método do gradiente conjugado de Steihaug, enquanto os subproblemas de PQ em [95] são resolvidos pelo método primal-dual de pontos-interiores para PQ;
- Os algoritmos de região de confiança neste capítulo e em [95] tratam as restrições de limites simples sobre as variáveis de formas totalmente distintas.

Enfatiza-se desde já que o algoritmo descrito neste capítulo segue proxivamente o algoritmo de região de confiança desenvolvido por Plantenga, Lalee e Nocedal [18, 96].

---

## 5.1 Região de Confiança para Otimização Irrestrita

Os métodos de região de confiança foram inicialmente desenvolvidos para resolver problemas de otimização irrestrita da forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } f(x) \\ &\text{sujeito a } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (5.1)$$

A informação extraída sobre  $f(x)$  é utilizada para construir uma função modelo  $m_k$  cujo comportamento próximo do ponto corrente  $x_k$  é similar ao da função objetivo não-linear  $f(x)$ . A função modelo  $m_k$  é usualmente definida como uma função quadrática que é derivada da expansão em série de Taylor truncada de  $f(x)$  em torno de  $x_k$ , da forma:

$$m_k(x_k + d) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x_k) d \quad (5.2)$$

em que  $\nabla f(x_k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor gradiente e  $\nabla^2 f(x_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz Hessiana de  $f(x)$ , ambos avaliados em  $x_k$ . Quando  $x$  está distante do ponto  $x_k$ , a função modelo  $m_k(x_k + d)$  poderá não ser uma boa aproximação para  $f(x)$ , de forma que o vetor  $d$  que minimiza  $m_k(x_k + d)$  nem sempre faz sentido como um passo de minimização para  $f(x)$ . Por exemplo, a Hessiana  $\nabla^2 f(x_k)$  pode ser indefinida e há direções ao longo das quais a função modelo é ilimitada por baixo e então  $\|d\| = \infty$ . Por essa razão, para globalizar o algoritmo restringe-se a busca por um minimizador de  $m_k$  a alguma região em torno de  $x_k$ , chamada *região de confiança*. Geralmente, a região de confiança é uma hiperesfera definida pela norma Euclideana  $\|d\|_2 \leq \Delta_k$ , em que o escalar  $\Delta_k$  é o *raio da região de confiança*.

O subproblema de região de confiança em torno do ponto  $x_k$  para o problema irrestrito (5.1) é definido como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } f(x_k) + \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x_k) d \\ &\text{sujeito a } \|d\|_2 \leq \Delta_k. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Se a solução candidata  $x_{k+1} = x_k + d$  não resultar em um decréscimo suficiente na função objetivo não-linear original  $f(x)$ , então concluímos que a região de confiança dada pelo raio  $\Delta_k$  é muito grande. Assim, reduzimos o raio da região de confiança e repetimos a solução do subproblema de região de confiança (5.3).

## 5.2 O Algoritmo de Byrd e Omojokun para Otimização Restrita

O nosso interesse por métodos de região de confiança para otimização restrita está em resolver problemas de FPO não-lineares que podem ser expressos na forma padrão (2.1), reescrito abaixo por conveniência:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & g(x) = 0 \\ & \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Os métodos de região de confiança para resolver o problema restrito (2.1) geralmente utilizam uma aproximação de PQ (objetivo quadrático e restrições lineares) estendida por uma restrição de região de confiança, na forma:

$$\text{Minimize} \quad f(x_k) + \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T H_k d \quad (5.4a)$$

$$\text{sujeito a} \quad g(x_k) + \nabla g(x_k)^T d = 0 \quad (5.4b)$$

$$\underline{x} \leq x_k + d \leq \bar{x} \quad (5.4c)$$

$$\|d\| \leq \Delta_k \quad (5.4d)$$

em que  $\nabla g(x_k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de gradientes de  $g(x)$ , e  $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a Hessiana com relação a  $x$  da função de Lagrange associada a (2.1) (ou uma aproximação quase-Newton dela), dada por:

$$H_k = \nabla^2 f(x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x_k), \quad (5.5)$$

em que  $\nabla^2 g_i(x_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a Hessiana da função de restrição  $g_i(x)$  e  $\lambda_i$  é o multiplicador de Lagrange associado à restrição.

A técnica de região de confiança de Byrd e Omojokun para resolução de problemas com restrições de igualdades não-lineares foi posteriormente adaptada por Plantenga [18] para resolver problemas com restrições de igualdades e de limites simples sobre as variáveis, como o problema (2.1) de FPO. Inspirado no tratamento de restrições de desigualdades por métodos de pontos-interiores, em especial o método *dual affine scaling*, Plantenga propôs

inicialmente uma transformação de escalonamento afim para tratar as restrições de limites simples. Para esse fim, uma matriz de escalonamento diagonal é definida como:

$$D_{ii}^k = \begin{cases} x_i^k - \underline{x}_i & \text{se apenas } \underline{x}_i \text{ é finito} \\ \bar{x}_i - x_i^k & \text{se apenas } \bar{x}_i \text{ é finito} \\ \min\{x_i^k - \underline{x}_i, \bar{x}_i - x_i^k\} & \text{se } \underline{x}_i \text{ e } \bar{x}_i \text{ são finitos} \\ 1 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.6)$$

e a transformação de escalonamento afim é da seguinte forma:

$$d = D_k \hat{d}. \quad (5.7)$$

Substituindo (5.7) em (5.4a) e (5.4b), ignorando o termo constante na função objetivo, relaxando a restrição de limite (5.4c) e impondo a região de confiança sobre  $\hat{d}$ , obtemos o problema escalonado:

$$\text{Minimize } \nabla \hat{f}(x_k)^T \hat{d} + \frac{1}{2} \hat{d}^T \hat{H}_k \hat{d} \quad (5.8a)$$

$$\text{sujeito a } g(x_k) + \nabla \hat{g}(x_k)^T \hat{d} = 0 \quad (5.8b)$$

$$\|\hat{d}\| \leq \Delta_k \quad (5.8c)$$

em que  $\nabla \hat{f}(x_k) = D_k \nabla f(x_k)$ ,  $\nabla \hat{g}(x_k) = D_k \nabla g(x_k)$ , e  $\hat{H}_k = D_k H_k D_k$ .

Observe que todos os elementos afetados pelo escalonamento afim estão identificados pelo circunflexo no topo. Como observado em [18], uma propriedade importante do tamanho da região de confiança em (5.8) é que quando  $\Delta_k < 1$  e  $x_k$  está no interior das restrições de limites, então todo ponto  $x_k + d$  está no interior das restrições de limites.

O escalonamento afim permite que a restrição de limite seja relaxada, desde que o tamanho da região de confiança seja apropriadamente escolhido [18]. Infelizmente, o subproblema (5.8) torna-se mal condicionado quando  $x_k$  aproxima-se da fronteira. Para melhorar o condicionamento, incorpora-se um termo de barreira logarítmica na função objetivo semelhante ao utilizado no método primal-dual de pontos-interiores, definindo a função de barreira:

$$f_{\mathcal{B}}(x) = f(x) - \mu_k \sum_{i=1}^n \left( \ln(x_i - \underline{x}_i) - \ln(\bar{x}_i - x_i) \right) \quad (5.9)$$



em que  $\mu_k > 0$  é o parâmetro de barreira que decresce para zero quando  $k \rightarrow \infty$ .

O gradiente de  $f_{\mathcal{B}}(x)$  e a Hessiana da função de Lagrange com  $f_{\mathcal{B}}(x)$  são calculados por:

$$\begin{aligned}\nabla f_{\mathcal{B}}(x_k) &= \nabla f(x_k) - \mu_k(X_k - \underline{X})^{-1}e + \mu_k(\bar{X} - X_k)^{-1}e \\ \mathcal{H}_k &= H_k + \mu_k(X_k - \underline{X})^{-2} + \mu_k(\bar{X} - X_k)^{-2}.\end{aligned}$$

em que  $e$  é um vetor unitário  $n$ -dimensional.

Usando a função  $f_{\mathcal{B}}(x)$  no lugar de  $f(x)$ , o subproblema de região de confiança é reformulado como:

$$\text{Minimize } \nabla f_{\mathcal{B}}(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T \mathcal{H}_k d \quad (5.10a)$$

$$\text{sujeito a } g(x_k) + \nabla g(x_k)^T d = 0 \quad (5.10b)$$

$$\|d\| \leq \Delta_k \quad (5.10c)$$

Resultado similar é obtido pela adição do modelo quadrático da barreira logarítmica na função objetivo quadrática, seguida pela transformação de escalonamento afim.

Se  $x_k$  não atende uma ou mais restrições linearizadas em (5.10b) e  $\Delta_k$  é pequeno, então as restrições (5.10b) e (5.10c) podem ser inconsistentes. Ou seja, não existe um passo  $d$  que satisfaça as restrições de igualdades lineares (5.10b) e a restrição de região de confiança (5.10c) simultaneamente. Por outro lado, a convergência global do método de região de confiança depende de sua capacidade de reduzir  $\Delta_k$  o suficiente para que o subproblema modelo represente com precisão o problema original. Assim, restrições inconsistentes podem ser inevitáveis no subproblema de região de confiança.

Para resolver o possível conflito no atendimento de (5.10b) e (5.10c), na técnica de Byrd-Omojokun a solução de (5.10) é dividida em dois subproblemas, chamados de subproblema *vertical* (ou *normal*) e subproblema *horizontal* (ou *tangencial*). O subproblema vertical é definido como:

$$\text{Minimize } \|g(x_k) + \nabla g(x_k)^T v\|_2^2 \quad (5.11a)$$

$$\text{sujeito a } \|v\| \leq \xi \Delta_k \quad (5.11b)$$

em que  $\xi \in (0, 1)$  é um fator de contração que define uma região de confiança reduzida (tipicamente,  $\xi = 0.8$ ).

Ignorando o termo constante na função objetivo quadrática, o subproblema (5.11) pode ser reescrito como:

$$\text{Minimize } (\nabla g(x_k)g(x_k))^T v + \frac{1}{2}v^T \nabla g(x_k)\nabla g(x_k)^T v \quad (5.12a)$$

$$\text{sujeito a } \|v\| \leq \xi \Delta_k \quad (5.12b)$$

A finalidade do subproblema vertical (5.11) é encontrar um *passo vertical*,  $v$ , que se localiza bem no interior da região de confiança (de acordo com o fator de contração  $\xi$ ) e que procura satisfazer as restrições de igualdades (5.10b) o máximo possível (minimizando a norma quadrática dos resíduos das restrições).

O subproblema vertical envolve a minimização de uma função quadrática sobre uma hiperesfera, de forma que ele pode ser resolvido por algoritmos bastante eficazes na solução desse tipo de problema, como o método *dogleg* de Powell [13] e o método do gradiente conjugado de Steihaug [97]. Esses dois métodos são detalhados na seção seguinte. Outros métodos padrões para resolver subproblemas de região de confiança são apresentados nas referências clássicas [9, 10, 14, 98].

Após resolver aproximadamente o subproblema vertical para o passo vertical  $v_k$ , o passo completo  $d_k$  é obtido resolvendo-se o subproblema horizontal:

$$\text{Minimize } \nabla f_{\mathcal{B}}(x_k)^T d + \frac{1}{2}d^T \mathcal{H}_k d \quad (5.13a)$$

$$\text{sujeito a } \nabla g(x_k)^T d = \nabla g(x_k)^T v_k \quad (5.13b)$$

$$\|d\| \leq \Delta_k. \quad (5.13c)$$

A restrição de igualdade (5.13b) é uma relaxação da restrição de igualdade (5.10b), de forma que (5.13b) e (5.13c) são sempre consistentes, ou seja, o conjunto viável é não vazio (por exemplo,  $d = v_k$  é viável). Conforme justificado em [18], é o subproblema vertical que relaxa a restrição original o suficiente para permitir consistência. A restrição (5.13b) tem o efeito de forçar o passo final  $d_k$  a fazer o mesmo progresso que  $v_k$  faz em direção a satisfazer as restrições de igualdades linearizadas, porém ao mesmo tempo em que minimiza a função objetivo.

---

Diferentemente do subproblema vertical (5.12), o conjunto de restrições do subproblema horizontal (5.13) é composto pela restrição de região de confiança e pelas restrições de igualdades. Se pudermos reformular (5.13) sem as restrições de igualdades, então vamos poder resolvê-lo também pelo método *dogleg* ou pelo método de Steihaug. Para esse fim, Byrd e Omojokun propuseram calcular  $d$  obtendo um passo complementar a  $v_k$ . Tal passo é ortogonal a  $v_k$ , e como  $v_k$  pertence ao espaço gerado pelos gradientes,  $\nabla g(x_k)$ , então ele pertence ao espaço nulo de  $\nabla g(x_k)$ .

Seja  $Z_k$  uma matriz  $n \times (n - m)$  que gera o espaço nulo de  $\nabla g(x_k)$ , ou seja,  $Z_k$  é tal que  $\nabla g(x_k)^T Z_k = 0$ . Então, o passo total  $d$  pode ser decomposto como:

$$d = v_k + Z_k u \quad (5.14)$$

em que  $u \in \mathbb{R}^{n-m}$  representa a variável a ser determinada.

Observe que a substituição de  $d$  em (5.14) no lado esquerdo da restrição de igualdade (5.13b) fornece:

$$\nabla g(x_k)^T (v_k + Z_k u) = \nabla g(x_k)^T v_k + \nabla g(x_k)^T Z_k u = \nabla g(x_k)^T v_k$$

ou seja, a restrição de igualdade (5.13b) sempre é satisfeita para qualquer passo  $d$  dado por (5.14). Assim, considerando (5.14) em (5.13), observando que  $v_k$  e  $Z_k u$  são ortogonais e ignorando os termos constantes, o subproblema horizontal (5.13) pode ser reescrito sem restrições de igualdades, ou seja:

$$\text{Minimize} \quad \nabla \bar{f}_{\mathcal{B}}(x_k)^T Z_k u + \frac{1}{2} u^T Z_k^T \mathcal{H}_k Z_k u \quad (5.15a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \|Z_k u\| \leq \sqrt{\Delta_k^2 - \|v_k\|^2}. \quad (5.15b)$$

em que  $\nabla \bar{f}_{\mathcal{B}}(x_k) = \nabla f_{\mathcal{B}}(x_k) + \mathcal{H}_k v_k$ .

O procedimento para resolver (5.4) encontra-se agora delineado. Primeiro, resolvemos (5.12) para o passo vertical  $v_k$ , a seguir, resolvemos (5.15) para o passo horizontal  $u_k$ , depois, utilizando (5.14), obtemos o passo completo  $d_k$  que aproximadamente resolve (5.4), e, finalmente, obtemos:

$$x_{k+1} = x_k + d_k \quad (5.16)$$


---

desde que  $x_{k+1}$  proporcione uma redução na função mérito (a ser definida posteriormente). Caso contrário, a região de confiança é reduzida e um novo ponto tentativa é calculado.

### 5.3 Resolvendo os Subproblemas de Região de Confiança

Os subproblemas vertical (5.12) e horizontal (5.15) podem ser resolvidos pelo método *dogleg* ou pelo método de Steihaug. Devido ao subproblema vertical ter uma região de confiança esférica no  $\mathbb{R}^n$  e o subproblema horizontal ter uma região de confiança elipsoidal no  $\mathbb{R}^{n-m}$ , vamos definir, antes da apresentação dos algoritmos de solução, uma notação e uma forma padrão única para os dois subproblemas, como segue:

$$\text{Minimize } \phi(s) = b_k^T s + \frac{1}{2} s^T A_k s \quad (5.17a)$$

$$\text{sujeito a } \|C_k s\| \leq \bar{\Delta}_k \quad (5.17b)$$

em que o índice  $k$  significa um subproblema na iteração  $k$ .

Para modelar o subproblema vertical (5.12), definimos  $s = v$ :

$$b_k = \nabla g(x_k) g(x_k) \quad (5.18a)$$

$$A_k = \nabla g(x_k) \nabla g(x_k)^T \quad (5.18b)$$

$$C_k = I \quad (5.18c)$$

$$\bar{\Delta}_k = \xi \Delta_k. \quad (5.18d)$$

Uma vez que a matriz de gradientes  $\nabla g(x_k)$  é de dimensão  $n \times m$  e  $n > m$ , então a matriz  $A_k$  em (5.18b) é simétrica positiva semidefinida, ou seja,  $A_k$  é singular, tendo  $n - m$  vetores nulos linearmente independentes.

Para modelar o subproblema horizontal (5.15), definimos  $s = u$ :

$$b_k = Z_k^T \nabla \bar{f}_{\mathcal{B}}(x_k) \quad (5.19a)$$

$$A_k = Z_k^T \mathcal{H}_k Z_k \quad (5.19b)$$

$$C_k = Z_k \quad (5.19c)$$

$$\Delta_k = \sqrt{\Delta_k^2 - \|v_k\|^2}. \quad (5.19d)$$

Uma matriz  $C_k \neq I$  em (5.17) torna a região de confiança elipsoidal, então é conveniente transformar o problema de forma que tenha uma região de confiança esférica [18]. Para esse fim, vamos definir a transformação de variáveis:

$$\tilde{s} = (C_k^T C_k)^{1/2} s \quad (5.20)$$

tal que:

$$s = (C_k^T C_k)^{-1/2} \tilde{s}. \quad (5.21)$$

Introduzindo a transformação (5.21) no problema (5.17), obtemos o problema esfericamente restrito equivalente:

$$\text{Minimize } \tilde{\phi}(\tilde{s}) = \tilde{b}_k^T \tilde{s} + \frac{1}{2} \tilde{s}^T \tilde{A}_k \tilde{s} \quad (5.22a)$$

$$\text{sujeito a } \|\tilde{s}\| \leq \tilde{\Delta}_k \quad (5.22b)$$

em que  $\tilde{\Delta}_k = \tilde{\Delta}_k$  e:

$$\tilde{b}_k = (C_k^T C_k)^{-1/2} b_k \quad (5.23a)$$

$$\tilde{A}_k = (C_k^T C_k)^{-1/2} A_k (C_k^T C_k)^{-1/2}. \quad (5.23b)$$

O problema esfericamente restrito (5.22) pode ser resolvido pelo método *dogleg* (se  $\tilde{A}_k$  é definida positiva) ou pelo método de Steihaug e, então, utilizando a transformação (5.21), obtemos a solução  $s$  do problema elipsoidalmente restrito (5.17).

### 5.3.1 Os Passos de Cauchy e de Newton

Antes da apresentação do método *dogleg* de Powell [13] vamos definir o *passo de Cauchy* e o *passo de Newton*.

**O Passo de Cauchy:** O ponto de Cauchy para (5.22) é o minimizador restrito na direção de máxima declividade em  $\tilde{s} = 0$ . Portanto, ele é dado por:

$$\tilde{s}_c = -\tilde{\alpha}_k \tilde{b}_k \quad (5.24)$$

em que  $\tilde{\alpha}_k$  é determinado pela minimização em linha:

$$\text{Minimize}_{\tilde{\alpha} > 0} \quad \tilde{b}_k^T (-\tilde{\alpha} \tilde{b}_k) + \frac{1}{2} (\tilde{\alpha} \tilde{b}_k)^T \tilde{A}_k (\tilde{\alpha} \tilde{b}_k) \quad (5.25a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \|\tilde{\alpha} \tilde{b}_k\| \leq \tilde{\Delta}_k \quad (5.25b)$$

cuja solução é calculada por:

$$\tilde{\alpha}_k = \begin{cases} \frac{\tilde{b}_k^T \tilde{b}_k}{\tilde{b}_k^T \tilde{A}_k \tilde{b}_k} & \text{se } \tilde{b}_k^T \tilde{A}_k \tilde{b}_k > 0 \text{ e } \frac{(\tilde{b}_k^T \tilde{b}_k)^{3/2}}{\tilde{b}_k^T \tilde{A}_k \tilde{b}_k} \leq \tilde{\Delta}_k \\ \frac{\tilde{\Delta}_k}{\|\tilde{b}_k\|} & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.26)$$

Utilizando as transformações (5.21) e (5.23a), obtemos o passo de Cauchy para o problema elipsoidalmente restrito (5.17):

$$s_c = -\tilde{\alpha}_k (C_k^T C_k)^{-1} b_k. \quad (5.27)$$

**O Passo de Newton:** O passo de Newton é o minimizador irrestrito para (5.22a), o qual é dado por:

$$\tilde{s}_n = -\tilde{A}_k^{-1} \tilde{b}_k. \quad (5.28)$$

Similarmente, o minimizador irrestrito para (5.17a) é dado por:

$$s_n = -A_k^{-1} b_k. \quad (5.29)$$

Conforme já observado, a matriz  $A_k = \nabla g(x_k) \nabla g(x_k)^T$  no subproblema vertical é singular e, portanto, o passo de Newton não pode ser calculado por (5.28) ou (5.29). Uma vez que a matriz  $\nabla g(x_k) \nabla g(x_k)^T$  possui  $n - m$  vetores nulos linearmente independentes, há um *manifold* completo de minimizadores para (5.12), cada um satisfazendo as equações de restrições linearizadas  $g(x_k) + \nabla g(x_k)^T v = 0$ . Levando-se em conta a limitação do passo imposta pela região de confiança, o minimizador de menor passo é o utilizado, sendo unicamente calculado por:

$$s_n = -\nabla g(x_k) (\nabla g(x_k)^T \nabla g(x_k))^{-1} g(x_k). \quad (5.30)$$

Analisando-se a Equação (5.30), verifica-se que o passo  $s_n$  localiza-se no espaço gerado por  $\nabla g(x_k)$ , condição indispensável para a ortogonalidade com o passo tangencial  $Z_k u$ , e que ele satisfaz as equações de restrições linearizadas.

### 5.3.2 O Método Dogleg

Por ser um minimizador irrestrito, o passo de Newton pode violar a restrição de região de confiança. Se o passo de Newton estiver dentro da região de confiança (ou seja, se  $\|\tilde{s}_n\| \leq \tilde{\Delta}_k$ ), então  $\tilde{s}_n$  é uma solução aproximada para (5.22). Senão, se o passo de Cauchy estiver na fronteira da região de confiança (ou seja, se  $\|\tilde{s}_c\| = \tilde{\Delta}_k$ ), então  $\tilde{s}_c$  é uma solução aproximada para (5.22). Se nenhuma das condições anteriores são verificadas, então o método *dogleg* encontra o minimizador restrito na *trajetória dogleg* sujeito a  $\|\tilde{s}\| \leq \tilde{\Delta}_k$ , ilustrada na Figura 5.1 [9].

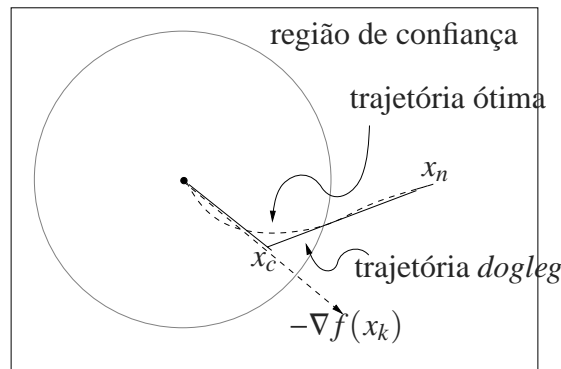


Figura 5.1: Trajetória *dogleg*.

A trajetória *dogleg* consiste de dois segmentos de linha: de  $\tilde{s} = 0$  a  $\tilde{s} = \tilde{s}_c$  e de  $\tilde{s} = \tilde{s}_c$  a  $\tilde{s} = \tilde{s}_n$ , e é definida por:

$$\tilde{s}(\tilde{\tau}) = \begin{cases} \tilde{\tau}\tilde{s}_c & \text{para } \tilde{\tau} \in [0, 1] \\ \tilde{s}_c + (\tilde{\tau} - 1)(\tilde{s}_n - \tilde{s}_c) & \text{para } \tilde{\tau} \in (1, 2]. \end{cases} \quad (5.31)$$

Dois propriedades tornam o método *dogleg* bem definido [18]: o ponto de Newton é sempre mais distante do que o ponto de Cauchy (ou seja,  $\|\tilde{s}_n\| > \|\tilde{s}_c\|$ ) e o objetivo quadrático decresce monotonicamente ao longo da trajetória  $\tilde{s}(\tilde{\tau})$ . Decorre, então, que o minimizador restrito quando  $\|s_n\| \geq \tilde{\Delta}_k$  e  $\|s_n\| < \tilde{\Delta}_k$  é a interseção da trajetória  $\tilde{s}(\tilde{\tau})$  com a fronteira da região de confiança, ou seja:

$$\|\tilde{s}_c + (\tilde{\tau} - 1)(\tilde{s}_n - \tilde{s}_c)\| = \tilde{\Delta}_k \quad (5.32)$$

sendo o escalar  $\tilde{\tau}$  dado por:

$$\tilde{\tau}_k = \frac{-\tilde{s}_c^T(\tilde{s}_n - \tilde{s}_c) + \sqrt{[\tilde{s}_c^T(\tilde{s}_n - \tilde{s}_c)]^2 + \|\tilde{s}_n - \tilde{s}_c\|^2(\tilde{\Delta}_k^2 - \|\tilde{s}_c\|^2)}}{\|\tilde{s}_n - \tilde{s}_c\|^2} + 1. \quad (5.33)$$

Nas figuras a seguir, vêem-se três situações que podem ocorrer no processo de minimização [99]. Na Figura 5.2, o minimizador irrestrito  $\tilde{s}_n$  está dentro da região de confiança e, portanto, é a solução de (5.22a). Na Figura 5.3, o minimizador restrito ao longo da direção oposta ao gradiente está na fronteira com a região de confiança, assim, a solução é o próprio ponto de Cauchy. Na Figura 5.4, o ponto de Cauchy está dentro da região de confiança, logo, a solução encontrada é a intersecção do caminho *dogleg* com a fronteira da região de confiança.



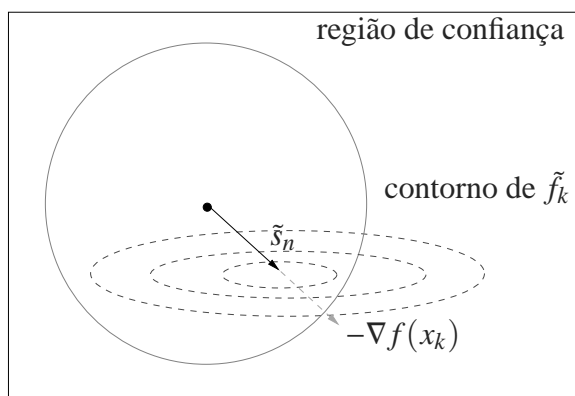


Figura 5.2: O minimizador é o passo de Newton.

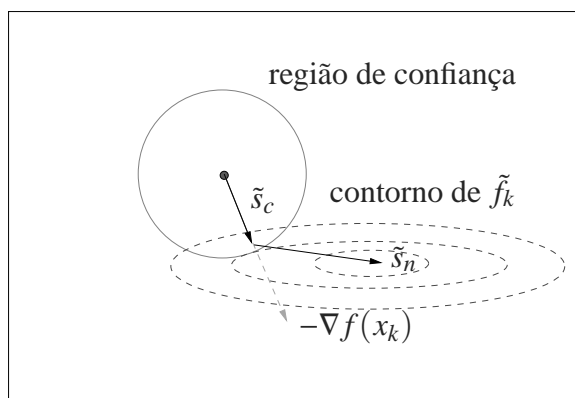


Figura 5.3: O minimizador é o passo de Cauchy.

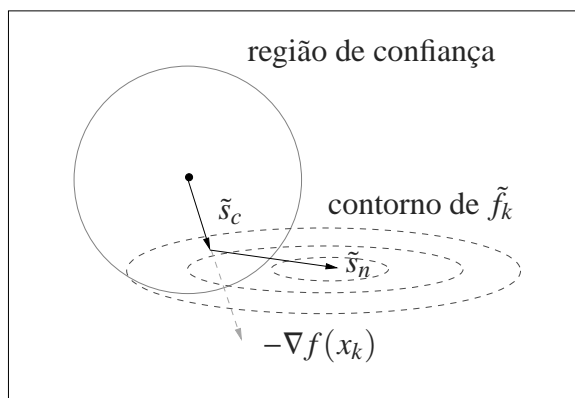


Figura 5.4: O minimizador é a intersecção.

Os passos principais do método *dogleg* são descritos no Algoritmo 5.1. A tarefa computacionalmente mais dispendiosa está em resolver o sistema linear (5.28) para obter o passo de Newton  $\tilde{s}_n$ .

1. Dados  $\tilde{\Delta}_k$ ,  $\tilde{b}_k$  e  $\tilde{A}_k$  calcule o passo de Newton  $\tilde{s}_n$  por (5.28). Se  $\|\tilde{s}_n\| \leq \tilde{\Delta}_k$ , então **retorne** com  $\tilde{s}_k = \tilde{s}_n$  (o passo de Newton é a solução aproximada).
2. Calcule o passo de Cauchy  $\tilde{s}_c$  por (5.24). Se  $\|\tilde{s}_c\| \geq \tilde{\Delta}_k$ , então **retorne** com  $\tilde{s}_k = \tilde{s}_c$  (o passo de Cauchy é a solução aproximada).
3. Dados  $\tilde{s}_n$  e  $\tilde{s}_c$  obtidos nos passos 1 e 2, calcule  $\tilde{s}(\tilde{\tau}_k)$  por (5.31) e (5.33) e **retorne** com  $\tilde{s}_k = \tilde{s}(\tilde{\tau}_k)$  (a interseção da trajetória *dogleg* com a fronteira da região de confiança é a solução aproximada).

Algoritmo 5.1: Método Dogleg.

### 5.3.3 O Método do Gradiente Conjugado de Steihaug

O método *dogleg* é simples de implementar e fornece uma boa aproximação para a solução de (5.22). No entanto, ele requer que a Hessiana  $\tilde{A}_k$  da função objetivo quadrática seja sempre definida positiva; caso contrário, o passo de Newton  $\tilde{s}_n$  não é definido. A matriz  $\tilde{A}_k$  ser definida positiva não é um requisito para o método de Steihaug [97], o qual é uma modificação do método do gradiente conjugado para incluir a restrição de região de confiança e lidar com curvaturas negativas.

Uma propriedade das iterações do gradiente conjugado de Steihaug é que todo passo intermediário  $\tilde{s}_j$  (iteraões *internas* do algoritmo de região de confiança) move-se para mais distante ainda do ponto inicial  $\tilde{s}_0 = 0$ , ou seja,  $\|\tilde{s}_{j+1}\| \geq \|\tilde{s}_j\|$ . Essa propriedade, aliada ao fato de que a função objetivo quadrática decresce monotonicamente com cada novo passo  $\tilde{s}_j$ , implica que as iterações devem parar tão logo a fronteira da região de confiança seja encontrada. Um resumo das iterações do gradiente conjugado de Steihaug é dado abaixo.

1. Dados  $\tilde{\Delta}_k, \tilde{b}_k, \tilde{A}_k$  e  $\epsilon > 0$ , faça  $j = 0$ ,  $\tilde{s}_0 = 0$ ,  $\tilde{r}_0 = -\tilde{b}_k$ , e  $\tilde{p}_0 = \tilde{r}_0$ .
2. Se  $\|\tilde{r}_0\| \leq \epsilon$ , então **retorne** com  $\tilde{s}_k = \tilde{s}_0$ .
3. Se  $\tilde{p}_j^T \tilde{A}_k \tilde{p}_j \leq 0$ , então calcule  $\tilde{\tau}_j$  tal que  $\tilde{s} = \tilde{s}_j + \tilde{\tau}_j \tilde{p}_j$  minimiza  $\tilde{\phi}(\tilde{s})$  e satisfaz  $\|\tilde{s}\| = \tilde{\Delta}_k$ , e **retorne** com  $\tilde{s}_k = \tilde{s}$ .
4. Calcule  $\tilde{\alpha}_j = \tilde{r}_j^T \tilde{r}_j / \tilde{p}_j^T \tilde{A}_k \tilde{p}_j$  e  $\tilde{s}_{j+1} = \tilde{s}_j + \tilde{\alpha}_j \tilde{p}_j$ . Se  $\|\tilde{s}_{j+1}\| \geq \tilde{\Delta}_k$ , então calcule  $\tilde{\tau}_j \geq 0$  tal que  $\|\tilde{s}_j + \tilde{\tau}_j \tilde{p}_j\| = \tilde{\Delta}_k$ , e **retorne** com  $\tilde{s}_k = \tilde{s}_j + \tilde{\tau}_j \tilde{p}_j$ .
5. Calcule  $\tilde{r}_{j+1} = \tilde{r}_j - \tilde{\alpha}_j \tilde{A}_k \tilde{p}_j$ . Se  $\|\tilde{r}_{j+1}\| < \epsilon \|\tilde{r}_0\|$ , então **retorne** com  $\tilde{s}_k = \tilde{s}_{j+1}$ .
6. Calcule  $\tilde{\beta}_{j+1} = \tilde{r}_{j+1}^T \tilde{r}_{j+1} / \tilde{r}_j^T \tilde{r}_j$  e  $\tilde{p}_{j+1} = \tilde{r}_{j+1} + \tilde{\beta}_{j+1} \tilde{p}_j$ . Faça  $j = j + 1$  e retorne para o passo 3.

Algoritmo 5.2: Método de Steihaug.

Como observado em [18, 96], as diferenças entre o método de Steihaug e o método do gradiente conjugado padrão (de Hestenes e Stiefel [100]) são as duas condições de parada extras nos passos 3 e 4 do Algoritmo 5.2. O primeiro teste pára o método se uma direção de curvatura nula ou negativa ao longo de  $\tilde{A}_k$  for encontrada. O segundo teste interrompe as iterações se  $\tilde{s}_{j+1}$  viola a restrição de região de confiança. Em ambos os casos, um ponto final  $\tilde{s}_k$  é encontrado na interseção da direção de busca corrente com a fronteira da região de confiança.

No passo 3, há dois valores possíveis de  $\tilde{\tau}_j$  que fornecem:  $\|\tilde{s}_j + \tilde{\tau}_j \tilde{p}_j\| = \tilde{\Delta}_k$ , os quais são calculados por:

$$\tilde{\tau}_j = \frac{-\tilde{s}_j^T \tilde{p}_j \pm \sqrt{(\tilde{s}_j^T \tilde{p}_j)^2 + \|\tilde{p}_j\|^2 (\tilde{\Delta}_k^2 - \|\tilde{s}_j\|^2)}}{\|\tilde{p}_j\|^2}. \quad (5.34)$$

Uma vez que  $\tilde{\Delta}_k > \|\tilde{s}_j\|$ , pois do contrário o algoritmo teria parado na iteração anterior, o argumento da raiz quadrada é real e os dois valores possíveis para  $\tilde{\tau}_j$  são reais, sendo um positivo e outro negativo. Observe que a função objetivo em  $\tilde{s}_j + \tilde{\tau}_j \tilde{p}_j$  é dada por:

$$\tilde{\phi}(\tilde{s}_j + \tilde{\tau}_j \tilde{p}_j) = \tilde{\phi}(\tilde{s}_j) - \tilde{\tau}_j \tilde{r}_j^T \tilde{p}_j + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_j^2 \tilde{p}_j^T \tilde{A}_k \tilde{p}_j \quad (5.35)$$

de forma que quando  $\tilde{p}_j^T \tilde{A}_k \tilde{p}_j \leq 0$  podemos sempre fazer  $\tilde{\phi}(\tilde{s}_j + \tilde{\tau}_j \tilde{p}_j)$  menor do que  $\tilde{\phi}(\tilde{s}_j)$

escolhendo o valor de  $\tilde{\tau}_j$  que tem o mesmo sinal de  $\tilde{r}_j^T \tilde{p}_j$ , ou seja:

$$\tilde{\tau}_j = \frac{-\tilde{s}_j^T \tilde{p}_j + \text{sign}(\tilde{r}_j^T \tilde{p}_j) \sqrt{(\tilde{s}_j^T \tilde{p}_j)^2 + \|\tilde{p}_j\|^2 (\tilde{\Delta}_k^2 - \|\tilde{s}_j\|^2)}}{\|\tilde{p}_j\|^2}. \quad (5.36)$$

No passo 4, o valor de  $\tilde{\tau}_j > 0$  é obtido resolvendo-se a equação  $\|\tilde{s}_j + \tilde{\tau}_j \tilde{p}_j\| = \tilde{\Delta}_k$ , o que fornece:

$$\tilde{\tau}_j = \frac{-\tilde{s}_j^T \tilde{p}_j + \sqrt{(\tilde{s}_j^T \tilde{p}_j)^2 + \|\tilde{p}_j\|^2 (\tilde{\Delta}_k^2 - \|\tilde{s}_j\|^2)}}{\|\tilde{p}_j\|^2}. \quad (5.37)$$

## 5.4 Aspectos da Implementação Computacional

### 5.4.1 Cálculo da Hessiana da Função de Lagrange

Os multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  não são explicitamente calculados pelo algoritmo de região de confiança descrito. Sendo assim, para calcularmos em cada iteração de região de confiança a matriz  $H_k$ , dada por:

$$H_k = \nabla^2 f(x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x_k),$$

utilizamos uma estimativa de mínimos quadrados para os multiplicadores de Lagrange, ou seja:

$$(\nabla g(x_k))^T \nabla g(x_k) \lambda_k = -\nabla g(x_k)^T \nabla f(x_k). \quad (5.38)$$

Sob a hipótese de que a matriz de gradientes  $\nabla g(x_k)$  é de posto completo (qualificação de restrições ou condição de regularidade), o sistema linear (5.38) é positivo definido e pode ser resolvido por fatorização Cholesky ou pelo método do gradiente conjugado. A avaliação da expressão da Hessiana  $H_k$  acima pode ser implementada de forma bastante eficiente como descrito em [101].

### 5.4.2 Escolha entre o Método Dogleg e o Método de Steihaug

O método *dogleg* é aplicável a (5.17) apenas se a Hessiana  $A_k$  for definida positiva, o que pode não ser sempre o caso, principalmente no subproblema horizontal. Uma vez que o método de Steihaug pode ser aplicado a qualquer matriz simétrica  $\tilde{A}_k$ , seja definida positiva ou não, então empregamos este método como a única opção para calcular o passo tangencial, tal como em [96].

No entanto, como no subproblema horizontal temos que  $A_k = Z_k^T \mathcal{H}_k Z_k$  e  $C_k = Z_k$ , a transformação (5.23) para modelar esse subproblema na forma padrão (5.22) é computacionalmente onerosa. Por essa razão, é proposto em [96] que as iterações de Steihaug gerem iterações e direções de buscas da forma  $(Zu)_j$  e  $(Zp)_j$  em vez de  $\tilde{u}_j$  e  $\tilde{p}_j$ , evitando a multiplicação por  $Z_k$  em toda iteração. Por construção, todas as direções de buscas  $(Zp)_j$  localizam-se no espaço nulo da matriz de gradientes, ou seja, no espaço gerado por  $Z_k$ . O algoritmo de Steihaug como implementado para resolver o subproblema horizontal é descrito a seguir.

1. Dados  $\nabla \bar{f}_{\mathcal{B}}(x_k)$ ,  $\mathcal{H}_k$ ,  $Z_k$ ,  $\Delta_k$  e  $\epsilon > 0$ , faça  $j = 0$ ,  $(Zu)_0 = 0$  e  $r_0 = -Z_k^T \nabla \bar{f}_{\mathcal{B}}(x_k)$ .
2. Resolva  $(Z_k^T Z_k) t_0 = r_0$  para  $t_0$  e faça  $(Zp)_0 = Z_k t_0$ .
3. Se  $\sqrt{r_0^T t_0} \leq \epsilon$ , então calcule o ponto de Cauchy  $u_c$  por (5.40) e **retorne** com  $(Zu)_k = Z_k u_c$ .
4. Se  $(Zp)_j^T \mathcal{H}_k (Zp)_j \leq 10^{-8} (Zp)_j^T (Zp)_j$ , calcule  $\tau_j$  tal que  $(Zu) = (Zu)_j + \tau_j (Zp)_j$  minimiza (5.15a) e satisfaz  $\|(Zu)\| = \Delta_k$ , e **retorne** com  $(Zu)_k = (Zu)_j + \tau_j (Zp)_j$ .
5. Calcule  $\alpha_j = r_j^T t_j / (Zp)_j^T \mathcal{H}_k (Zp)_j$  e  $(Zu)_{j+1} = (Zu)_j + \alpha_j (Zp)_j$ . Se  $\|(Zu)_{j+1}\| \geq \Delta_k$ , então calcule  $\tau_j \geq 0$  tal que  $\|(Zu)_j + \tau_j (Zp)_j\| = \Delta_k$  e **retorne** com  $(Zu)_k = (Zu)_j + \tau_j (Zp)_j$ .
6. Calcule  $r_{j+1} = r_j - \alpha_j Z_k^T \mathcal{H}_k (Zp)_j$  e resolva  $(Z_k^T Z_k) t_{j+1} = r_{j+1}$  para  $t_{j+1}$ . Se  $\sqrt{r_{j+1}^T t_{j+1}} < \epsilon \sqrt{r_0^T t_0}$ , então **retorne** com  $(Zu)_k = (Zu)_{j+1}$ .
7. Calcule  $\beta_{j+1} = r_{j+1}^T t_{j+1} / r_j^T t_j$  e  $(Zp)_{j+1} = Z_k t_{j+1} + \beta_{j+1} (Zp)_j$ . Faça  $j = j + 1$  e retorne para o passo 4.

Algoritmo 5.3: O método de Steihaug aplicado a (5.15).

No passo 3, o cálculo do ponto de Cauchy  $u_c$  para o subproblema tangencial (5.15) é

obtido como segue. Resolva o sistema linear definido positivo:

$$(Z_k^T Z_k) \bar{u} = Z_k^T \nabla \bar{f}_{\mathcal{B}}(x_k) \quad (5.39)$$

para  $\bar{u}$ , e obtenha o ponto de Cauchy:

$$u_c = -\alpha_k \bar{u} \quad (5.40)$$

em que:

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{\Delta_k}{\|Z_k \bar{u}\|} & \text{se } \bar{u}^T Z_k^T \mathcal{H}_k Z_k \bar{u} \leq 0 \\ \min \left\{ \frac{\Delta_k}{\|Z_k \bar{u}\|}, \frac{\nabla \bar{f}_{\mathcal{B}}^T Z_k \bar{u}}{\bar{u}^T Z_k^T \mathcal{H}_k Z_k \bar{u}} \right\} & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.41)$$

De uma análise semelhante a do passo 3 do Algoritmo 5.2, segue que no passo 4 do Algoritmo 5.3 há dois valores de  $\tau_j$  que fornecem  $\|(Zu)_j + \tau_j(Zp)_j\| = \Delta_k$ , ou seja:

$$\tau_j = \frac{-(Zu)_j^T (Zp)_j \pm \sqrt{((Zu)_j^T (Zp)_j)^2 + \|(Zp)_j\|^2 (\Delta_k^2 - \|(Zu)_j\|^2)}}{\|(Zp)_j\|^2}. \quad (5.42)$$

Como  $\tau_j$  deve ter o mesmo sinal de  $r_j^T (Zp)_j$  para que a função mérito sempre decresça, temos que:

$$\tau_j = \frac{-(Zu)_j^T (Zp)_j + \text{sinal}(r_j^T (Zp)_j) \sqrt{((Zu)_j^T (Zp)_j)^2 + \|(Zp)_j\|^2 (\Delta_k^2 - \|(Zu)_j\|^2)}}{\|(Zp)_j\|^2}. \quad (5.43)$$

No passo 5 o valor de  $\tau_j > 0$  é obtido resolvendo-se a equação  $\|(Zu)_j + \tau_j(Zp)_j\| = \Delta_k$ , o que fornece:

$$\tau_j = \frac{-(Zu)_j^T (Zp)_j + \sqrt{((Zu)_j^T (Zp)_j)^2 + \|(Zp)_j\|^2 (\Delta_k^2 - \|(Zu)_j\|^2)}}{\|(Zp)_j\|^2}. \quad (5.44)$$

### 5.4.3 Função Mérito

Uma vez resolvido (5.13) para o passo  $d_k$ , uma *função mérito* é utilizada para decidir se esse passo proporciona um decréscimo suficiente ou não na função objetivo não-linear  $\phi$ . Assim como em [17, 96], utilizamos a função mérito:

$$\psi(x, \eta) = f(x) + \eta \|g(x)\|_2 \quad (5.45)$$

em que  $\eta > 0$  é o *parâmetro de penalidade* que pondera a satisfação das restrições relativo a minimização da função objetivo.

Uma vez que o último termo de  $\psi(x, \eta)$  não é quadrado, essa função mérito não é continuamente diferenciável em todos os pontos. Porém, ela é *exata*: na vizinhança de um ponto solução  $x_*$  com  $\eta > \|\lambda_*\|_\infty$  o mínimo de  $\psi(x, \eta)$  é precisamente  $x_*$ .

Um procedimento para escolha e atualização do parâmetro de penalidade  $\eta$  é descrito em [96]. Basicamente, dado um passo  $d_k$ ,  $\eta$  é escolhido grande o suficiente para que  $d_k$  resulte em uma redução do modelo da função mérito em torno de  $x_k$ , modelo esse definido como:

$$\tilde{\psi}(d, \eta) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T H_k d + \eta \|g(x_k) + \nabla g(x_k)^T d\|_2. \quad (5.46)$$

O modelo da função mérito (5.46) é utilizado para calcular a *redução prevista* na função mérito (5.45), definida como sendo a variação no modelo  $\tilde{\psi}(d, \eta)$  devida a um passo  $d_k$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \text{redp}(d_k) &= \tilde{\psi}(0, \eta) - \tilde{\psi}(d_k, \eta) \\ &= \psi(x_k, \eta) - \tilde{\psi}(d_k, \eta) \\ &= -\nabla f(x_k)^T d_k - \frac{1}{2} d_k^T H_k d_k + \eta (\|g(x_k)\| - \|g(x_k) + \nabla g(x_k)^T v_k\|_2). \end{aligned} \quad (5.47)$$

em que as relações  $d_k = v_k + Z_k u_k$  e  $\nabla g(x_k)^T Z_k = 0$  são utilizadas.

Observe que o termo entre parênteses é positivo porque o cálculo do passo vertical  $v_k$  reduz o objetivo  $\|g(x_k) + \nabla g(x_k)^T v\|$  do seu valor inicial  $\|g(x_k)\|$  em  $v = 0$ .

Devemos especificar como o parâmetro de penalidade  $\eta$  é escolhido em cada iteração. Como condição básica [18], para todo passo  $d_k$  calculado escolhe-se  $\eta$  grande o suficiente

para que  $d_k$  resulte em uma redução do modelo da função mérito. Um valor tentativa para o parâmetro penalidade correspondente a esse passo  $d_k$  é:

$$\eta^+ = \max \left\{ \eta_k, 0.1 + \frac{\nabla f(x_k)^T d_k + \frac{1}{2} d_k^T H_k d_k}{\|g(x_k)\| - \|g(x_k) + \nabla g(x_k)^T v_k\|} \right\} \quad (5.48)$$

em que  $\eta_k$  é o parâmetro de penalidade da iteração anterior (com  $\eta_0 > 0$ ). Para esse valor do parâmetro de penalidade a redução prevista (5.47) é positiva.

Devemos agora verificar se a escolha de  $\eta^+$  leva também a uma redução na função mérito original (e não apenas no modelo). A redução real na função mérito  $\psi(x, \eta)$  é definida como:

$$\begin{aligned} \text{redr}(d_k) &= \psi(x_k, \eta^+) - \psi(x_k + d_k, \eta^+) \\ &= f(x_k) - f(x_k + d_k) + \eta^+ (\|g(x_k)\| - \|g(x_k + d_k)\|). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Em princípio, se  $\text{redr}(d_k)$  é suficientemente positivo, então  $d_k$  é aceito e  $\eta_{k+1} = \eta^+$ ; caso contrário, o valor tentativa  $\eta^+$  é descartado com  $d_k$ . Entretanto, na prática computacional há o risco de  $v_k$  ser tão pequeno que o denominador de (5.48) aproxima-se de zero e o valor de  $\eta^+$  torna-se muito grande. Por outro lado, isso acontece apenas quando as restrições já estão aproximadamente atendidas; como não há a necessidade, neste caso, de penalizar ainda mais as restrições, justifica-se manter  $\eta^+ = \eta_k$ .

#### Heurística para Modificar $\eta_k$

Conforme claramente analisado em [18], a convergência pode ser lenta se o parâmetro de penalidade não for apropriadamente modificado. Por (5.48) calcula-se  $\eta^+$  utilizando uma linearização das restrições, mas se as restrições são suficientemente não-lineares de forma que  $\|g(x_k)\| - \|g(x_k + d_k)\|$  não é tão grande quanto  $\|g(x_k)\| - \|g(x_k) + \nabla g(x_k)^T d_k\|$ , então o passo pode aumentar a função mérito (tornando  $\text{redr}$  negativo) e ser rejeitado. Assim, o algoritmo obtém passos aceitáveis somente com regiões de confiança suficientemente pequenas, e a convergência para uma solução é freada. Nesse caso, é vantajoso dar mais peso à satisfação das restrições, aumentando ainda mais o parâmetro de penalidade. Desta forma, um pequeno decréscimo  $\|g(x_k)\| - \|g(x_k + d_k)\|$  é suficiente para tornar  $\text{redr}$  positivo e permitir passos longos para uma solução. Entretanto, há um risco de  $\eta_k$  tornar-se



excessivamente grande e as iterações seguirem as restrições demasiadamente próximas, o que geralmente leva a um número excessivo de iterações na proximidade da solução. A heurística a seguir, apresentada em [18], leva em conta essas situações.

1. Calcule  $\eta^+$  utilizando (5.48).
2. Se  $\eta^+ > \eta_k$ ,  $\eta^+ < 5\eta_k$ ,  $\eta_k > \eta_{k-l}$ ,  $\|g(x_k)\| > \frac{1}{5}\|g(x_{k-l})\|$  e os dois últimos passos tentados não tiveram ambos sucesso, então:

$$\eta^+ = \min \{5\eta_k, \eta^+ + 25(\eta^+ - \eta_{k-l})\}$$

em que  $k-l$ , com  $l \geq 1$ , é o índice da iteração mais recente na qual o passo  $d_{k-l}$  foi aceito pelo algoritmo.

3. Se  $\eta^+ = \eta_k$ ,  $\|v_k\| < \frac{\xi\Delta_k}{10}$  e  $\|g(x_k)\|_\infty < 10^4\epsilon$ , então

$$\eta^+ = \max\{\eta_0, \bar{\eta}, \|\lambda_k\|\}$$

em que  $\bar{\eta}$  é o segundo termo entre chaves em (5.48).

Algoritmo 5.4: Heurística para modificar o parâmetro de penalidade.

A primeira condição *se* permite um aumento adicional em  $\eta^+$  se pouco progresso foi feito em direção à viabilidade ( $\|g(x_k)\| > \frac{1}{5}\|g(x_{k-l})\|$  — um indicativo de que o erro na restrição não está sendo suficientemente ponderado na função mérito) e se os dois últimos passos tentados não tiveram ambos sucesso, sugerindo que o modelo linearizado das restrições não é uma boa representação. Salvaguardas são incluídas para prevenir que o parâmetro de penalidade varie muito rapidamente ( $\eta^+ < 5\eta_k$ ) e para permitir aumentos apenas quando o parâmetro de penalidade já estiver com valor crescente ( $\eta_k > \eta_{k-l}$ ). A segunda condição *se* permite reduções de  $\eta^+$  apenas quando as iterações estão próximas de atender as restrições de igualdades. O  $\eta^+$  reduzido nunca é menor do que o valor  $\bar{\eta}$  necessário para assegurar que o passo é uma direção descendente para a função mérito, ou menor do que  $\|\lambda_k\|$ .

### Correção de Segunda Ordem

A função mérito (5.45) é não-diferenciável e, portanto, sofre do *efeito Maratos* [102], o que pode resultar em um mau desempenho em alguns problemas. O efeito pode ser contornado

calculando-se o termo de *correção de segunda ordem* e adicionando-o a  $d_k$ , fornecendo o novo ponto tentativa:

$$d_{\text{cso}} = d_k - \nabla g(x_k)(\nabla g(x_k)^T \nabla g(x_k))^{-1} g(x_k + d_k). \quad (5.50)$$

Como o cálculo de  $d_{\text{cso}}$  é computacionalmente oneroso, ele é calculado apenas se o passo  $d_k$  foi rejeitado, se  $x_k$  está próximo da viabilidade e se  $\|v_k\|$  é pequena comparada a  $\|Z_k u_k\|$ . Essas condições tentam identificar o efeito Maratos na proximidade de um ponto viável. Como proposto em [18], a introdução da correção de segunda ordem ocorre segundo a lógica do Algoritmo 5.5 abaixo.

1. Calcule  $\eta^+$  pelo Algoritmo 5.4,  $\text{redr}(d_k)$  por (5.49) e  $\text{redp}(d_k)$  por (5.47).
2. Se  $\frac{\text{redr}(d_k)}{\text{redp}(d_k)} \geq \bar{\rho}$ , então faça  $x_{k+1} = x_k + d_k$ ,  $\eta_{k+1} = \eta^+$ , e  $\Delta_{k+1} \geq \Delta_k$ , e **retorne**.
3. Se  $\|v_k\| \leq 0.8\xi\Delta_k$  e  $\|v_k\| \leq 0.1\|Z_k u_k\|$ , então calcule  $d_{\text{cso}}$  usando (5.50), recalcule  $\text{redr}(d_{\text{cso}})$  para  $d_{\text{cso}}$  e vá para o passo 4. Senão, faça  $x_{k+1} = x_k$ ,  $\eta_{k+1} = \eta_k$  e  $\Delta_{k+1} \leq \gamma\|d_k\|$ , e **retorne**.
4. Se  $\frac{\text{redr}(d_{\text{cso}})}{\text{redp}(d_k)} \geq \bar{\rho}$ , então faça  $x_{k+1} = x_k + d_{\text{cso}}$ ,  $\eta_{k+1} = \eta^+$ , e  $\Delta_{k+1} \geq \Delta_k$ , e **retorne**. Senão, faça  $x_{k+1} = x_k$ ,  $\eta_{k+1} = \eta_k$  e  $\Delta_{k+1} \leq \gamma\|d_k\|$ , e **retorne**.

Algoritmo 5.5: Análise da aceitação do novo ponto.

Observe que a redução prevista  $\text{redp}$  não é recalculada em  $d_{\text{cso}}$ , ao contrário da redução real  $\text{redr}$ , e que o teste de aceitação para o passo com correção de segunda ordem envolve ambas as quantidades. Essa condição é necessária na prova da convergência global do método, que pode ser encontrada em [18] e que não faz parte do escopo deste trabalho. Observe ainda que se  $d_{\text{cso}}$  é aceito ele pode violar a restrição de região de confiança; entretanto, a violação não deve ser grande porque  $v_k$  estava dentro de sua região.

#### 5.4.4 Modificando o Tamanho da Região de Confiança

O Algoritmo 5.5 não especifica claramente o tamanho da região de confiança, apenas se o raio deve ser aumentado, mantido ou reduzido. A seguir, descrevemos o esquema proposto em [18] para atualização da região de confiança. Quando um passo  $d_k$  (ou  $d_{\text{cso}}$ ) é aceito o

tamanho da região de confiança é aumentado conforme a regra:

$$\Delta_{k+1} = \begin{cases} \max \{10\|d_k\|, \Delta_k\} & \text{se } 0.9 \leq \frac{\text{redr}}{\text{redp}} \\ \max \{2\|d_k\|, \Delta_k\} & \text{se } 0.3 \leq \frac{\text{redr}}{\text{redp}} < 0.9 \\ \Delta_k & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.51)$$

Quando um passo é rejeitado,  $\Delta_{k+1}$  é reduzido para uma fração  $\gamma \in [0.1, 0.5]$  do comprimento do passo rejeitado. O valor preciso é calculado por retroação ao longo de  $d_k$  para um ponto adequado utilizando uma função linear ou quadrática de comprimento de passo que aproxima a relação  $\text{redr}/\text{redp}$ . No caso da função linear, o escalar  $\gamma$  é calculado por:

$$\gamma = \frac{1 - \rho}{1 - \frac{\text{redr}}{\text{redp}}} \quad (5.52)$$

e esse valor é salvaguardado para estar dentro do intervalo  $[0.1, 0.5]$  antes de fazer  $\Delta_{k+1} = \gamma\|d_k\|$ . No caso da função quadrática, a regra é a seguinte:

$$\gamma = \begin{cases} \frac{0.5\dot{p}(0)}{\dot{p}(0) - \frac{\text{redr}}{\text{redp}}} & \text{se } \frac{\text{redr}}{\text{redp}} - \dot{p}(0)\|d_k\| - 1 > 0 \\ 0.1 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.53)$$

em que  $\dot{p}(0)$  é a derivada direcional de  $\text{redp}$  em  $x_k$  na direção  $d_k$ , sendo esta quantidade limitada por

$$\dot{p}(0) \leq -\nabla f(x_k)^T d_k + \eta_{k+1} \|\nabla g(x_k)^T d_k\|.$$

O valor máximo é utilizado para  $\dot{p}(0)$ . Segundo Plantenga em [18], tanto o esquema linear quanto o quadrático desempenham bem, e uma combinação dos dois é utilizada. Se  $\|d_k\| < \Delta_k$ , então o esquema quadrático é utilizado; caso contrário, usa-se a fórmula linear.

### 5.4.5 Assegurando as Restrições de Limites Simples

A restrição de região de confiança não garante que as restrições de limites sejam atendidas em toda iteração. No entanto, a função de barreira logarítmica requer que essas restrições

sejam atendidas por todos os pontos. Para assegurar esta condição, similar aos métodos de pontos-interiores tipo primal-dual, consideramos uma busca em linha utilizando o teste de razões simples:

$$\alpha_k = \min \left\{ \frac{x_i - x_k^i}{d_k^i} \middle| d_i^k < 0, \frac{\bar{x}_i - x_k^i}{d_k^i} \middle| d_i^k > 0 \right\} \quad (5.54)$$

Se  $\alpha_k < 1$  então uma ou mais componentes de  $x_k + d_k$  está violando um de seus limites. Em tal caso, o algoritmo recua ao longo do passo para um ponto no interior das restrições de limites, ajustando  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ . Uma vez que um passo  $\alpha_k < 1$  fornece um ponto exatamente sobre o limite mais violado e no interior dos outros limites, então obtemos um ponto estritamente interior fazendo  $\alpha_k \leftarrow 0.9995\alpha_k$ .

#### 5.4.6 Sumário do Algoritmo de Byrd-Omojokun

1. Faça  $k = 0$ , escolha  $x_0$  estritamente dentro dos limites, defina o tamanho máximo da região de confiança  $\bar{\Delta} > 0$ , escolha  $\Delta_0 \in (0, \bar{\Delta})$ ,  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ ,  $\bar{\rho} \in (0, \frac{1}{2}]$ ,  $\gamma_1 \in (0, 1)$  e  $\gamma_2 > 1$ .
2. Calcule  $f(x_k)$ ,  $\nabla f(x_k)$ ,  $g(x_k)$   $\nabla g(x_k)$  e uma estimativa dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda_k$  por (5.38).
3. Se  $\|\nabla f(x_k) + \nabla g(x_k)^T \lambda_k\| < \epsilon$  e  $\|g(x_k)\|_\infty < \epsilon$ , então **PARE**.
4. Monte e resolva o subproblema normal (5.12) para o passo vertical  $v_k$  utilizando o método *dogleg*.
5. Monte e resolva o subproblema tangencial (5.15) para o passo horizontal  $Z_k u_k$  utilizando o método de Steihaug.
6. Obtenha uma solução aproximada do subproblema de região de confiança (5.4) como  $d_k = v_k + Z_k u_k$ .
7. Calcule  $\eta^+$  utilizando a heurística dada no Algoritmo 5.4.
8. Calcule  $\text{redr}(d_k)$  por (5.49) e  $\text{redp}(d_k)$  por (5.47).
9. Calcule  $x_{k+1}$ ,  $\eta_{k+1}$  e  $\Delta_{k+1}$  conforme o Algoritmo 5.5. Faça  $k = k + 1$  e retorne para o passo 2.

Algoritmo 5.6: Algoritmo de Byrd-Omojokun.

## 5.5 Considerações Finais

Neste capítulo, fez-se uma revisão sobre a estratégia clássica de região de confiança, a qual é utilizada para resolução de problemas de otimização irrestrita, e apresentou-se o algoritmo geral de região de confiança para minimização irrestrita.

Os problemas de FPO estudados nesta tese possuem a forma geral:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & g(x) = 0, \\ & \underline{x} \leq x \leq \bar{x}. \end{aligned}$$

de forma que é necessário adaptar-se a estratégia clássica de região de confiança para resolver problemas restritos. Para esse fim, várias técnicas vêm sendo desenvolvidas [9, 16–18] e a técnica empregada nesta pesquisa é baseada na técnica de Byrd-Omojokun.

A técnica de Byrd-Omojokun foi detalhadamente apresentada neste capítulo. Testes computacionais utilizando a técnica descrita revelaram que o algoritmo apresentado não se adequou à resolução dos problemas de FPO devido ao seguinte: nas restrições ativas, ou seja, que atingem o limite, a barreira logarítmica não é definida. Aplica-se, então, a contração do passo para trazer o ponto para dentro dos limites, como descrito na seção 5.4.5; com isso, a convergência tornou-se extremamente lenta. Para resolver esse problema, propõe-se uma associação do método de Byrd-Omojokun com os métodos de pontos-interiores do tipo primal-dual e preditor-corretor. Nessa nova abordagem, os subproblemas de RC, vertical e horizontal, são resolvidos por algoritmos de PI em vez dos algoritmos *dogleg* e de Steihaug, como no método de Byrd-Omojokun original. Essa modificação na técnica de Byrd-Omojokun é descrita no próximo capítulo.

# Capítulo 6

---

## Métodos de Região de Confiança Associados a Métodos de Pontos-Interiores

---

**N**ESTE CAPÍTULO APRESENTA-SE uma associação do método de região de confiança de Byrd-Omojokun com os métodos de pontos-interiores descritos no Capítulo 3. Essa associação pode ser feita de duas formas principais: i) aplicando-se um método de região de confiança ao problema de barreira logarítmica para globalizar a sua solução, ou ii) aplicando-se o algoritmo de pontos-interiores na resolução dos subproblemas de região de confiança. Nesta tese segue-se a segunda abordagem. Para esse fim, com base no trabalho de Gomes, Maciel e Martínez em [103], definimos a restrição de região

de confiança (5.4d) usando a norma infinita, de forma que o subproblema de região de confiança é redefinido como:

$$\text{Minimize } f(x_k) + \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T H_k d \quad (6.1a)$$

$$\text{sujeito a } g(x_k) + \nabla g(x_k)^T d = 0 \quad (6.1b)$$

$$\underline{x} \leq x_k + d \leq \bar{x} \quad (6.1c)$$

$$\|d\|_\infty \leq \Delta_k \quad (6.1d)$$

Observe que as restrições (6.1c) e (6.1d) sobre o passo  $d$  podem ser combinadas em uma única restrição, e o subproblema de região de confiança é reescrito como:

$$\text{Minimize } f(x_k) + \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T H_k d \quad (6.2a)$$

$$\text{sujeito a } g(x_k) + \nabla g(x_k)^T d = 0 \quad (6.2b)$$

$$\max\{\underline{x} - x_k, -\Delta_k\} \leq d \leq \min\{\bar{x} - x_k, \Delta_k\} \quad (6.2c)$$

Ao definirmos a restrição de região de confiança utilizando a norma infinita, todas as restrições em (6.2) são lineares e, assim, o subproblema de região de confiança é um problema de PQ. Entretanto, independente da norma utilizada, é possível que a restrição de região de confiança (6.2c) restrinja o tamanho de passo  $d$  de forma tal que as restrições (6.2b) tornem-se incompatíveis [9]. Ou seja, um passo  $d$  que satisfaz (6.2b) pode não interceptar a região de confiança (6.2c).

Para resolver o possível conflito no atendimento de (6.2b) e (6.2c), na técnica de Byrd-Omojokun a solução de (6.2) é dividida em dois subproblemas, vertical e horizontal, conforme descrito no Capítulo 5. Usando a norma infinita, o subproblema vertical é definido como:

$$\text{Minimize } \frac{1}{2} \|g(x_k) + \nabla g(x_k)^T v\|_2^2 \quad (6.3a)$$

$$\text{sujeito a } \max\{\underline{x} - x_k, -\xi \Delta_k\} \leq v \leq \min\{\bar{x} - x_k, \xi \Delta_k\} \quad (6.3b)$$

em que  $\xi \in (0, 1)$  é um fator de contração que define uma região de confiança mais reduzida (tipicamente,  $\xi = 0.8$ ).

Ignorando o termo constante na função objetivo quadrática, o subproblema (6.3) pode

ser reescrito como:

$$\text{Minimize } (\nabla g(x_k)g(x_k))^T v + \frac{1}{2}v^T \nabla g(x_k)\nabla g(x_k)^T v \quad (6.4a)$$

$$\text{sujeito a } \max\{\underline{x} - x_k, -\xi\Delta_k\} \leq v \leq \min\{\bar{x} - x_k, \xi\Delta_k\} \quad (6.4b)$$

Após resolver aproximadamente o subproblema vertical para o passo vertical  $v_k$ , o passo completo  $d_k$  é obtido resolvendo-se o subproblema horizontal:

$$\text{Minimize } \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2}d^T H_k d \quad (6.5a)$$

$$\text{sujeito a } \nabla g(x_k)^T d = \nabla g(x_k)^T v_k \quad (6.5b)$$

$$\max\{\underline{x} - x_k, -\Delta_k\} \leq d \leq \min\{\bar{x} - x_k, \Delta_k\}. \quad (6.5c)$$

Diferentemente do subproblema vertical (6.4), o conjunto de restrições do subproblema horizontal (6.5) é composto pela restrição de região de confiança e pelas restrições de igualdades. Para reformular (6.5) sem as restrições de igualdades, Byrd e Omojokun propuseram calcular  $d$  por meio de um passo complementar a  $v_k$ , conforme descrito no Capítulo 5, ou seja:

$$d = v_k + Z_k u \quad (6.6)$$

em que  $u \in \mathbb{R}^{n-m}$  está por ser determinado.

Assim, considerando (6.6) em (6.5), observando que  $v_k$  e  $Z_k u$  são ortogonais e ignorando os termos constantes, o subproblema horizontal (6.5) pode ser reescrito sem restrições de igualdades, na forma:

$$\text{Minimize } \nabla \bar{f}(x_k)^T Z_k u + \frac{1}{2}u^T Z_k^T H_k Z_k u \quad (6.7a)$$

$$\text{sujeito a } \max\{\underline{x} - x_k, -\Delta_k\} - v_k \leq Z_k u \leq \min\{\bar{x} - x_k, \Delta_k\} - v_k. \quad (6.7b)$$

**Forma Padrão dos Subproblemas:** Antes da apresentação dos algoritmos de solução dos subproblemas vertical e horizontal, vamos definir uma notação e uma forma padrão



única para os dois subproblemas, como segue:

$$\text{Minimize } \phi(w) = b_k^T w + \frac{1}{2} w^T A_k w \quad (6.8a)$$

$$\text{sujeito a } \underline{w} \leq C_k w \leq \bar{w} \quad (6.8b)$$

em que o índice  $k$  significa um subproblema na iteração  $k$ .

Para modelar o subproblema vertical (6.4), definimos:

$$w = v \quad (6.9a)$$

$$b_k = \nabla g(x_k) g(x_k) \quad (6.9b)$$

$$A_k = \nabla g(x_k) \nabla g(x_k)^T \quad (6.9c)$$

$$C_k = I \quad (6.9d)$$

$$\underline{w} = \max\{\underline{x} - x_k, -\xi \Delta_k\} \quad (6.9e)$$

$$\bar{w} = \min\{\bar{x} - x_k, \xi \Delta_k\}. \quad (6.9f)$$

Dado que a matriz de gradientes  $\nabla g(x_k)$  é de dimensão  $n \times m$  com  $n > m$ , então a matriz  $A_k$   $n \times n$  definida em (6.9c) é singular, simétrica semidefinida positiva, e possui  $n - m$  vetores nulos linearmente independentes. Para modelar o subproblema horizontal (6.7), definimos:

$$w = u \quad (6.10a)$$

$$b_k = Z_k^T \nabla \bar{f}(x_k) \quad (6.10b)$$

$$A_k = Z_k^T H_k Z_k \quad (6.10c)$$

$$C_k = Z_k \quad (6.10d)$$

$$\underline{w} = \max\{\underline{x} - x_k, -\Delta_k\} - v_k \quad (6.10e)$$

$$\bar{w} = \min\{\bar{x} - x_k, \Delta_k\} - v_k. \quad (6.10f)$$

Sendo  $C_k = Z_k$  de dimensão  $n \times (n - m)$ , então a dimensão de  $\underline{w}$  e  $\bar{w}$  em (6.10e) e (6.10f) é a dimensão  $n$  do vetor  $x$  em vez de  $n - m$  do vetor  $w$ .

## 6.1 Método Primal-Dual de Pontos-Interiores para PQ

O método primal-dual de pontos-interiores para resolver o problema (6.8) opera sobre um problema modificado que emerge quando transformamos todas as desigualdades em igualdades, adicionando os vetores de folga  $r \geq 0$  e  $s \geq 0$ , como segue:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & b_k^T w + \frac{1}{2} w^T A_k w \\ \text{sujeito a} \quad & \underline{w} + r - C_k w = 0, \quad r \geq 0, \\ & C_k w + s - \bar{w} = 0, \quad s \geq 0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

As condições de não-negatividade  $r \geq 0$  e  $s \geq 0$  em (6.11) são incorporadas em uma função de barreira logarítmica que é agregada à função objetivo, resultando no problema modificado:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & b_k^T w + \frac{1}{2} w^T A_k w - \mu_{k_i} \sum_{i=1}^p (\ln r_i + \ln s_i) \\ \text{sujeito a} \quad & \underline{w} + r - C_k w = 0, \quad r > 0, \\ & C_k w + s - \bar{w} = 0, \quad s > 0, \end{aligned} \tag{6.12}$$

em que  $\mu_{k_i} > 0$  é o *parâmetro de barreira* que é monotonicamente reduzido para zero quando as iterações avançam, ou seja,  $\mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_k > \dots > \mu_\infty = 0$ .

As condições de positividade estrita  $s > 0$  e  $z > 0$  devem ser impostas para que os termos logarítmicos sejam definidos. Entretanto, essas condições são tratadas implicitamente, pelo controle do tamanho do passo, conforme é descrito abaixo.

As condições necessárias de otimalidade para o problema modificado (6.12), com o parâmetro de barreira  $\mu_{k_i}$  fixo, podem ser derivadas a partir de uma função de Lagrange  $L(y; \mu_{k_i})$  associada ao problema (6.12), definida como:

$$L(y; \mu_{k_i}) = b_k^T w + \frac{1}{2} w^T A_k w - \mu_{k_i} \sum_{i=1}^p (\ln r_i + \ln s_i) + \pi^T (\underline{w} + r - C_k w) + \nu^T (C_k w + s - \bar{w}) \tag{6.13}$$

em que  $\pi \in \mathbb{R}_+^p$  e  $\nu \in \mathbb{R}_+^p$  são vetores de multiplicadores de Lagrange, conhecidos como variáveis duais, e  $y = (r, s, \pi, \nu, w)$  é o vetor com todas as variáveis.

Um mínimo local de (6.12) é caracterizado por um ponto estacionário da função de Lagrange  $L(y; \mu_{k_i})$ , o qual deve satisfazer as condições necessárias de primeira-ordem de KKT:

$$\nabla_r L = \pi - \mu_k R^{-1} e = 0, \quad (6.14a)$$

$$\nabla_s L = v - \mu_k S^{-1} e = 0, \quad (6.14b)$$

$$\nabla_\pi L = \underline{w} + r - C_k w = 0, \quad (6.14c)$$

$$\nabla_v L = C_k w + s - \bar{w} = 0, \quad (6.14d)$$

$$\nabla_w L = b_k + A_k w - C_k^T \pi + C_k^T v = 0, \quad (6.14e)$$

em que  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ . O sistema de KKT (6.14) é mais convenientemente expresso como:

$$R\pi - \mu_{k_i} e = 0, \quad (6.15a)$$

$$Sv - \mu_{k_i} e = 0, \quad (6.15b)$$

$$\underline{w} + r - C_k w = 0, \quad (6.15c)$$

$$C_k w + s - \bar{w} = 0, \quad (6.15d)$$

$$b_k + A_k w - C_k^T \pi + C_k^T v = 0. \quad (6.15e)$$

Uma iteração do método primal-dual de PI para resolver (6.8) invariavelmente aplica apenas uma iteração do método de Newton para achar raízes de equações sobre (6.15), calcula um comprimento de passo na direção de Newton, atualiza as variáveis e reduz o parâmetro de barreira  $\mu_{k_i}$ . O processo iterativo termina quando a inviabilidade primal e dual e o resíduo de complementaridade estão abaixo de tolerâncias pré-determinadas. Os passos principais do algoritmo primal-dual de PI são como segue:

1. Faça  $k = 0$ , escolha  $\mu_0 > 0$  e um ponto inicial  $y_0$  que satisfaça as condições de estrita positividade  $(r_0, s_0, \pi_0, \nu_0) > 0$ .
2. Obtenha o sistema de Newton para (6.15) no ponto corrente,

$$\nabla_{yy}^2 L(y_{k_i}; \mu_{k_i}) \Delta y = -\nabla_y L(y_{k_i}; \mu_{k_i}),$$

e resolva para a direção de Newton  $\Delta y$ .

3. Calcule o comprimento de passo  $\alpha_k$  na direção de Newton  $\Delta y$  e obtenha uma nova estimativa da solução como  $y_{k_i+1} = y_{k_i} + \alpha_{k_i} \Delta y$ .
4. Se  $y_{k_i+1}$  satisfaz o critério de convergência, então FIM. Caso contrário, faça  $k_i \leftarrow k_i + 1$ , reduza o parâmetro  $\mu_{k_i}$ , e retorne para o passo 2.

Algoritmo 6.1: Método primal-dual de pontos interiores para resolver (6.8).

### 6.1.1 Cálculo das Direções de Busca

Embora o sistema das condições de KKT (6.15) seja não-linear, sua solução é usualmente aproximada por *uma única* iteração do método de Newton para achar raízes de equações (a direção de Newton é apenas um meio para seguir o caminho de minimizadores  $w(\mu_{k_i})$  parametrizado por  $\mu_{k_i}$ ). Quando tomamos os termos de primeira-ordem na aproximação em série de Taylor do sistema de equações não-lineares (6.15) em torno do ponto  $y_{k_i}$ , obtemos o seguinte sistema linear indefinido:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & S & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -C_k \\ 0 & I & 0 & 0 & C_k \\ 0 & 0 & -C_k^T & C_k^T & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \\ \Delta \pi \\ \Delta \nu \\ \Delta w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R\pi - \mu_{k_i} e \\ S\nu - \mu_{k_i} e \\ \underline{w} + r - C_k w \\ C_k w + s - \overline{w} \\ b_k + A_k w - C_k^T \pi + C_k^T \nu \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

em que  $\Pi = \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_p)$  e  $Y = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_p)$ . No sistema acima omitimos o contador de iterações internas  $k_i$  (de pontos-interiores) para simplificar a apresentação.

### 6.1.2 Atualização das Variáveis

Novas estimativas para as variáveis primais e duais são calculadas por:

$$\begin{aligned}
 w_{k+1} &= w_k + \alpha_{k_i}^P \Delta w, \\
 r_{k+1} &= r_k + \alpha_{k_i}^P \Delta r, \\
 s_{k+1} &= s_k + \alpha_{k_i}^P \Delta s, \\
 \pi_{k+1} &= \pi_k + \alpha_{k_i}^D \Delta \pi, \\
 v_{k+1} &= v_k + \alpha_{k_i}^D \Delta v,
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

em que  $\alpha_{k_i}^P \in (0, 1]$  e  $\alpha_{k_i}^D \in (0, 1]$  são os comprimentos de passos *primal* e *dual*, respectivamente.

Os comprimentos de passos máximos que podem ser tomados na direção de Newton são geralmente determinados pelos testes:

$$\alpha_{k_i}^P = \min \left\{ 1, \gamma \min_i \left\{ \frac{-r_i^{k_i}}{\Delta r_i} \Delta r_i < 0, \frac{-s_i^{k_i}}{\Delta s_i} \Delta s_i < 0 \right\} \right\}, \tag{6.18a}$$

$$\alpha_{k_i}^D = \min \left\{ 1, \gamma \min_i \left\{ \frac{-\pi_i^{k_i}}{\Delta \pi_i} \Delta \pi_i < 0, \frac{-v_i^{k_i}}{\Delta v_i} \Delta v_i < 0 \right\} \right\}. \tag{6.18b}$$

O escalar  $\gamma \in (0, 1)$  é um fator de segurança para assegurar que o próximo ponto satisfará as condições de estrita positividade; um valor típico é  $\gamma = 0.99995$ .

Em programação não-linear, a interdependência de variáveis primais e duais, presente na condição de viabilidade dual, não permite rigorosamente o uso de comprimentos de passos distintos nos espaços primal e dual. Assim, um comprimento de passo comum para atualizar as variáveis primais e duais deve ser calculado por:

$$\alpha_{k_i}^P = \alpha_{k_i}^D \leftarrow \min \{ \alpha_{k_i}^P, \alpha_{k_i}^D \}. \tag{6.19}$$

### 6.1.3 Redução do Parâmetro de Barreira

Na  $k_i$ -ésima iteração, o resíduo das condições de complementaridade, chamado de *resíduo de complementaridade*, é obtido por:

$$\rho_{k_i} = r_{k_i}^T \pi_{k_i} + s_{k_i}^T \nu_{k_i}. \quad (6.20)$$

Se as iterações convergem para uma solução ótima, então  $\rho_k \rightarrow 0$ . O relacionamento entre  $\rho_{k_i}$  e  $\mu_{k_i}$ , que está implícito em (6.15a) e (6.20), na forma:

$$\sum_{i=1}^p r_i \pi_i + \sum_{i=1}^p s_i \nu_i = 2p\mu_{k_i} = \rho \quad (6.21)$$

sugere que  $\mu_{k_i}$  pode ser reduzido em função do decréscimo do resíduo de complementaridade, tal como:

$$\mu_{k_{i+1}} = \sigma \frac{\rho_{k_i}}{2p} \quad (6.22)$$

em que  $\sigma = 0.2$  é o esperado, mas não necessariamente realizado, decréscimo no resíduo de complementaridade.

O parâmetro  $\sigma \in (0, 1)$  é chamado de *parâmetro de centralização*. Se  $\sigma = 1$ , então o sistema de KKT (6.15) define uma *direção de centralização*, um passo em direção a um ponto na trajetória de barreira. No outro extremo,  $\sigma = 0$  fornece o passo de Newton puro, conhecido como a *direção affine-scaling*. Para balancear os objetivos de reduzir  $\mu_k$  e melhorar a centralidade,  $\sigma$  pode ser escolhido no intervalo  $(0, 1)$ .

### 6.1.4 Testes de Convergência

As iterações do algoritmo primal-dual de pontos-interiores são consideradas terminadas assim que:

$$\max \left\{ \max \left\{ \underline{w} - C_k w_{k_i} \right\}, \max \left\{ C_k w_{k_i} - \bar{w} \right\} \right\} \leq \epsilon_1, \quad (6.23a)$$

$$\frac{\|b_k + A_k w_{k_i} - C_k^T \pi_{k_i} + C_k^T u_{k_i}\|_\infty}{1 + \|w_{k_i}\|_2 + \|\pi_{k_i}\|_2 + \|u_{k_i}\|_2} \leq \epsilon_1, \quad (6.23b)$$

$$\frac{\rho_{k_i}}{1 + \|w_{k_i}\|_2} \leq \epsilon_2. \quad (6.23c)$$

## 6.2 Método Preditor-Corretor de Pontos Interiores para PQ

Para obtermos o algoritmo preditor-corretor de Mehrotra, em vez de aplicarmos o método de Newton a (6.15) para calcularmos uma correção  $\Delta y$  para  $y_{k_i}$ , substituímos o novo ponto  $y_{k_i+1} = y_{k_i} + \Delta y$  diretamente em (6.15), para obter a aproximação:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & S & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -C_k \\ 0 & I & 0 & 0 & C_k \\ 0 & 0 & -C_k^T & C_k^T & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \\ \Delta \pi \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R\pi \\ S v \\ \underline{w} + r - C_k w \\ C_k w + s - \bar{w} \\ b_k + A_k w - C_k^T \pi + C_k^T v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{k_i} e \\ \mu_{k_i} e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta R \Delta \pi \\ \Delta S \Delta v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

em que  $\Delta R = \text{diag}(\Delta r_1, \dots, \Delta r_p)$  e  $\Delta S = \text{diag}(\Delta s_1, \dots, \Delta s_p)$ .

A direção  $\Delta y$  que é obtida de (6.24) consiste de três componentes:

$$\Delta y = \Delta y_{\text{af}} + \Delta y_{\text{ce}} + \Delta y_{\text{co}}, \quad (6.25)$$

em que cada componente é determinada por um dos três vetores no lado direito de (6.24).

As três componentes de direções podem ser interpretadas como segue:

- $\Delta y_{\text{af}}$  é a direção *affine-scaling*, a direção pura de Newton que é obtida quando fazemos  $\mu_{k_i} = 0$  em (6.16). É determinada pelo primeiro vetor no lado direito de (6.24),

ou seja, como a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & S & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -C_k \\ 0 & I & 0 & 0 & C_k \\ 0 & 0 & -C_k^T & C_k^T & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_{af} \\ \Delta s_{af} \\ \Delta \pi_{af} \\ \Delta v_{af} \\ \Delta w_{af} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R\pi \\ Sv \\ \underline{w} + r - C_k w \\ C_k w + s - \bar{w} \\ b_k + A_k w - C_k^T \pi + C_k^T v \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

e é responsável por reduzir as inviabilidades primal e dual e o resíduo de complementaridade.

- $\Delta y_{ce}$  é a direção de *centralização*, cujo tamanho é governado pelo parâmetro  $\mu_{k_i}$  que é escolhido adaptativamente. A direção  $\Delta y_{ce}$  é determinada pelo segundo vetor no lado direito de (6.24), ou seja, como a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & S & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -C_k \\ 0 & I & 0 & 0 & C_k \\ 0 & 0 & -C_k & C_k & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_{ce} \\ \Delta s_{ce} \\ \Delta \pi_{ce} \\ \Delta v_{ce} \\ \Delta w_{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{k_i} e \\ \mu_{k_i} e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

e mantém o ponto corrente afastado da fronteira da região viável e idealmente próximo da trajetória de barreira para melhorar as chances de tomar um passo grande na próxima iteração.

- $\Delta y_{co}$  é a direção de *correção* que tenta compensar algumas das não-linearidades na direção  $\Delta y_{af}$ . A direção  $\Delta y_{co}$  é determinada pelo terceiro vetor no lado direito de (6.24), ou seja, como a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & S & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -C_k \\ 0 & I & 0 & 0 & C_k \\ 0 & 0 & -C_k^T & C_k^T & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_{co} \\ \Delta s_{co} \\ \Delta \pi_{co} \\ \Delta v_{co} \\ \Delta w_{co} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta R \Delta \pi \\ \Delta S \Delta v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$



### 6.2.1 O Passo Preditor

Para determinar um passo que aproximadamente satisfaz (6.24), primeiro retiramos os  $\mu_k$ -termos e os  $\Delta$ -termos no lado direito de (6.24) e resolvemos para a direção *affine-scaling*:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & S & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -C_k \\ 0 & I & 0 & 0 & C_k \\ 0 & 0 & -C_k^T & C_k^T & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_{\text{af}} \\ \Delta s_{\text{af}} \\ \Delta \pi_{\text{af}} \\ \Delta v_{\text{af}} \\ \Delta w_{\text{af}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R\pi \\ S v \\ \underline{w} + r - C_k w \\ C_k w + s - \bar{w} \\ b_k + A_k w - C_k^T \pi + C_k^T v \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Para estimar  $\mu_{k_i+1}$ , primeiro consideramos a regra padrão em (6.18) para determinarmos o passo  $\alpha_{\text{af}}$  que seria dado se a direção  $\Delta y_{\text{af}}$  fosse, de fato, utilizada:

$$\alpha_{\text{af}}^P = \min \left\{ 1, \gamma \times \min_i \left\{ \frac{-r_i^{k_i}}{\Delta r_i^{\text{af}}} \left| \Delta r_i^{\text{af}} < 0, \frac{-s_i^{k_i}}{\Delta s_i^{\text{af}}} \left| \Delta s_i^{\text{af}} < 0 \right. \right\} \right\}, \quad (6.30a)$$

$$\alpha_{\text{af}}^D = \min \left\{ 1, \gamma \times \min_i \left\{ \frac{-\pi_i^{k_i}}{\Delta \pi_i^{\text{af}}} \left| \Delta \pi_i^{\text{af}} < 0, \frac{-v_i^{k_i}}{\Delta v_i^{\text{af}}} \left| \Delta v_i^{\text{af}} < 0 \right. \right\} \right\}. \quad (6.30b)$$

Segundo, calculamos uma estimativa do resíduo de complementaridade por:

$$\rho_{\text{af}} = (r_{k_i} + \alpha_{\text{af}}^P \Delta r_{\text{af}})^T (\pi_{k_i} + \alpha_{\text{af}}^D \Delta \pi_{\text{af}}) + (s_{k_i} + \alpha_{\text{af}}^P \Delta s_{\text{af}})^T (v_{k_i} + \alpha_{\text{af}}^D \Delta v_{\text{af}}). \quad (6.31)$$

Finalmente, obtemos uma estimativa  $\mu_{\text{af}}$  para  $\mu_{k_i+1}$  por:

$$\mu_{\text{af}} = \min \left\{ \left( \frac{\rho_{\text{af}}}{\rho_{k_i}} \right)^2, 0.2 \right\} \frac{\rho_{\text{af}}}{p}. \quad (6.32)$$

### 6.2.2 O Passo Corretor

A direção  $\Delta y$  é calculada por:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & S & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -C_k \\ 0 & I & 0 & 0 & C_k \\ 0 & 0 & -C_k^T & C_k^T & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \\ \Delta \pi \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R\pi - \mu_{af}e + \Delta R_{af}\Delta\pi_{af} \\ S\nu - \mu_{af}e + \Delta S_{af}\Delta\nu_{af} \\ \underline{w} + r - C_k w \\ C_k w + s - \bar{w} \\ b_k + A_k w - C_k^T \pi + C_k^T \nu \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Os passos principais do algoritmo preditor-corretor de pontos interiores são como segue:

1. Faça  $k_i = 0$ , escolha  $\mu_0 > 0$  e um ponto inicial  $y_0$  que satisfaça as condições de estrita positividade  $(r_0, s_0, \pi_0, \nu_0) > 0$ .
2. Forme a matriz  $\nabla_{yy}^2 L(y_{k_i}; \mu_{k_i})$  e obtenha a sua fatorização.
  - 2a. Resolva o sistema (6.26) para a direção  $\Delta y_{af}$ , calcule  $\alpha_{af}$  de (6.30), e obtenha  $\mu_{af}$  de (6.31).
  - 2b. Resolva o sistema (6.33) para a direção  $\Delta y$ .
3. Calcule o comprimento de passo  $\alpha_{k_i}$  na direção  $\Delta y$  e obtenha um novo ponto como  $y_{k_i+1} = y_{k_i} + \alpha_{k_i} \Delta y$ .
4. Se  $y_{k_i+1}$  satisfaz o critério de convergência, então FIM. Caso contrário, faça  $k_i \leftarrow k_i + 1$ , reduza o parâmetro  $\mu_{k_i}$ , e retorne para o passo 2.

Algoritmo 6.2: Método preditor-corretor de pontos interiores para resolver (6.8).

## 6.3 Solução do Subproblema Horizontal sem Calcular $Z_k$

Admitindo que o cálculo da matriz  $Z_k$  seja computacionalmente oneroso, pode-se calcular o passo completo  $d_k$ , após o cálculo do passo vertical  $v_k$ , resolvendo-se o subproblema (6.5),

repetido abaixo por conveniência:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T H_k d \\ \text{sujeito a} \quad & \nabla g(x_k)^T d = \nabla g(x_k)^T v_k \\ & \max\{\underline{x} - x_k, -\Delta_k\} \leq d \leq \min\{\bar{x} - x_k, \Delta_k\}. \end{aligned}$$

Esse problema não pode ser diretamente colocado na forma padrão (6.8) devido à presença da restrição linear de igualdade. Porém, as implicações nos algoritmos de PI apresentados são mínimas, envolvendo basicamente uma modificação no sistema de Newton, a inclusão de mais um vetor na atualização de variáveis e a modificação dos testes de viabilidade primal e dual. Os elementos comuns ao problema padrão são:

$$w = d \quad (6.34a)$$

$$b_k = \nabla f(x_k) \quad (6.34b)$$

$$A_k = H_k \quad (6.34c)$$

$$C_k = I \quad (6.34d)$$

$$\underline{w} = \max\{\underline{x} - x_k, -\Delta_k\} \quad (6.34e)$$

$$\bar{w} = \min\{\bar{x} - x_k, \Delta_k\}. \quad (6.34f)$$

O novo sistema de Newton é como segue:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & S & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_k \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & C_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla g(x_k)^T \\ 0 & 0 & -C_k^T & C_k^T & \nabla g(x_k) & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \\ \Delta \pi \\ \Delta v \\ \Delta \theta \\ \Delta w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R\pi - \mu_{k_i} e \\ S v - \mu_{k_i} e \\ \underline{w} + r - C_k w \\ C_k w + s - \bar{w} \\ \nabla g(x_k)^T (w - v_k) \\ b_k + A_k w + \nabla g(x_k) \theta - C_k^T \pi + C_k^T v \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

A atualização das variáveis inclui o vetor de multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdades:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \alpha_k^D \Delta \theta \quad (6.36)$$

enquanto os testes de viabilidade primal e dual passam a ser da forma:

$$\max \left\{ \max \left\{ \underline{w} - C_k w_{k_i} \right\}, \max \left\{ C_k w_{k_i} - \bar{w} \right\}, \|\nabla g(x_k)(w_{k_i} - v_k)\|_\infty \right\} \leq \epsilon_1, \quad (6.37)$$

$$\frac{\|b_k + A_k w_{k_i} + \nabla g(x_k)\theta_{k_i} - C_k^T \pi_{k_i} + C_k^T v_{k_i}\|_\infty}{1 + \|w_{k_i}\|_2 + \|\theta_{k_i}\|_2 + \|\pi_{k_i}\|_2 + \|v_{k_i}\|_2} \leq \epsilon_1. \quad (6.38)$$

Os demais passos dos algoritmos de PI são como descritos nas seções anteriores para o problema padrão.

## 6.4 Sumário do Algoritmo de Região de Confiança

1. Faça  $k = 0$ , escolha  $x_0$  estritamente dentro dos limites, defina o tamanho máximo da região de confiança  $\bar{\Delta} > 0$ , escolha  $\Delta_0 \in (0, \bar{\Delta})$ ,  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ ,  $\bar{\rho} \in (0, \frac{1}{2}]$ ,  $\gamma_1 \in (0, 1)$  e  $\gamma_2 > 1$ .
2. Calcule  $f(x_k)$ ,  $\nabla f(x_k)$ ,  $g(x_k)$  e  $\nabla g(x_k)$ , e uma estimativa dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda_k$  por (5.38).
3. Se  $\|\nabla f(x_k) + \nabla g(x_k)^T \lambda_k\| < \epsilon$  e  $\|g(x_k)\|_\infty < \epsilon$ , então PARE.
4. Monte e resolva o subproblema vertical (6.4) para o passo vertical  $v_k$ .
5. Monte e resolva o subproblema horizontal (6.7) para o passo tangencial  $Z_k u_k$ .
6. Obtenha uma solução aproximada do subproblema de região de confiança (6.2) como  $d_k = v_k + Z_k u_k$ .
7. Calcule  $\eta^+$  utilizando a heurística dada no Algoritmo 5.4.
8. Calcule  $\text{redr}(d_k)$  por (5.49) e  $\text{redp}(d_k)$  por (5.47).
9. Calcule  $x_{k+1}$ ,  $\eta_{k+1}$  e  $\Delta_{k+1}$  conforme o Algoritmo 5.5. Faça  $k = k + 1$  e retorne para o passo 2.

Algoritmo 6.3: Algoritmo de região de confiança.

## 6.5 Considerações Finais

Neste capítulo foram apresentados detalhadamente os algoritmos primal-dual e predictor-corretor de pontos-interiores para programação quadrática (PQ).

A técnica de região de confiança empregada nesta tese para resolução de problemas de

---

FPO baseia-se em uma adaptação da técnica de Byrd-Omojokun para incluir restrições de canalização. Neste trabalho, o problema de RC é definido pela norma infinita, em vez de pela norma Euclideana como no método de Byrd-Omojokun, o que transforma os subproblemas vertical e horizontal em problemas de programação quadrática. Essa mudança permite que a resolução dos subproblemas vertical e horizontal seja feita pelos dois métodos de pontos-interiores para PQ descritos neste capítulo.

Métodos de região de confiança são computacionalmente onerosos. O método empregado nesta tese tem como característica principal a resolução sucessiva de subproblemas de PQ dentro das iterações de região de confiança. A escolha da associação do método de Byrd-Omojokun aos métodos de pontos-interiores deve-se à necessidade da elaboração de um algoritmo robusto, com qualidade de convergência global, com pouco comprometimento do tempo de execução. Procura-se, com a inclusão dos métodos de pontos-interiores, garantir a convergência dos subproblemas em um tempo de iteração aceitável.

No próximo capítulo, apresentam-se os resultados numéricos obtidos com o programa de FPO desenvolvido a partir dos métodos descritos nos capítulos 5 e 6.

---

# Capítulo 7

---

## Resultados Numéricos

---

**O** ALGORITMO DE PONTOS-INTERIORES com região de confiança (RCPI) proposto nesta tese foi implementado em MATLAB e testado nos sistemas-teste do IEEE com 30, 57, 118 e 300 barras e nos sistemas reais aqui denominados de Real1, Real2, Real3 e Real4. Seu desempenho computacional foi comparado com o de dois algoritmos de PI largamente utilizados na solução do FPO não-linear: o método primal-dual simples (PDPI) e a sua variante preditor-corretor (PDPC), ambos descritos no Capítulo 4. O problema de FPO resolvido é o de minimização de perdas elétricas ativas.

O conjunto de restrições de igualdades inclui as equações de balanço de potências ativa e reativa, e as restrições de desigualdades incluem limites mínimos e máximos sobre os módulos das tensões, sobre os tapes de transformadores, sobre as potências reativas dos geradores e sobre as compensações de reativos em paralelo.

Todas as simulações usaram a heurística de inicialização sugerida em [74]. Os parâmetros utilizados nos algoritmos de PI (para PNL e PQ) são:  $\mu_0 = 0.01$ ,  $\gamma = 0.99995$ ,  $\sigma = 0.2$  e  $\epsilon = 10^{-4}$ .

Na Tabela 7.1 são fornecidos, para cada sistema-teste, o número total de barras,  $\mathcal{N}$ , o número de barras de geração,  $\mathcal{G}$ , o número de barras de carga candidatas ao controle de reativo,  $\mathcal{C}$ , o número total de circuitos (linhas de transmissão e transformadores),  $\mathcal{B}$ , e o número de transformadores com dispositivo LTC,  $\mathcal{T}$ . São fornecidos, também, o número total de variáveis primais,  $n$ , o número de restrições de igualdades,  $m$ , e o número de restrições de limites mínimos e máximos,  $p$ .

Tabela 7.1: Dimensões dos sistemas e do problema de FPO (2.1).

Sistema-teste	$\mathcal{N}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{T}$	$m$	$p$
IEEE 30	30	6	5	41	4	60	75
IEEE 57	57	7	5	80	10	114	143
IEEE 118	118	54	12	186	9	236	311
IEEE 300	300	69	12	411	50	600	727
Real1	51	1	12	66	6	102	121
Real2	29	1	7	37	7	58	73
Real3	42	1	22	55	6	84	103
Real4	94	1	13	103	8	166	187

Na Tabela 7.2 encontram-se as cargas ativas e reativas totais dos sistemas e as perdas ativas para a condição base, ou seja, antes da aplicação do procedimento de otimização.

Tabela 7.2: Carga inicial (ativa e reativa) e perdas ativas.

Sistema-teste	$P$ (MW)	$Q$ (MVA <sub>r</sub> )	$P_L$ (MW)
IEEE 30	283.40	126.20	17.63
IEEE 57	1250.80	336.40	27.86
IEEE 118	3668.00	1438.00	132.48
IEEE 300	23246.87	7787.97	408.32
Real1	328.50	155.20	3.69
Real2	61.60	29.70	1.85
Real3	258.60	45.95	2.33
Real4	208.80	99.40	4.23

## 7.1 Atualização dos Multiplicadores de Lagrange

O algoritmo de região de confiança RCPI minimiza aproximações sucessivas da função objetivo original. Para gerar essas aproximações, a função objetivo é expandida em uma série de Taylor truncada e a Hessiana da função objetivo é substituída pela Hessiana da função de Lagrange, dada pela Equação (5.5):

$$H_k = \nabla^2 f(x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 g_i(x_k). \quad (5.5)$$

Para gerar os resultados apresentados neste capítulo, consideraram-se duas situações: efetuando atualização dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  e sem efetuar essa atualização. No primeiro caso, utiliza-se a Equação (5.38) dada no Capítulo 5:

$$(\nabla g(x_k))^T \nabla g(x_k) \lambda_k = -\nabla g(x_k)^T \nabla f(x_k). \quad (5.38)$$

Sob a hipótese de que a matriz de gradientes  $\nabla g(x_k)$  é de posto completo, ou seja, os gradientes das funções de restrições são vetores linearmente independentes, então a matriz de coeficientes em (5.38) é simétrica definida positiva e o sistema pode ser eficientemente resolvido por fatorização Cholesky.

No segundo caso, escolhe-se um valor inicial para os multiplicadores de Lagrange ( $\lambda_i = 1$  se associado à restrição de balanço de potência ativa e  $\lambda_i = 0$  caso contrário), mantendo esse valor constante durante todas as iterações.

Em ambos os casos, os resultados finais obtidos foram praticamente os mesmos, com pequenas diferenças nos valores de uma iteração para outra. Esse resultado já era previsível, se levarmos em conta que o método de região de confiança admite que a Hessiana da função quadrática que aproxima a função objetivo original seja uma simples aproximação positiva definida de  $H_k$  em (5.5). Os valores constantes escolhidos (1's e 0's) levam em consideração o significado dos multiplicadores de Lagrange, a função objetivo (minimização de perdas ativas) e as restrições implementadas (balanço de potência ativa e reativa), o que conduz a multiplicadores próximos de 1 e 0 no final do processo iterativo, respectivamente.

Apesar dos resultados serem os mesmos e do custo computacional da atualização, a informação obtida a partir do cálculo dos multiplicadores de Lagrange é muito importante



em análises pós-otimalidade, uma vez que cada multiplicador traz informação sobre o impacto do nível da restrição a ele associado no valor da função objetivo. Pode-se, entretanto, renunciar ao cálculo, mantendo o valor constante em todas as iterações, à custa da perda dessa informação.

Uma observação a ser feita é que o cálculo dos multiplicadores de Lagrange pela Equação (5.38) no problema de FPO que tem a forma geral dada pela Equação (2.1):

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & g(x) = 0 \\ & \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{aligned} \tag{2.1}$$

oferece apenas uma aproximação dos multiplicadores reais, visto que o cálculo efetuado pela Equação (5.38) não leva em conta as restrições de limites simples, de forma que tanto o cálculo dos multiplicadores por (5.38) quanto os valores constantes já mencionados são aproximações dos multiplicadores reais.

## 7.2 Influência do Cálculo da Matriz $Z_k$

Para avaliar a influência do cálculo da matriz  $Z_k$  na solução do subproblema horizontal, efetuaram-se dois testes. O primeiro teste feito no algoritmo proposto foi a resolução do subproblema horizontal via método de PI com o cálculo da matriz  $Z_k$  para eliminar as restrições de igualdades do subproblema horizontal, conforme descrito no Capítulo 6. No segundo teste, considerou-se a solução sem o cálculo de  $Z_k$ . Neste último caso, o algoritmo de PI para resolver o subproblema horizontal apresenta algumas modificações em relação ao algoritmo usado para resolver o subproblema vertical, sendo a principal delas a modificação do sistema de Newton com a inclusão das restrições lineares de igualdades, conforme descrito na seção 6.3.

Nos dois casos, o processo de convergência foi exatamente o mesmo, havendo coincidência de todos os valores em todas as iterações, para todos os sistemas-teste usados. Observou-se, entretanto, que além do cálculo de  $Z_k$  ser bastante oneroso, essa matriz é densa, ou seja, todos os elementos são não nulos, o que torna o tempo de processamento com  $Z_k$  bem maior que sem o cálculo de  $Z_k$ , principalmente para os sistemas maiores. As

modificações ocorridas no sistema de Newton (6.35) para resolução sem  $Z_k$  geram um aumento na dimensão do sistema, mas como a matriz de coeficientes é altamente esparsa, o tempo de processamento é bem menor do que com  $Z_k$ .

Os métodos de região de confiança não têm intenção de competir em termos de tempo de processamento com outros métodos de resolução de problemas de FPO, visto que a sua característica principal é a robustez. Entretanto, neste trabalho, procuraram-se avaliar os métodos descritos no sentido de obter-se a melhor eficiência computacional possível. No caso específico do uso da matriz  $Z_k$ , observa-se que evitar esse cálculo melhora o tempo de processamento e ainda se obtém o mesmo resultado.

### 7.3 Resultados Numéricos

As tabelas apresentadas a seguir foram geradas sem atualização dos multiplicadores de Lagrange e sem o cálculo de  $Z_k$ . Para todos os casos simulados, a escolha do raio inicial de região de confiança foi feita empiricamente.

Na Tabela 7.3, apresenta-se o número de iterações obtido com algoritmos de pontos-interiores primal-dual (PDPI) e preditor-corretor (PCPI) e com o algoritmo RCPI proposto na resolução do problema de FPO usando os sistemas-teste. Na Tabela 7.4 apresentam-se mais detalhes dos resultados obtidos com o algoritmos RCPI. As colunas Vert e Horz referem-se ao número total de iterações de pontos-interiores para resolução dos subproblemas vertical e horizontal, respectivamente, em todas as iterações de região de confiança. Os valores na coluna RC referem-se ao número de iterações externas de região de confiança.

Tabela 7.3: Número de iterações para convergência.

Sistema-teste	Número de Iterações			Perdas Finais	
	PDPI	PCPI	RCPI	(MW)	Red(%)
IEEE 30	10	7	3	17.79	-0.91
IEEE 57	11	8	10	24.34	12.63
IEEE 118	15	9	3	118.77	10.36
IEEE 300	15	10	5	378.37	7.33
Real1	10	8	3	3.34	9.49
Real2	10	6	11	1.67	9.73
Real3	11	7	13	2.07	11.16
Real4	11	9	3	4.01	5.20

Tabela 7.4: Número de iterações e perdas ativas finais do Algoritmo RCPI.

Sistema-teste	Número de Iterações			Perdas Finais	
	RC	Vert	Horz	(MW)	Red(%)
IEEE 30	3	26	27	17.79	-0.91
IEEE 57	10	86	95	24.34	12.63
IEEE 118	3	34	35	118.77	10.36
IEEE 300	5	63	75	378.37	7.33
Real1	3	27	30	3.34	9.49
Real2	11	25	35	1.67	9.73
Real3	13	78	88	2.07	11.16
Real4	3	28	35	4.01	5.20

Os resultados das Tabelas 7.3 e 7.4 mostram que o algoritmo RCPI encontrou o mesmo resultado que os algoritmos PDPI e PCPI. Entretanto, cada solução dos subproblemas vertical e horizontal em uma iteração de RC no algoritmo RCPI leva, aproximadamente, o mesmo número de iterações que cada um dos algoritmos PDPI e PCPI para resolver o FPO.

Nas Tabelas 7.5, 7.6 e 7.7 são detalhados o processo de convergência dos sistemas IEEE 30 e 118 barras e Real4, respectivamente. A coluna  $f(x_k)$  contém o valor da função objetivo, as colunas Inv Primal e Inv Dual contém os testes de convergência, a coluna  $\Delta_k$  contém o tamanho da região de confiança e a coluna  $\eta_k$ , o valor do parâmetro de penalidade da função mérito na iteração de região de confiança.

Tabela 7.5: Processo de convergência do sistema-teste IEEE 30 barras.

Iter RC	$f(x_k)$	Iter Vert	Iter Horz	Inv Primal	Inv Dual	$\Delta_k$	$\eta_k$
0	2.5757	-	-	0.3441	0.0248	0.1	100
1	2.4339	9	9	0.0254	0.0356	0.2	100
2	2.6102	9	9	0.0029	0.0374	0.4	100
3	2.6118	8	9	$3.9991 \times 10^{-5}$	0.0373	0.8	100

Verifica-se, nas tabelas acima, que o valor da função objetivo tem uma queda nas primeiras iterações e depois chega a aumentar. Isso se deve à função mérito, que leva em conta tanto o valor da função objetivo quanto a satisfação das restrições. Durante o processo iterativo, as restrições receberam um peso muito significativo ( $\eta_k = 100$ ), forçando o algoritmo a encontrar um ponto-solução viável, ou seja, com  $\|g(x_k)\|$  dentro de uma tolerância pré-especificada. O valor do raio da região de confiança sempre aumenta de uma iteração para

Tabela 7.6: Processo de convergência do sistema-teste IEEE 118 barras.

Iter RC	$f(x_k)$	Iter Vert	Iter Horz	Inv Primal	Inv Dual	$\Delta_k$	$\eta_k$
0	5.6440	-	-	0.5250	0.0582	0.8	100
1	4.8214	16	12	0.0335	0.1019	1.6	100
2	4.9815	9	12	0.0069	0.0986	1.6	100
3	4.9975	9	11	$1.4834 \times 10^{-5}$	0.0986	3.2	100

Tabela 7.7: Processo de convergência do sistema Real4.

Iter RC	$f(x_k)$	Iter Vert	Iter Horz	Inv Primal	Inv Dual	$\Delta_k$	$\eta_k$
0	2.1921	-	-	0.2017	$9.9269 \times 10^{-5}$	0.2	100
1	2.0982	11	14	0.0053	$2.7221 \times 10^{-4}$	0.4	100
2	2.1278	9	11	$3.7837 \times 10^{-4}$	$5.0391 \times 10^{-4}$	0.8	100
3	2.1291	9	11	$2.5017 \times 10^{-5}$	$5.0695 \times 10^{-4}$	1.6	100

outra. Isso já era previsível, pelo fato de que, ao chegar perto da solução, os pontos gerados são sempre viáveis.

### 7.3.1 Resolução dos Subproblemas de Região de Confiança

Os subproblemas vertical e horizontal de cada iteração de região de confiança foram resolvidos pelo método primal-dual de PI para PQ. O número de iterações para convergência em cada subproblema é praticamente constante, variando pouco de uma iteração de região de confiança para outra. O processo iterativo é semelhante em todos os sistemas testados. Nas tabelas 7.8 e 7.9 apresenta-se o processo de convergência dos subproblemas vertical e horizontal em uma iteração de região de confiança para o sistema IEEE 118 barras. Nas tabelas, as colunas  $\alpha_P$  e  $\alpha_D$  referem-se aos comprimentos de passo primal e dual, respectivamente, que foram considerados iguais. As colunas Inv Primal, Inv Dual e Res Comp representam os testes de convergência do algoritmo e a coluna  $f(x)$  traz o valor da função objetivo na iteração  $k$ .

Pode-se perceber uma pequena diminuição no número de iterações dos subproblemas vertical e horizontal na proximidade da solução. No algoritmo RCPI, um ponto inicial viável não é necessário. A viabilidade vai sendo gradualmente alcançada durante o processo iterativo até ser totalmente satisfeita no final da otimização, com isso, o algoritmo

Tabela 7.8: Processo de convergência do Subproblema Vertical - IEEE 118 barras.

Iter	$\alpha_P$	$\alpha_P$	Inv Primal	Inv Dual	Res Comp	$f(x_k)$
0	-	-	0.0000	$4.485 \times 10^2$	6.2200	0.0000
1	0.3398	0.3398	0.0000	$3.293 \times 10^2$	2.0740	-97.34
2	0.2797	0.2797	0.0000	$2.497 \times 10^2$	1.2590	$-1.336 \times 10^2$
3	0.4692	0.4692	0.0000	$1.398 \times 10^2$	$6.339 \times 10^{-1}$	$-1.618 \times 10^2$
4	0.1533	0.1533	0.0000	$1.127 \times 10^2$	$5.337 \times 10^{-1}$	$-1.649 \times 10^2$
5	0.2998	0.2998	0.0000	60.0200	$3.879 \times 10^{-1}$	$-1.689 \times 10^2$
6	0.6680	0.6680	0.0000	13.1100	$1.691 \times 10^{-1}$	$-1724 \times 10^2$
7	1.0000	1.0000	0.0000	$1.750 \times 10^{-13}$	$3.513 \times 10^{-2}$	$-1.728 \times 10^2$
8	1.0000	1.0000	0.0000	$2.279 \times 10^{-13}$	$7.479 \times 10^{-3}$	$-1.728 \times 10^2$
9	1.0000	1.0000	0.0000	$2.976 \times 10^{-13}$	$1.545 \times 10^{-3}$	$-1.728 \times 10^2$
10	0.8200	0.8200	0.0000	$7.511 \times 10^{-14}$	$5.324 \times 10^{-4}$	$-1.728 \times 10^2$
11	0.7228	0.7228	0.0000	$2.085 \times 10^{-13}$	$2.236 \times 10^{-4}$	$-1.728 \times 10^2$
12	0.7236	0.7236	0.0000	$1.882 \times 10^{-13}$	$9.323 \times 10^{-5}$	$-1.728 \times 10^2$
13	0.4192	0.4192	0.0000	$1.803 \times 10^{-13}$	$6.166 \times 10^{-5}$	$-1.728 \times 10^2$
14	0.6262	0.6262	0.0000	$7.934 \times 10^{-14}$	$3.049 \times 10^{-5}$	$-1.728 \times 10^2$
15	0.7371	0.7371	0.0000	$1.347 \times 10^{-13}$	$1.232 \times 10^{-5}$	$-1.728 \times 10^2$
16	0.8501	0.8501	0.0000	$1.820 \times 10^{-13}$	$3.885 \times 10^{-6}$	$-1.728 \times 10^2$

Tabela 7.9: Processo de convergência do Subproblema Horizontal - IEEE 118 barras.

Iter	$\alpha_P$	$\alpha_P$	Inv Primal	Inv Dual	Res Comp	$f(x_k)$
0	-	-	0.0000	$1.121 \times 10^{-1}$	6.2200	0.0000
1	0.5568	0.5568	$6.727 \times 10^{-2}$	$7.396 \times 10^{-2}$	1.9420	$-1.617 \times 10^{-2}$
2	0.4734	0.4734	$3.138 \times 10^{-2}$	$4.807 \times 10^{-2}$	$9.481 \times 10^{-1}$	$-2.344 \times 10^{-2}$
3	0.4949	0.4949	$1.444 \times 10^{-2}$	$2.964 \times 10^{-2}$	$4.595 \times 10^{-1}$	$-2.909 \times 10^{-2}$
4	0.6393	0.6393	$4.724 \times 10^{-3}$	$1.371 \times 10^{-2}$	$1.650 \times 10^{-1}$	$-3.458 \times 10^{-2}$
5	0.5626	0.5626	$1.894 \times 10^{-3}$	$7.022 \times 10^{-3}$	$7.061 \times 10^{-2}$	$-3.945 \times 10^{-2}$
6	0.5117	0.5117	$8.616 \times 10^{-4}$	$3.609 \times 10^{-3}$	$3.392 \times 10^{-3}$	$-4.304 \times 10^{-2}$
7	0.5417	0.5417	$3.719 \times 10^{-4}$	$1.661 \times 10^{-3}$	$1.566 \times 10^{-2}$	$-4.566 \times 10^{-2}$
8	0.6565	0.6565	$1.217 \times 10^{-4}$	$5.660 \times 10^{-4}$	$5.745 \times 10^{-3}$	$-4.744 \times 10^{-2}$
9	0.7419	0.7419	$3.048 \times 10^{-5}$	$1.451 \times 10^{-4}$	$1.714 \times 10^{-3}$	$-4.837 \times 10^{-2}$
10	0.7675	0.7675	$6.991 \times 10^{-6}$	$3.364 \times 10^{-5}$	$4.800 \times 10^{-4}$	$-4.874 \times 10^{-2}$
11	0.8828	0.8828	$8.135 \times 10^{-7}$	$3.939 \times 10^{-6}$	$8.423 \times 10^{-5}$	$-4.888 \times 10^{-2}$
12	0.8924	0.8924	$8.733 \times 10^{-8}$	$4.239 \times 10^{-7}$	$1.398 \times 10^{-5}$	$-4.890 \times 10^{-2}$
13	0.9780	0.9780	$1.916 \times 10^{-9}$	$9.338 \times 10^{-9}$	$1.149 \times 10^{-6}$	$-4.891 \times 10^{-2}$

Tabela 7.10: Número de iterações e perdas ativas finais - Casos Críticos.

Sistema-teste	Número de Iterações			Perdas Finais	
	RC	Vert	Horz	(MW)	Red.(%)
IEEE 30	4	37	48	34.25	-1.42
IEEE 57	37	333	404	37.16	8.50
IEEE 118	3	31	39	125.99	9.91
IEEE 300	7	71	87	491.90	4.92

Tabela 7.11: Processo de convergência do sistema-teste IEEE 30 barras - Crítico.

Iter RC	$f(x_k)$	Iter Vert	Iter Horz	Inv Primal	Inv Dual	$\Delta_k$	$\eta_k$
0	3.5577	-	-	0.4491	0.0239	1	100
1	3.3684	9	11	0.0442	0.0447	2	100
2	3.7065	10	12	0.0015	0.0497	4	100
3	3.7083	9	13	$1.1418 \times 10^{-4}$	0.0497	8	100
4	3.7071	9	12	$2.5443 \times 10^{-5}$	0.0497	16	100

de pontos-interiores para PQ alcança convergência em um menor número de iterações na proximidade da solução.

### 7.3.2 Convergência para Casos Críticos

Para avaliar a robustez do algoritmo proposto, o carregamento dos sistemas IEEE 30, 57, 118 e 300 barras foi intencionalmente aumentado de forma a tornar esses sistemas críticos e sua solução de FPO bastante difícil com os limites de variáveis especificados. As perdas ativas iniciais são, agora, 33.77 MW, 40.61 MW, 139.85 MW e 517.34 MW, respectivamente. Para essa simulação, os algoritmos primal-dual e preditor-corretor de pontos-interiores falharam na convergência, enquanto que o algoritmo de região de confiança (RCPI) convergiu em todos os casos.

Na Tabela 7.10 apresentam-se o número de iterações para convergência e as reduções obtidas nas perdas ativas. Os processos de convergência para os sistemas IEEE 30, 118 e 300 barras críticos são vistos nas tabelas 7.11, 7.12 e 7.13, respectivamente.

Note que, para o sistema IEEE 30 barras, no caso crítico e no caso não-crítico, o resultado do processo de otimização é um aumento nas perdas. Deve-se observar, entretanto, que o resultado depois da otimização retorna um ponto de operação do sistema em que to-

Tabela 7.12: Processo de convergência do sistema-teste IEEE 118 barras - Crítico.

Iter RC	$f(x_k)$	Iter Vert	Iter Horz	Inv Primal	Inv Dual	$\Delta_k$	$\eta_k$
0	6.6454	-	-	0.5075	0.0571	5	100
1	4.6330	13	15	0.0442	0.1023	10	100
2	5.9794	9	13	0.0065	0.0969	10	100
3	5.9910	9	11	$1.8139 \times 10^{-5}$	0.0969	10	100

Tabela 7.13: Processo de convergência do sistema-teste IEEE 300 barras - Crítico.

Iter RC	$f(x_k)$	Iter Vert	Iter Horz	Inv Primal	Inv Dual	$\Delta_k$	$\eta_k$
0	17.2136	-	-	0.7067	0.2249	6	100
1	15.9898	2	2	0.6017	0.1924	10	100
2	7.8113	14	13	0.0738	0.0847	10	100
3	9.9276	11	15	0.0104	0.0937	10	100
4	9.9955	11	15	$8.4175 \times 10^{-4}$	0.0941	10	100
5	9.9809	11	14	$3.1920 \times 10^{-4}$	0.0940	10	100
6	9.9835	11	14	$1.1177 \times 10^{-4}$	0.0940	10	100
7	9.9814	11	14	$4.0856 \times 10^{-5}$	0.0940	10	100

dos os limites operacionais são respeitados, enquanto que antes da otimização esses limites estavam sendo violados. Para todos os casos simulados, críticos e não-críticos, o algoritmo RCPI foi testado com três pontos iniciais distintos, e os resultados finais nos valores das perdas foram os mesmos, com uma pequena diferença no número de iterações externas (de região de confiança).

## 7.4 Considerações Finais

Os experimentos computacionais demonstraram que o algoritmo RCPI proposto nesta tese foi capaz de convergir em todos os testes, enquanto os algoritmos PDPI e PCPI falharam na solução dos sistemas-teste IEEE 30, 57, 118 e 300 barras tornados críticos mediante um aumento intencional de seu carregamento.

Para os casos convergidos, o algoritmo RCPI encontrou a mesma solução que os algoritmos de pontos-interiores PDPI e PCPI. Os experimentos numéricos mostraram que um ponto inicial viável não é necessário no algoritmo RCPI. A viabilidade vai sendo gra-

dualmente alcançada durante o processo iterativo até ser totalmente satisfeita no final da otimização.

O número de iterações de região de confiança, chamadas de iterações externas, é relativamente baixo, entretanto, cada iteração de região de confiança envolve a solução de dois subproblemas de PQ (vertical e horizontal), cuja solução pelo método PDPI para PQ requer aproximadamente o mesmo número de iterações que é usado pelo algoritmo PDPI para resolver o problema de FPO não-linear diretamente, ou seja, de uma só vez. Os sistemas lineares nos algoritmos de PI para PQ e PNL apresentam as mesmas dimensões e estruturas de esparsidade. Assim, pode-se concluir que o tempo tomado por uma iteração do algoritmo PDPI para PQ é apenas ligeiramente inferior ao de uma iteração do algoritmo PDPI, uma vez que a matriz gradiente  $\nabla g(x_k)$  e a Hessiana  $H_k$  são constantes durante as iterações PDPI para solução dos subproblemas vertical e horizontal. Adicionalmente, pode-se concluir que o tempo de solução total do algoritmo RCPI é aproximadamente o número de iterações de região de confiança vezes o dobro do tempo de solução do algoritmo PDPI. Entretanto, deve-se ter em mente que o objetivo do algoritmo RCPI não é competir com o algoritmo PDIP em termos de tempo de solução, mas ser um algoritmo de solução robusto, possivelmente com convergência global, para resolver problemas de FPO de convergência bastante difícil. Neste último caso, o algoritmo RCPI mostrou-se eficaz na solução de sistemas críticos, enquanto os algoritmos PDPI e PCPI falharam na convergência.

Embora tenham sido levados em conta vários aspectos para maior eficiência computacional, como estrutura de dados, montagem eficiente de matrizes Jacobianas e Hessianas esparsas e a inicialização de variáveis, o objetivo principal desta pesquisa é evidenciar a robustez do algoritmo e não o seu tempo de processamento.



# Capítulo 8

---

## Conclusões

---

**N**ESTE TRABALHO, fez-se uma verificação do estado-da-arte dos métodos de região de confiança (RC), procurando avaliar a sua aplicação em problemas de Fluxo de Potência Ótimo (FPO). Foram encontrados alguns trabalhos com aplicações de RC em sistemas de potência, mas com pouca aplicação em FPO.

É notória a dificuldade em desenvolver um algoritmo para resolução de FPO que reúna as qualidades de robustez, tempo de processamento adequado e convergência global, principalmente devido às não-linearidades no ponto de solução dos modelos matemáticos dos sistemas, tais como os modelos de FPO, grande parte causadas pela sua operação muito próxima de seu limite de capacidade.

Em consequência dessa dificuldade, desenvolveu-se nesta tese um algoritmo de FPO incorporando o método de região de confiança de Byrd-Omojokun [16, 17], adaptado por

Plantenga [18] para inclusão de restrições de canalização, aos métodos de pontos-interiores (PI). A utilização da estratégia de região de confiança aliada aos métodos de PI tem o objetivo de tornar o algoritmo globalmente convergente, robusto e sem comprometimento significativo do tempo de processamento computacional.

Entre os objetivos desta tese, está o desenvolvimento de um programa de FPO abrangente, com várias opções de função objetivo, levando em conta a inclusão de restrições de estabilidade de tensão e dispositivos FACTS. Nos Capítulos 2 e 3, apresentam-se as formulações de FPO, a inclusão de restrições de estabilidade de tensão e a modelagem matemática do dispositivo FACTS UPFC para sua inclusão em programas de fluxo de potência não-otimizado e em FPO.

O algoritmo RCPI desenvolvido a partir das técnicas estudadas nos Capítulos 5 e 6 foi implementado computacionalmente em linguagem MATLAB e foi testado nos sistemas-teste do IEEE de 30, 57, 118 e 300 barras e nos sistemas reais Real1, Real2, Real3 e Real4. Inicialmente, os testes foram efetuados com os sistemas em sua condição original de carregamento para avaliar o desempenho do algoritmo quanto à sua capacidade de atendimento aos objetivos de otimização e para compará-lo com os algoritmos de pontos-interiores já bastante usados em programas de FPO. Em um segundo momento, o carregamento dos sistemas-teste do IEEE de 30, 57, 118 e 300 barras foi intencionalmente aumentado até ponto em que os algoritmos de pontos-interiores falhassem na convergência, tornando esses sistemas críticos. O objetivo desse segundo teste foi avaliar a robustez do algoritmo proposto frente a casos críticos. Os resultados numéricos apresentados no Capítulo 7 demonstram o desempenho bastante satisfatório do algoritmo RCPI, principalmente nos casos críticos, em que foi observado que os algoritmos de pontos-interiores (primal-dual e preditor-corretor) falharam na convergência, enquanto que o algoritmo RCPI convergiu em todas as situações, provando a robustez da técnica proposta.

Algumas dificuldades na implementação foram sentidas, principalmente devido à pouca literatura disponível sobre métodos de região de confiança aplicados a FPO. A forma geral de um problema de FPO, como apresentada neste trabalho, apresenta restrições de igualdades e de canalização, de forma que precisaram-se fazer adaptações ao método de Byrd-Omojokun para ajustá-lo ao problema de FPO. A resolução do problemas de FPO usando o método de Byrd-Omojokun, como descrito no Capítulo 5, usando a norma Euclideana, não se adequou à forma geral dos problemas de FPO devido, principalmente, às restrições de canalização. Assim, o método de Byrd-Omojokun foi redefinido para ser formulado

---

usando a norma infinita.

Outra dificuldade verificada foi a não disponibilidade dos multiplicadores de Lagrange das restrições de limites simples do problema não linear original, o que impossibilita o cálculo correto da inviabilidade dual para fins do teste de convergência. No entanto, um procedimento para o cálculo preciso da inviabilidade dual já foi identificado em [18]. Outro problema percebido foi a escolha do raio inicial de região de confiança. A literatura disponível sobre esse tema restringe-se aos problemas de minimização irrestrita, casos que não se adequaram aos problemas de FPO. Por essa razão, em todas as simulações feitas neste trabalho, a escolha do raio inicial da região de confiança foi feita empiricamente.

Devido à característica principal dos métodos de região de confiança, que é a resolução sucessiva dos dois problemas de PQ (vertical e horizontal) dentro das iterações de RC, o tempo total de processamento é claramente superior ao da solução direta pelo método de PI para PNL. Entretanto, procurou-se diminuir esse problema levando-se em conta os principais aspectos para maior eficiência computacional, como estrutura de dados, montagem eficiente de matrizes Jacobianas e Hessianas esparsas e a inicialização de variáveis.

A principal vantagem do algoritmo de região de confiança proposto nesta tese, em relação aos algoritmos de pontos-interiores para resolução de problemas de FPO, é a sua capacidade de convergir em casos críticos quando estes últimos falham. Conclui-se, portanto, que o objetivo principal desta tese foi alcançado, tendo sido desenvolvido um algoritmo com grande robustez de convergência e, possivelmente, com qualidade de convergência global.

## 8.1 Perspectivas de Trabalhos Futuros

Este trabalho, ao propor um algoritmo de FPO globalmente convergente, não teve a intenção de ser exaustivo, de forma que é necessária a sua continuação para aperfeiçoamento das técnicas utilizadas. Assim, apresentam-se, a seguir, algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Desenvolver uma formulação para cálculo dos multiplicadores de Lagrange mais adequada à forma geral dos problemas de FPO estudados. Ressalta-se, no entanto, que o cálculo exato dos multiplicadores de Lagrange não é um requisito para a con-
-

vergência do método;

- Desenvolver uma estratégia adequada para escolha do raio inicial de região de confiança nos problemas de FPO, assim como estratégias de atualização do raio durante as iterações de RC;
  - Estudar a inclusão de restrições de canalização no método de Byrd-Omojukun, de forma que os algoritmos *dogleg* e de Steihaug, vistos nos Capítulo 5, possam ser usados na resolução dos subproblemas de região de confiança definidos pela norma Euclideana;
  - Realizar testes exaustivos para determinar a sensibilidade do processo de convergência em relação aos diversos parâmetros do algoritmo.
-

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] GRANVILLE, S. Optimal reactive dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, n. 1, p. 136–146, fev. 1994.
- [2] WU, Y.-C.; DEBS, A. S.; MARSTEN, R. E. A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for Optimal Power Flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, n. 2, p. 876–883, May 1994.
- [3] GRANVILLE, S.; MELLO, J. C. O.; MELO, A. C. G. Application of interior point methods to power flow unsolvability. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, n. 2, p. 1096–1103, maio 1996.
- [4] IRISARRI, G. D. et al. Maximum loadability of power systems using interior point non-linear optimization method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 1, p. 162–172, fev. 1997.
- [5] YAN, X.; QUINTANA, V. H. An efficient predictor-corrector interior point algorithm for security-constrained economic dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 2, p. 803 – 810, may 1997.

- 
- [6] TORRES, G. L.; QUINTANA, V. H. On a nonlinear multiple-centrality-corrections interior-point method for optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 16, n. 2, p. 222–228, maio 2001.
- [7] ALMEIDA, K. C.; GALIANA, F. D. Critical cases in the optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, n. 3, p. 1509–1518, ago. 1996.
- [8] ALMEIDA, K. C. Um estudo sobre casos críticos de solução do fluxo de potência ótimo. *SBA Controle & Automação*, v. 17, n. 1, p. 71–80, jan. – mar. 2006.
- [9] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. New York: Springer-Verlag, 1999. 634p.
- [10] CONN, A. R.; GOULD, N. I. M.; TOINT, P. L. *Trust-Region Methods*. Philadelphia: MPS-SIAM Series on Optimization, 2000.
- [11] CELIS, M.; DENNIS, J. E.; TAPIA, R. A. A trust region strategy for nonlinear equality constrained optimization. In: *Numerical Optimization*. Philadelphia: SIAM, 1985. p. 71–82.
- [12] POWELL, M. J. D. A new algorithm for unconstrained optimization. In: ROSEN, J.; MANGASARIAN, O.; RITTER, K. (Ed.). *Nonlinear Programming*. New York: Academic Press, 1970. p. 31–66.
- [13] POWELL, M. J. D. A hybrid method for nonlinear equations. In: *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*. Londres: Gordon and Breach Science, 1970. p. 87–144.
- [14] MOREÉ, J. J. Recent developments in algorithms and software for trust region methods. In: *Mathematical Programming: The State of the Art*. New York: Springer Verlag, 1983. p. 258–287.
- [15] POWELL, M. J. D. *UOBYQA: Unconstrained Optimization by Quadratic Approximation*. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, England, 2000. Report No. DAMTP2000/14.
- [16] BYRD, R. H. Robust trust region methods for constrained optimization. In: SIAM CONFERENCE ON OPTIMIZATION. *Proceedings of Third SIAM Conference on Optimization*. Houston, TX, 1987.
-

- 
- [17] OMOJOKUN, E. O. *Trust region algorithms for optimization with nonlinear equality and inequality constraints*. Tese (Doutorado em Filosofia) — University of Colorado, Boulder, CO, USA, 1989.
- [18] PLANTENGA, T. D. *Large-scale nonlinear constrained optimization using trust regions*. Tese (Doutorado em Filosofia) — Northwestern University, Evanston, IL, USA, 1994.
- [19] CONN, A. R.; GOULD, N. I. M.; TOINT, P. L. Numerical experiments with the LANCELOT package (Release A) for large-scale nonlinear optimization. *Mathematical Programming*, v. 73, n. 1, p. 73–110, 1996.
- [20] CONN, A. R. et al. A primal-dual trust-region algorithm for non-convex nonlinear programming. *Mathematical Programming*, v. 87, n. 2, p. 215–249, 2000.
- [21] PAJIC, S.; CLEMENTS, K. A. Globally convergent state estimation via the trust region method. In: IEEE POWERTECH. *Proceedings of 2003 IEEE Bologna PowerTech Conference*. Bologna, Italy, 2003. p. 6.
- [22] PAJIC, S.; CLEMENTS, K. A. Power system state estimation via globally convergent methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 20, n. 4, p. 1683–1689, nov. 2005.
- [23] ZHOU, R.; ZHANG, Y.; LIU, J. Reactive power optimization algorithm based on trust-region global SQP. In: IEEE PES GENERAL MEETING. *Proceedings of IEEE PES General Meeting*. Montreal, Canada, 2006.
- [24] COSTA, A. S.; SALGADO, R.; HAAS, P. Globally convergent state estimation based on givens rotations. In: IREP SYMPOSIUM. *Proceedings of 2007 iREP Symposium*. Charleston, South Carolina, USA, 2007. p. 1 – 9.
- [25] BONNANS, J. F.; BOUHTOU, M. *The Trust Region Affine Interior Point Algorithm for Convex and Nonconvex Quadratic Programming*. Rocquencourt, France, July 1993. 28 p. Research Report.
- [26] VICENTE, L. N. *Trust Region Interior Point Algorithms for a Class of Nonlinear Programming Problems*. 183 p. Tese (Doutorado em Filosofia) — Rice University, Houston, Texas, USA, 1996.
-

- 
- [27] BONNANS, J. F.; POLA, C. A trust region interior point algorithm for linearly constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, v. 7, n. 3, p. 717–731, 1997.
- [28] CONN, A. R. et al. *A Primal-Dual Trust Region Algorithm for Minimizing a Non-Convex Function Subject to General Inequality and Linear Equality Constraints*. Rutherford Appleton Laboratory Chilton, Oxfordshire, England, 1999. 30 p. Technical Report RAL-TR-1999-054.
- [29] BYRD, R. H.; GILBERT, J. C.; NOCEDAL, J. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Mathematical Programming*, v. 89, n. 1, p. 149–185, 2000.
- [30] COLEMAN, T. F.; LI, Y. A trust region and affine scaling interior point method for nonconvex minimization with linear inequality constraints. *Mathematical Programming*, v. 88, n. 1, p. 1–31, 2000.
- [31] WATANABE, E. H. et al. Tecnologia FACTS - tutorial. *SBA Controle & Automação*, v. 9, n. 1, p. 39–55, jan., fev., mar. e abril 1998.
- [32] SONG, Y.-H.; JOHNS, A. T. *Flexible AC Transmission Systems (FACTS)*. England: The Institution of Engineering and Technology, 1999.
- [33] HINGORANI, N. G.; GYUGYI, L. *Understanding FACTS - Concepts and Technology of Flexible AC Transmission Systems*. New York: Institute of Electrical and Electronic Engineers Press Inc., 2000. 432 p.
- [34] ZHANG, P. X.; HANDSCHIN, E. J. Advanced implementation of UPFC in a nonlinear interior-point OPF. *IEEE Proceedings Generation Transmission and Distribution*, v. 148, n. 5, p. 489–496, sept. 2001.
- [35] NABAVI-NIAKI, A.; IRAVANI, M. R. Steady-state and dynamic models of Unified Power Flow Controller (UPFC) for power systems studies. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, n. 4, p. 1937–1943, nov. 1996.
- [36] NOROOZIAN, M. et al. Use of UPFC for optimal power flow control. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 12, n. 4, p. 1629–1634, oct. 1997.
-



- [37] TUMAY, M.; VURAL, A. M. Analysis and modelling of Unified Power Flow Controller: Modification of newton-raphson algorithm an user-defined modelling approach for power flow studies. *The Arabian Journal for Science and Engineering*, v. 29, n. 2B, p. 135–153, oct. 2004.
- [38] AMBRIZ-PÉREZ, H. et al. Incorporation of a UPFC model in an Optimal Power Flow using Newton's method. *IEEE Proceedings Generation Transmission and Distribution*, v. 145, n. 3, p. 336–344, may 1998.
- [39] LEE, S.; CHU, C. Power flow models of Unified Power Flow Controllers in various operation modes. In: 2003 IEEE PES. *Proceedings of Transmission and Distribution Conference and Exposition*. Dallas, Texas, 2003. v. 1, p. 157–162.
- [40] MENNITI, A. et al. Steady state security analysis in presence of UPFC corrective actions. In: XIV PSCC. *Proceedings of XIV Power System Computation Conference*. Sevilla, 2002.
- [41] LAI, L. L.; MA, J. T. Power flow control with UPFC using genetic algorithms. In: ISAP-96. *Proceedings International Conference on Intelligent Systems Applications to Power Systems*. Orlando, FL, USA, 1996.
- [42] SINGH, S. N.; VERMA, K. S.; GUPTA, H. O. Optimal Power Flow control in open power market using Unified Power Flow Controller. In: IEEE-PES SUMMER MEETING. *Proceedings of IEEE-PES Summer Meeting, 2001*. Vancouver, BC, Canada, 2001. v. 3, p. 1698–1703.
- [43] LEHMKÖSTER, C. Security constrained Optimal Power Flow for an economical operation of FACTS devices in liberalized energy markets. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 17, n. 2, p. 603–608, apr. 2002.
- [44] PALMA-BEHNKE, R. et al. OPF with SVC and UPFC modeling for longitudinal systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 19, n. 4, p. 1742–1753, nov. 2004.
- [45] SILVA, D. D.; ALMEIDA, K. C. Modelagem de equipamentos FACTS de segunda geração no fluxo de potência ótimo. In: XII CBA. *Anais do XII Congresso Brasileiro de Automática*. Juiz de Fora, MG, 2008.
- [46] KUNDUR, P. *Power System Stability and Control*. New York: McGraw-Hill, 1994.
-

- 
- [47] CAÑIZARES, C. A. et al. Comparison of voltage security constrained Optimal Power Flow techniques. In: IEEE-PES SUMMER MEETING. *Proceedings of the 2001 IEEE-PES Summer Meeting*. Vancouver, BC, 2001.
- [48] JARJIS, J.; GALIANA, F. D. Quantitative analysis of steady state stability in power networks. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, v. 100, n. 1, p. 318–326, jan. 1981.
- [49] KESSEL, P.; GLAVITSCH, H. Estimating the voltage stability of a power system. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 1, p. 346–354, july 1986.
- [50] OBADINA, O. O.; BERG, G. J. Determination of voltage stability limit in multimachine power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 3, n. 4, p. 1545–1552, november 1988.
- [51] VAN CUTSEN, T. A method to compute reactive power margins with respect to voltage collapse. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 6, n. 1, p. 145–152, february 1991.
- [52] TIRANUCHIT, A.; THOMAS, R. J. A posturing strategy against voltage instabilities in electric power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 3, n. 1, p. 87–93, february 1988.
- [53] LÖF, P. A. et al. Fast calculation of a voltage stability index. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 1, p. 54–64, february 1992.
- [54] KODSI, S. K. M.; CAÑIZARES, C. A. Application of a stability-constrained optimal power flow to tuning of oscillation controls in competitive electricity markets. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 22, n. 4, p. 1944–1954, november 2007.
- [55] MUÑOZ, J. R. A. *Analysis and Applications of Optimization Techniques to Power Systems Security and Electricity Markets*. Tese (Doutorado) — University of Waterloo, Canada, 2008.
- [56] CAÑIZARES, C. A. et al. Linear performance indices to predict oscillatory stability problems in power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 19, n. 2, p. 1104–1114, may 2004.
-

- 
- [57] MONTICELLI, A. *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1983.
- [58] STOTT, B.; ALSAC, O.; MONTICELLI, A. J. Security analysis and optimization. *Proceedings of the IEEE*, v. 75, n. 12, p. 1623–1644, dez. 1987.
- [59] HUNEALT, M.; GALIANA, F. D. A survey of the optimal power flow literature. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 6, n. 2, p. 762–770, may 1991.
- [60] DOMMEL, H. W.; TINNEY, W. F. Optimal Power Flow solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-87, n. 10, p. 1866–1876, oct. 1968.
- [61] WEI, H.; SASAKI, H.; YOKOYAMA, R. An application of interior point quadratic programming algorithm to power system optimization problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, n. 1, p. 260–266, fev. 1996.
- [62] YAN, X.; QUINTANA, V. H. An efficient predictor-corrector interior point algorithm for security-constrained economic dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 2, p. 803–810, maio 1997.
- [63] SUN, D. et al. Optimal Power Flow by Newton method. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS 103, n. 10, p. 2864–2880, oct. 1984.
- [64] MONTICELLI, A. J.; LIU, W. E. Adaptive movement penalty method for the Newton optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 1, p. 334–342, fev. 1992.
- [65] CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W.; FREY, K. D. Treatment of inequality constraints in power system state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 10, n. 2, p. 567–573, may 1995.
- [66] TORRES, G. L.; QUINTANA, V. H. An interior point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 4, p. 1211–1218, nov. 1998.
- [67] FRISCH, K. R. *The Logarithmic Potential Method of Convex Programming*. Oslo, Norway, 1955.
-

- 
- [68] FIACCO, A. V.; MCCORMICK, G. P. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. New York: John Wiley & Sons, 1968.
- [69] KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, v. 4, n. 4, p. 373–395, 1984.
- [70] MEGIDDO, N. *Pathways to the Optimal Set in Linear Programming*. San Jose, CA, 1986.
- [71] MEHROTRA, S. On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, v. 2, p. 575–601, 1992.
- [72] CARPENTER, T. J. et al. Higher-order predictor-corrector interior point methods with applications to quadratic objectives. *SIAM Journal on Optimization*, v. 3, n. 4, p. 696–725, 1993.
- [73] GONDZIO, J. Multiple centrality corrections in a primal-dual method for linear programming. *Computational Optimization and Applications*, v. 6, p. 137–156, 1996.
- [74] TORRES, G. L. *Nonlinear Optimal Power Flow by Interior and Non-Interior Point Methods*. 140 p. Tese (Doutorado em Filosofia) — University of Waterloo, Waterloo, Ontário, Canadá, 1998.
- [75] TORRES, G. L.; QUINTANA, V. H.; de Carvalho, M. A. Higher-order interior-point methods for computing minimum load shedding and maximum loadability of power systems. In: VIII SEPOPE. *Proceedings of the VIII SEPOPE*. Brasilia, Brazil, 2002.
- [76] CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W.; FREY, K. D. An interior point algorithm for weighted least absolute value power system state estimation. 91. Paper no. 91-WM 235-2 PWRs.
- [77] VARGAS, L.; QUINTANA, V.; VANNELLI, A. A tutorial description of an interior-point method and its application to security constrained economic dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, n. 3, p. 1315–1324, 1993.
- [78] BARBOZA, L. V.; SALGADO, R. Restoring solutions for unsolvable cases via minimum load shedding for a specified direction. In: IEEE 22ND POWER INDUSTRY COMPUTATION CONFERENCE. *Proceedings of IEEE 22nd Power Industry Computation Conference*. Sydney, Australia, 2001. p. CDROM.
-

- 
- [79] MEDINA, J. et al. A comparison of interior-point codes for medium-term hydro-thermal coordination. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 3, p. 836–843, ago. 1998.
- [80] WANG, X. et al. Preventive/corrective control for voltage stability using direct interior point method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 3, p. 878–883, ago. 1998.
- [81] PONNAMBALAM, K.; QUINTANA, V. H.; VANNELLI, A. A fast algorithm for power system optimization problems using an interior point method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 2, p. 892–899, maio 1992.
- [82] LU, C. N.; UNUM, M. R. Network constrained security control using an interior point algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 8, n. 3, p. 1068–1076, ago. 1993.
- [83] HINGORANI, N. G. Power electronics in electric utilities: Role of power electronics in future power systems. *IEEE Proceedings, Special Issue on Power Electronics*, v. 76, n. 4, p. 481–482, apr. 1988.
- [84] ACHA, E. et al. *Power Electronic Control in Electrical Systems*. Oxford: Newnes Power Engineering Series, 2002. 434 p.
- [85] GYUGYI, L. Unified Power Flow control concept for flexible AC transmission systems. *IEEE Proceedings-C*, v. 139, n. 4, p. 323–333, july 1992.
- [86] ALOMOUSH, M. I. Derivation of UPFC DC load flow model with examples of its use in restructured power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 18, n. 3, p. 1173–1180, aug. 2003.
- [87] SEN, K. K.; STACEY, E. J. UPFC - Unified Power Flow Controller: Theory, modeling and applications. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 13, n. 4, p. 1453–1460, oct. 1998.
- [88] LUENBERGER, D. G. *Linear and Nonlinear Programming*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1984.
- [89] FLETCHER, R. *Practical Methods of Optimization*. 2nd. ed. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- [90] WRIGHT, S. J. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. Philadelphia: SIAM, 1997.
-

- 
- [91] WANG, H. et al. On computational issues of market-based optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 22, n. 3, p. 1185–1193, ago. 2007.
- [92] LEVENBERG, K. A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 2, p. 164–168, 1944.
- [93] MARQUARDT, D. W. An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 11, p. 431—441, 1963.
- [94] ZHOU, R.; ZHANG, Y.; YANG, H. A trust-region algorithm based on global SQP for reactive power optimization. In: 2ND ICEEE. *Proceedings of 2nd International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ICEEE)*. Mexico City, México, 2005.
- [95] SOUSA, A. A.; TORRES, G. L. Globally convergent optimal power flow by trust-region interior-point methods. In: IEEE POWERTECH 2007. *Proceedings of IEEE PowerTech 2007*. Lausanne, Switzerland, 2007. p. 1 – 6.
- [96] LALEE, M.; NOCEDAL, J.; PLANTENGA, T. On the implementation of an algorithm for large-scale equality constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, v. 8, n. 3, p. 682–706, august 1998.
- [97] STEIHAUG, T. The conjugate gradient method and trust regions in large scale optimization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 20, n. 3, p. 626–637, june 1983.
- [98] SORENSEN, D. C. Newton’s method with a model trust region modification. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 19, p. 409–426, 1982.
- [99] OENING, A. P. *Um algoritmo de filtro globalmente convergente para programação não linear*. Dissertação (Mestrado em Engenharia) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2006.
- [100] HESTENES, M. *Conjugate Directions Methods in Optimization*. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [101] TORRES, G. L.; CARVALHO JÚNIOR, M. A. Computational implementation issues of interior-point based optimal power flows. In: CBA 2006. *Anais do XII Congresso Brasileiro de Automática*. Salvador-BA, 2006.
-

- 
- [102] MARATOS, N. *Exact Penalty Function Algorithms for Finite Dimensional and Control Optimization Problems*. Tese (Doutorado em Filosofia) — University of London, London, UK, 1978.
- [103] GOMES, F. A. M.; MACIEL, M. C.; MARTÍNEZ, J. M. Nonlinear programming algorithms using trust regions and augmented lagrangians with nonmonotone penalty parameters. *Mathematical Programming*, v. 84, n. 1, p. 161–200, january 1999.
-

# Anexo A

---

## Elementos das Matrizes Jacobiana e Hessiana para as Barras com UPFC

---

Nesta seção, apresentam-se as derivadas primeiras e segundas não-nulas das restrições de igualdades dos termos correspondentes às barras com UPFC, apresentados no Capítulo 3. Todos os termos foram obtidos derivando as equações (3.44) e (3.45) com relação às tensões, aos ângulos e às variáveis de controle do UPFC ( $V_S$ ,  $V_R$ ,  $\theta_S$ ,  $\theta_R$ ,  $m_{se}$ ,  $m_{sh}$ ,  $\theta_{se}$  e  $\theta_{sh}$ ).



## A.1 Equações de Balanço de Potência

As equações de balanço de potência nas barras com UPFC são:

$$\Delta P_S = P_{G_S} - P_{D_S} - P_S - m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{S_R} + \theta_{se})$$

$$\Delta P_R = P_{G_R} - P_{D_R} - P_R + m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{S_R} + \theta_{se})$$

$$\Delta Q_S = Q_{G_S} - Q_{D_S} - Q_S - m_{se} b_{se} V_S^2 \cos \theta_{se} - b_{sh} V_S^2 (1 - m_{sh} \cos \theta_{sh})$$

$$\Delta Q_R = Q_{G_R} - Q_{D_R} - Q_R + m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{S_R} + \theta_{se})$$

### Elementos da Matriz Jacobiana

$$\frac{\partial P_S}{\partial V_S} = -m_{se} b_{se} V_R \text{sen}(\theta_{S_R} + \theta_{se}) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial P_S}{\partial V_R} = -m_{se} b_{se} V_S \text{sen}(\theta_{S_R} + \theta_{se}) \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial P_S}{\partial \theta_S} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{S_R} + \theta_{se}) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial P_S}{\partial \theta_R} = m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{S_R} + \theta_{se}) \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial P_S}{\partial m_{se}} = -b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{S_R} + \theta_{se}) \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial P_S}{\partial \theta_{se}} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{S_R} + \theta_{se}) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial P_R}{\partial V_S} = m_{se} b_{se} V_R \text{sen}(\theta_{S_R} + \theta_{se}) \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial P_R}{\partial V_R} = m_{se} b_{se} V_S \text{sen}(\theta_{S_R} + \theta_{se}) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial P_R}{\partial \theta_S} = m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{S_R} + \theta_{se}) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial P_R}{\partial \theta_R} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{S_R} + \theta_{se}) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial P_R}{\partial m_{se}} = b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{S_R} + \theta_{se}) \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial P_R}{\partial \theta_{se}} = m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{S_R} + \theta_{se}) \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial Q_S}{\partial V_S} = -2V_S [m_{se} b_{se} \cos \theta_{se} + b_{sh} (1 - m_{sh} \cos \theta_{sh})] \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial Q_S}{\partial m_{se}} = -b_{se} V_S^2 \cos \theta_{se} \quad (\text{A .14})$$

$$\frac{\partial Q_S}{\partial m_{sh}} = b_{sh} V_S^2 \cos \theta_{sh} \quad (\text{A .15})$$

$$\frac{\partial Q_S}{\partial \theta_{se}} = m_{se} b_{se} V_S^2 \sen \theta_{se} \quad (\text{A .16})$$

$$\frac{\partial Q_S}{\partial \theta_{sh}} = -m_{sh} b_{sh} V_S^2 \sen \theta_{sh} \quad (\text{A .17})$$

$$\frac{\partial Q_R}{\partial V_S} = m_{se} b_{se} V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .18})$$

$$\frac{\partial Q_R}{\partial V_R} = m_{se} b_{se} V_S \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .19})$$

$$\frac{\partial Q_R}{\partial \theta_S} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \sen(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .20})$$

$$\frac{\partial Q_R}{\partial \theta_R} = m_{se} b_{se} V_S V_R \sen(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .21})$$

$$\frac{\partial Q_R}{\partial m_{se}} = b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .22})$$

$$\frac{\partial Q_R}{\partial \theta_{se}} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \sen(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .23})$$

### Elementos da Matriz Hessiana

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial V_S \partial V_R} = -m_{se} b_{se} \sen(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .24})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial V_S \partial \theta_S} = -m_{se} b_{se} V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .25})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial V_S \partial \theta_R} = m_{se} b_{se} V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .26})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial V_S \partial m_{se}} = -b_{se} V_R \sen(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .27})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial V_S \partial \theta_{se}} = -m_{se} b_{se} V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .28})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial V_R \partial \theta_S} = -m_{se} b_{se} V_S \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .29})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial V_R \partial \theta_R} = m_{se} b_{se} V_S \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .30})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial V_R \partial m_{se}} = -b_{se} V_S \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial V_R \partial \theta_{se}} = -m_{se} b_{se} V_S \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial \theta_S^2} = m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial \theta_S \partial \theta_R} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial \theta_S \partial m_{se}} = -b_{se} V_S V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial \theta_S \partial \theta_{se}} = m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial \theta_R^2} = m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial \theta_R \partial m_{se}} = b_{se} V_S V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial \theta_R \partial \theta_{se}} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial m_{se} \partial \theta_{se}} = -b_{se} V_S V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\partial^2 P_S}{\partial \theta_{se}^2} = m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial V_S \partial V_R} = m_{se} b_{se} \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial V_S \partial \theta_S} = m_{se} b_{se} V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial V_S \partial \theta_R} = -m_{se} b_{se} V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial V_S \partial m_{se}} = b_{se} V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial V_S \partial \theta_{se}} = m_{se} b_{se} V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial V_R \partial \theta_S} = m_{se} b_{se} V_S \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial V_R \partial \theta_R} = -m_{se} b_{se} V_S \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial V_R \partial m_{se}} = b_{se} V_S \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial V_R \partial \theta_{se}} = m_{se} b_{se} V_S \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial \theta_S^2} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial \theta_S \partial \theta_R} = m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial \theta_S \partial m_{se}} = b_{se} V_S V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial \theta_S \partial \theta_{se}} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial \theta_R^2} = m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial \theta_R \partial m_{se}} = -b_{se} V_S V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial \theta_R \partial \theta_{se}} = m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial m_{se} \partial \theta_{se}} = b_{se} V_S V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{\partial^2 P_R}{\partial \theta_{se}^2} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{\partial^2 Q_S}{\partial V_S^2} = -2 [m_{se} b_{se} \text{cos} \theta_{se} + b_{sh} (1 - m_{sh} \text{cos} \theta_{sh})] \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{\partial^2 Q_S}{\partial V_S \partial m_{se}} = -2 b_{se} V_S \text{cos} \theta_{se} \quad (\text{A.61})$$

$$\frac{\partial^2 Q_S}{\partial V_S \partial m_{sh}} = 2 b_{sh} V_S \text{cos} \theta_{sh} \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{\partial^2 Q_S}{\partial V_S \partial \theta_{se}} = 2 m_{se} b_{se} V_S \text{sen} \theta_{se} \quad (\text{A.63})$$

$$\frac{\partial^2 Q_S}{\partial V_S \partial \theta_{sh}} = -2 m_{sh} b_{sh} V_S \text{sen} \theta_{sh} \quad (\text{A.64})$$

$$\frac{\partial^2 Q_S}{\partial m_{se} \partial \theta_{se}} = b_{se} V_S^2 \text{sen} \theta_{se} \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{\partial^2 Q_S}{\partial m_{sh} \partial \theta_{sh}} = -b_{sh} V_S^2 \text{sen} \theta_{sh} \quad (\text{A.66})$$

$$\frac{\partial^2 Q_S}{\partial \theta_{se}^2} = m_{se} b_{se} V_S^2 \cos \theta_{se} \quad (\text{A.67})$$

$$\frac{\partial^2 Q_S}{\partial \theta_{sh}^2} = -m_{sh} b_{sh} V_S^2 \cos \theta_{sh} \quad (\text{A.68})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial V_S \partial V_R} = m_{se} b_{se} \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.69})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial V_S \partial \theta_S} = -m_{se} b_{se} V_R \sin(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.70})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial V_S \partial \theta_R} = m_{se} b_{se} V_R \sin(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.71})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial V_S \partial m_{se}} = b_{se} V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.72})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial V_S \partial \theta_{se}} = -m_{se} b_{se} V_R \sin(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.73})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial V_R \partial \theta_S} = -m_{se} b_{se} V_S \sin(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.74})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial V_R \partial \theta_R} = -m_{se} b_{se} V_S \sin(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.75})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial V_R \partial m_{se}} = b_{se} V_S \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.76})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial V_R \partial \theta_{se}} = -m_{se} b_{se} V_S \sin(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.77})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial \theta_S^2} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.78})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial \theta_S \partial \theta_R} = m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.79})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial \theta_S \partial m_{se}} = -b_{se} V_S V_R \sin(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.80})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial \theta_S \partial \theta_{se}} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.81})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial \theta_R^2} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.82})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial \theta_R \partial m_{se}} = b_{se} V_S V_R \sin(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.83})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial \theta_R \partial \theta_{se}} = m_{se} b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A.84})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial m_{se} \partial \theta_{se}} = -b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .85})$$

$$\frac{\partial^2 Q_R}{\partial \theta_{se}^2} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .86})$$

## A .2 Equação de Intercâmbio de Potência no Enlace CC

A equação de intercâmbio de potência entre os conversores série e paralelo é:

$$\Delta P_E = m_{sh} b_{sh} V_S^2 \text{sen} \theta_{sh} - m_{se} b_{se} V_S^2 \text{sen} \theta_{se} + m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se})$$

### Elementos da Matriz Jacobiana

$$\frac{\partial P_E}{\partial V_S} = 2m_{sh} b_{sh} V_S \text{sen} \theta_{sh} - m_{se} b_{se} [2V_S \text{sen} \theta_{se} - V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se})] \quad (\text{A .87})$$

$$\frac{\partial P_E}{\partial V_R} = m_{se} b_{se} V_S \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .88})$$

$$\frac{\partial P_E}{\partial \theta_S} = m_{se} b_{se} V_S V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .89})$$

$$\frac{\partial P_E}{\partial \theta_R} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .90})$$

$$\frac{\partial P_E}{\partial m_{se}} = -b_{se} [V_S^2 \text{sen} \theta_{se} + V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se})] \quad (\text{A .91})$$

$$\frac{\partial P_E}{\partial m_{sh}} = b_{sh} V_S^2 \text{sen} \theta_{sh} \quad (\text{A .92})$$

$$\frac{\partial P_E}{\partial \theta_{se}} = -m_{se} b_{se} [V_S^2 \text{cos} \theta_{se} - V_S V_R \text{cos}(\theta_{SR} + \theta_{se})] \quad (\text{A .93})$$

$$\frac{\partial P_E}{\partial \theta_{sh}} = m_{sh} b_{sh} V_S^2 \text{cos} \theta_{sh} \quad (\text{A .94})$$

### Elementos da Matriz Hessiana

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial V_S^2} = 2m_{sh} b_{sh} \text{sen} \theta_{sh} - 2m_{se} b_{se} \text{sen} \theta_{se} \quad (\text{A .95})$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial V_S \partial V_R} = m_{se} b_{se} \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (\text{A .96})$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial V_S \partial \theta_S} = m_{se} b_{se} V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .97)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial V_S \partial \theta_R} = -m_{se} b_{se} V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .98)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial V_S \partial m_{se}} = -b_{se} [2V_S \text{sen } \theta_{se} - V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se})] \quad (A .99)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial V_S \partial m_{sh}} = 2b_{sh} V_S \text{sen } \theta_{sh} \quad (A .100)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial V_S \partial \theta_{se}} = -m_{se} b_{se} [2V_S \cos \theta_{se} - V_R \cos \theta_{se}] \quad (A .101)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial V_S \partial \theta_{sh}} = 2m_{sh} b_{sh} V_S \cos \theta_{sh} \quad (A .102)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial V_R \partial \theta_S} = m_{se} b_{se} V_S \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .103)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial V_R \partial \theta_R} = -m_{se} b_{se} V_S \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .104)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial V_R \partial m_{se}} = b_{se} V_S \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .105)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial V_R \partial \theta_{se}} = m_{se} b_{se} V_S \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .106)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial \theta_S^2} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .107)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial \theta_S \partial \theta_R} = m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .108)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial \theta_S \partial m_{se}} = b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .109)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial \theta_S \partial \theta_{se}} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .110)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial \theta_R^2} = -m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .111)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial \theta_R \partial m_{se}} = -b_{se} V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .112)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial \theta_R \partial \theta_{se}} = m_{se} b_{se} V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \quad (A .113)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial m_{se} \partial \theta_{se}} = -b_{se} [V_S^2 \cos \theta_{se} + V_S V_R \cos(\theta_{SR} + \theta_{se})] \quad (A .114)$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial m_{sh} \partial \theta_{sh}} = b_{sh} V_S^2 \cos \theta_{sh} \quad (\text{A .115})$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial \theta_{se}^2} = m_{se} b_{se} \left[ V_S^2 \text{sen } \theta_{se} - V_S V_R \text{sen}(\theta_{SR} + \theta_{se}) \right] \quad (\text{A .116})$$

$$\frac{\partial^2 P_E}{\partial \theta_{sh}^2} = -m_{sh} b_{sh} V_S^2 \text{sen } \theta_{sh} \quad (\text{A .117})$$



---

# Índice Remissivo

---

- C**  
Convergência Global, 2, 69
- E**  
Estabilidade de Tensão  
índices, 6, 28  
restrições, 5, 28
- F**  
FACTS, 4, 34–36, 38  
controladores, 35  
SSSC, 36, 38  
STATCOM, 36  
UPFC, 4, 36, 39
- P**  
Pontos Interiores, 1, 57  
método preditor-corretor, 64, 105  
método primal-dual, 58, 100  
Problemas de FPO, 1, 10  
forma geral, 10  
maximização da carga em um conjunto  
de barras, 12  
maximização da potência transferida  
entre duas barras, 12  
maximização do fluxo ativo em um con-  
junto de circuitos, 12  
minimização de corte de carga, 11  
minimização de custos de geração, 11  
minimização de perdas ativas, 11  
minimização do movimento de variáveis  
de controle, 11
- R**  
Região de Confiança, 2, 70  
função mérito, 3, 89  
subproblema horizontal, 76, 98  
subproblema vertical, 75, 97