

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

VICTOR ENRIQUE VERMEHREN VALENZUELA

**DESENVOLVIMENTOS DE WAVELETS PARA
APLICAÇÕES NA DIFRAÇÃO ESCALAR,
ESPECTROFOTOMETRIA E MICROSCOPIA
HOLOGRÁFICA**

RECIFE-PE – JULHO 2013

VICTOR ENRIQUE VERMEHREN VALENZUELA

**DESENVOLVIMENTO DE WAVELETS PARA
APLICAÇÕES NA DIFRAÇÃO ESCALAR,
ESPECTROFOTOMETRIA E MICROSCOPIA
HOLOGRÁFICA**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco - como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de **Doutor em Engenharia Elétrica**.

Helio Magalhães de Oliveira, Docteur.
Orientador

Recife-PE, Brasil

© Victor Enrique Vermehren Valenzuela, 2013

AGRADECIMENTOS

Aqui expresso meus sinceros agradecimentos às pessoas que contribuíram direta e indiretamente para o desenvolvimento desta tese. Em especial agradeço:

À minha família, ao meu Pai Roland Stevenson, a minha Mãe Silvia, a minha amada esposa Waldenira Vermehren e filhos, pelos incansáveis apoios, incentivos e vibração durante todos os momentos altos e baixos do doutorado.

Ao meu orientador, professor Helio Magalhães de Oliveira, por me aceitar e confiar em mim como orientado no doutorado; pelas contribuições, motivações e vibração; que mesmo nos momentos difíceis jamais deixou que Eu esmorecesse. Além disso, um excelente professor e amigo.

Aos professores Ricardo Campelo e Cecílio Pimentel que me permitiram pequenas contribuições em suas disciplinas, mas me motivou enormemente durante a fase de créditos.

Ao coordenador do DINTER, professor Rafael Lins, pela sua valorosa luta pelo DINTER, que muito contribuirá para a região Norte.

Aos colegas do DINTER, que me ajudaram nas diversas fases do doutorado. Em particular ao Ednelson e Isaac, pelas nossas intermináveis horas de estudo, sugestões, contribuições e em nossas construtivas discussões.

VICTOR ENRIQUE VERMEHREN VALENZUELA

Universidade Federal de Pernambuco

Julho de 2013

RESUMO DA TESE

**DENVOLVIMENTO DE WAVELETS PARA APLICAÇÕES
EM DIFRAÇÃO ESCALAR, ESPECTROFOTOMETRIA E
MICROSCOPIA HOLOGRÁFICA**

Victor Enrique Vermehren Valenzuela

Julho/2013

Orientador: Prof. Hélio Magalhães de Oliveira, Docteur.

Área de Concentração: Comunicações

Palavras-chaves: Difração Escalar, Wavelets, Transformada Contínua de Wavelets, Espectrofotometria, Grade de Difração, Daublets, Holografia.

Número de páginas: 140

Esta tese introduz nova formulação para representar a difração escalar na forma da transformada contínua de wavelet bidimensional (2D-CWT). Para tal foi desenvolvida uma nova família de wavelets chamada de *chirplet* óptica. Tal família atende os princípios de ondas de Huygens-Fresnel e as propriedades de wavelets. Essa nova formulação cria uma ferramenta de processamento digital de imagens ópticas capaz de representar e processar os complexos sinais dos padrões ópticos. A associação dessa nova formulação com a grade de difração fotônica proposta para espectrofotômetros leva ao desenvolvimento de expressões analíticas desse fenômeno de difração - as wavelets cromáticas. E por último, o desenvolvimento das expressões analíticas das daublets (wavelets Daubechies), para em conjunto com a wavelet *chirplet* óptica realizar a aplicação de fusão de imagens na microscopia holográfica – as wavelets holográficas. Duas aplicações também envolvendo wavelets com aplicações em imagens – que foram desenvolvidas durante a pesquisa – foram colocadas em apêndices. Uso de 2D-CWT em análise de imagens topográficas e novas wavelets multidimensionais (Orbital Wavelets) para decomposição escalável.

ABSTRACT OF TESIS

**DEVOLOPMENT OF WAVELETS FOR APLICATIONS
IN SCALAR DIFFRACTION, SPECTROPHOTOMETRY AND
HOLOGRAPHIC MICROSCOPY**

Victor Enrique Vermehren Valenzuela

July/2013

Supervisor: Prof. Hélio Magalhães de Oliveira, Docteur.

Area of Concentration: Communication

Keywords: Scalar Diffraction, Wavelets, Continuous Wavelets Transform, Spectrophotometry, Diffraction Grating, Daubechies, Holography.

Numer of pages: 140

This tesis introduces a new formulation to represent the scalar diffraction in the form of bidimensional continuous wavelet transform (2D-CWT). For this it was developed a new family of wavelets called of chirplet optics. This family meets the principles of waves Huygens-Fresnel and properties of wavelets. This new formulation creates a tool for digital image processing optical able to represent and process complex signals of optical standards. The association of this new formulation with the photonic diffraction grating, proposed for spectrophotometers, leads to the development of analytical expressions of that diffraction phenomenon - the chromatic wavelets. And finally, the development of the analytical expressions for daubechies (Daubechies wavelets), for together with the wavelet chirplet optic perform the image fusion in holographic microscopy - the holographic wavelet. Two applications also involving wavelets with applications to images - which were developed during the research - were placed in appendices. Using 2D-CWT in topographic images analysis and new multidimensional wavelets (Orbital Wavelets) for scalable decomposition.

Lista de Tabelas

TABELA I. COEFICIENTES CALCULADOS DAS FUNÇÕES (APROXIMADAS) DE WAVELET DAUBECHIES ψ_{DB4} , ψ_{DB6} , E ψ_{DB8}	36
TABELA II. COEFICIENTES CALCULADOS DAS FUNÇÕES DE ESCALA (APROXIMADAS) DE DAUBECHIES PARA ϕ_{DB4} , ϕ_{DB6} E ϕ_{DB8} ...	36
TABELA III. COEFICIENTES ω_k REQUERIDOS PARA APROXIMAR A WAVELET DAUBECHIES PARA A WAVELET ψ_{DB4}	37

Lista de Figuras

1. Exemplo de convolução para gerar a distribuição espacial de aberturas de uma grade de difração.....	17
2. Gráficos exemplos de aplicação da FT para aberturas padrão.....	19
3. Gráficos de algumas wavelets padrão.....	23
4. Gráficos mostrando o efeito de deslocando da wavelet.....	23
5. Mostra variações do tamanho da wavelet chapéu mexicano localmente.....	24
6. Demonstração esquemática do processo de dilatação e deslocamento da CWT.....	25
7. Imagem mostrando o Resultado da CWT com a db20.....	25
8. Um sinal composto e sua transformada CWT.....	28
9. Filtragem do sinal composto através da ICWT.....	28
10. Construção das ondas de Huygens.....	30
11. Iluminação com anteparo próximo da abertura.....	30
12. Padrão de difração e interferência na região de Fraunhofer.....	31
13. Conforme a distância para abertura formam-se diferentes padrões de difração e interferência.....	31
14. O volume e sua superfície usada no teorema de Green.....	32
15. A geometria usada na formulação da difração pela teoria de Kirchoff.....	33
16. Geometria usada na formulação de difração de Fresnel-Kirchoff.....	34
17. Geometria usada na formulação de difração de Rayleigh-Sommerfield.....	35
18. Geometria para o princípio de Huygens-Fresnel em coordenadas retangulares.....	36
19. Coordenadas para o cálculo do padrão de difração de uma abertura retangular.....	37
20. Gráfico 3D do padrão de intensidade de difração de <i>Fraunhofer</i> de uma abertura retangular.....	38
21. Padrão de difração de campo afastado de uma abertura retangular (foto).....	39
22. Coordenadas para o cálculo do padrão de difração de uma abertura circular.....	39
23. Gráfico 3D do padrão de intensidade de difração de <i>Fraunhofer</i> de uma abertura circular.....	40
24. Padrão de difração de campo afastado de uma abertura circular (foto).....	40
25. Gráfico ilustrando o espectro eletromagnético, com as faixas de espectrometria.....	41
26. Espectrofotômetro convencional Spectronic 20 de uso geral.....	43
27. Representação esquemática do funcionamento de um espectrofotômetro convencional.....	44
28. Foto de lâmpada halógena de tungstênio (a) e deutério (b).....	44
29. Foto de um monocromador com grade de difração como elemento de dispersão da luz.....	45
30. Esquema da difração de ondas de luz no prisma e na grade de difração.....	46
31. Figura com grade de difração do tipo reflexiva.....	47
32. Figura ilustrando cubetas com diferentes comprimentos de passagem do feixe.....	48
33. Figura com uma foto de um CCD e o esquema construtivo do dispositivo CCD.....	49
34. Gravação do holograma.....	50

35. Reconstrução do holograma.....	51
36. Diagrama esquemático de microscopia digital holográfica.....	52
37. Gráfico esquemático de funcionamento de DHM.....	53
38. Formação das imagens gêmeas a partir do holograma.....	54
39. Gráficos da Wavelet Chirplet Óptica.....	60
40. Simulação da aplicação da wavelet chirp óptica.....	64
41. Célula epidermal da semente <i>Arabidopsis</i>	65
42. Filtragem com ICWT Chirplet Óptica.....	66
43. Desenho esquemático do funcionamento do espectrofotômetro fotônico.....	69
44. Painel de aberturas retangulares 2D.....	70
45. Geometria de uma grade de múltiplas fendas paralelas.....	71
46. Padrão de difração de um sistema de fendas.....	72
47. Padrão de difração 2D de um sistema de fendas.....	73
48. Os padrões de intensidade com as difrações resolvidas.....	74
49. Foto ampliada dos segmentos do painel de cristais fotônicos.....	75
50. Conjunto para simulação de espectrofotômetro fotônico.....	76
51. Espectrofotômetro óptico (HITACHI U-1100) com grade de difração convencional.....	76
52. Resposta Espectral normalizada do painel 20X1 de cristais fotônicos padrão Trinitron,.....	77
53. Comparação entre o espectrofotômetro fotônico e o espectrofotômetro convencional (LED).....	78
54. Efeito do número de elementos sobre a resposta dos espectrofotômetros (30 funções com LED).....	79
55. Comparação entre o espectrofotômetro fotônico e o convencional (lâmpada de tungstênio).....	80
56. Efeito do número de elementos sobre a resposta dos espectrofotômetros (30 funções com tungstênio).....	80
57. Sinal da $\psi_{long}(t)$ para <i>db6</i>	85
58. Sinal da $\phi_{long}(t)$ para <i>db6</i>	86
59. Espectro da expressão, long <i>db6</i> , usada como modelo para <i>db6</i>	88
60. Espectro da onda <i>short db6</i>	89
61. Resultado da superposição de <i>sinc</i>	89
62. Tela mostrando a <i>cdb4 daublet</i> implementado na caixa de ferramentas do Matlab™.....	91
63. Tela mostrando a <i>cdb6 daublet</i> na caixa de ferramentas do Matlab™.....	91
64. Diagrama mostrando a fusão de imagem com a <i>cdb6 daublet</i> na caixa de ferramentas do Matlab™.....	93
65. Coeficientes dos filtros da wavelet Daubechies 4 e da função de escala.....	94
66. Primeira das interpolações e filtrações passa-baixa.....	95
67. Representação da <i>db4</i> durante o processo de reconstrução e aproximação.....	96

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Contribuições.....	12
1.2	Organização da Tese.....	13
2	REVISÃO TEÓRICA.....	14
2.1	Técnicas de Processamento Digital de Sinais no Domínio da Óptica.....	14
2.1.1	Modelos Matemáticos de Sinais Ópticos	14
2.1.1.1	Definições e classificação.....	14
2.1.1.2	Técnicas de Processamento.....	16
2.1.2	Transformadas.....	18
2.2	Wavelets e Filtragem Adaptativa.....	21
2.3	Transformada de Wavelets.....	22
2.3.1	Formulação Matemática da CWT.....	26
2.4	Óptica.....	29
2.4.1	Difração.....	29
2.4.2	Espectrofotometria.....	41
2.4.2.1	Espectrofotômetro	42
2.4.3	Holografia	49
2.4.4	Microscopia Holográfica Digital.....	51
3	WAVELETS ÓPTICAS.....	55
3.1	Wavelets e as Equações de Ondas de Huygens.....	55
3.2	A Wavelet Proposta.....	57
3.3	A 2D-CWT.....	60
3.4	A 2D-ICWT.....	62
3.5	Simulação e Resultados.....	63
3.6	Potenciais Aplicações.....	65
4	WAVELETS CROMÁTICAS.....	67
4.1	Espectrofotômetros e uma nova topologia fotônica na Grade de Difração.....	67

4.2	Princípio de operação do espectrofotômetro fotônico.....	68
4.3	Difração de múltiplas fendas e as wavelets cromáticas.....	70
4.4	Crítério de Rayleigh dos padrões de difração.....	73
4.5	Experimentos e simulações.....	74
4.6	Resultados.....	77
5	WAVELETS HOLOGRÁFICAS.....	81
5.1	Expressões analíticas para Daublets e seu espectro.....	81
5.1.1	Análise da série não harmônica.....	82
5.1.2	Expressões analíticas nos domínios do tempo e frequência.....	84
5.1.2.1	Análise no domínio do tempo.....	84
5.1.2.2	Análise no domínio da frequência.....	87
5.1.2.3	Construindo <i>cdbN</i> na <i>toolbox wavelet</i> do MatlabTM.....	90
5.1.3	Potenciais aplicações da abordagem analítica das Daublets.....	92
5.1.4	Aplicação da abordagem analítica das Daublet em conjunto com a Chirplet óptica: Wavelets Holográficas.....	93
5.1.5	Processo iterativo de construção das Daublet.....	94
6	CONCLUSÕES.....	97
6.1	Wavelets Ópticas.....	97
6.2	Wavelets Cromáticas.....	98
6.3	Wavelets Holográficas.....	99
6.4	Trabalhos Futuros.....	100
	REFERÊNCIAS.....	101
	APÊNDICE A.....	113
	APÊNDICE B.....	126

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O estado da arte tem conduzido à busca de novas técnicas de processamento de sinais que sejam compatíveis com a evolução das tecnologias existentes. Atualmente, as investigações realizadas na área de computação quântica [1] e óptica biomédica [2] têm demandado novas ferramentas e técnicas para o processamento eficiente de sinais ópticos. A transformada de Fourier oferece uma poderosa ferramenta de análise e processamento de sinais e imagens no domínio óptico e firmou, com isso, uma posição bastante consolidada [3]. Por outro lado, existem estudos na direção de calcular a transformada de wavelet [4] por meio de sistemas opto-mecânicos [5], na tentativa de cada vez mais melhorar a análise e o processamento de sinais ópticos. Apesar de todos os esforços, cada solução que tem sido tentada para promover a melhoria do sistema óptico tem culminando em resultados que não atingem a perfeição. Os estudos tomaram essa direção porque ainda não havia se encontrado uma equivalência analítica consistente de refração escalar na forma de uma ferramenta de processamento digital de sinais ópticos.

O presente trabalho oferece uma solução calculando o padrão óptico de difração a partir da transformada de *wavelet* bidimensional [6] para expressar os fenômenos de difração [7]. Assim, é possível, a partir da *wavelet* óptica associada a este padrão [8], processar os sinais ópticos e obter as janelas ou os objetos que geraram os padrões de difração. Esta nova formulação tem impacto principalmente nas seguintes áreas:

- Ultrassonografia. [9]
- Tomografia. [10]
- Projeto de antenas. [11]
- Espectrofotometria. [12]
- Microscopia holográfica. [13]
- Compressão de imagens. [14]

Partindo-se dessa solução, investiga-se o caso particular das aberturas retangulares múltiplas - as grades de difração. Os resultados demonstram que a associação da wavelet óptica a essa imagem cromática conduz a uma melhoria da eficiência do *hardware* fotônico proposto neste trabalho. Isto proporciona portabilidade e considerável redução de custos na substituição de sistemas ópticos convencionais [8, 15]. Neste contexto ainda, a ideia de substituição por um sistema equivalente de menor custo e mais eficiente vem também a partir das próprias deficiências do *hardware* óptico, suscetível a desalinhamentos e degradações ao longo do tempo.

O desenvolvimento de *wavelets* [16, 17] que apresentem as mesmas propriedades do núcleo da transformação da difração e ao padrão cromático gerado por grades constituía-se um grande desafio. Apesar do grande número de técnicas de modelagem matemática e de simulação hoje disponíveis, ainda não se tinha conhecimento de técnicas que apresentassem nível de funcionamento com precisão igual aos sistemas ópticos convencionais (espelhos, lentes e grades de difração, inclusive fontes de luz).

A seguir, apresenta-se uma breve cronologia da teoria da óptica e do desenvolvimento das *wavelets* (relacionadas à difração) conhecidos na literatura:

- Em 1665 (publicação póstuma), Francesco Grimaldi (1618-1663) em seu *Physico-mathesis de lumine, coloribus et iride* foi a primeira publicação de estudo detalhado de algo que ele chamou de “*diffraçtio*” [18].
- Em 1665, Robert Hooke (1665-1703) primeiro a estudar os padrões de interferência coloridos e pioneiro no uso de microscópio [19].
- Em 1678, Christian Huygens (1629-1695) difundiu largamente a teoria da ondulatória da luz [20].

- Em 1804, Thomas Young (1773-1829), físico inglês que introduziu o conceito fundamental chamado de “princípio de interferências” [21].
- Em 1818, Augustin Jean Fresnel (1788-1827), unificou os conceitos inerentes à descrição ondulatória de Huygens e ao princípio de interferência de Young [22].
- Em 1823, Joseph Fraunhofer (1787-1826), contribuiu com os primeiros trabalhos de grades de difração para o desenvolvimento da espectroscopia [23].
- Em 1860, James Clerk Maxwell (1831-1879), identificou a luz como onda eletromagnética [24].
- Em 1896, Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868-1951), construiu a primeira solução exata de uma configuração particular de difração com base na teoria eletromagnética da luz [25].
- Em 1909, Alfred Haar (1885-1933), publica sua tese de doutorado com a primeira menção sobre Wavelets, onde se fala em análise escalonada [26].
- Em 1948, Dennis Gabor (1900-1979), propôs uma nova técnica que ele chamou de *reconstrução da frente de onda*, a qual hoje se conhece como holografia [27].
- Em 1981, Jean Paul Morlet (1931-2007) e Alex Grossmann introduziram o conceito de wavelet e desenvolveram o que é conhecido como transformada de wavelet [28].
- Em 1988, Ingrid Daubechies lança os alicerces das wavelets ortonormais de suporte compacto [29]
- Em 1989, Stephane Mallat estabeleceu a ligação da teoria de wavelets com o processamento digital de sinais e algoritmos piramidais [30].
- Em 1992, Y. Sheng publica artigo que representa a transformada de wavelet óptica através da introdução de sistemas opto-mecânicos [31].
- Em 1993, L. Onural publica artigo da difração sob o ponto de vista de wavelets destacando o núcleo de transformação *chirp* [32].
- Em 1993, D. Mendlovic publica artigo com a realização óptica da transformada de wavelet bidimensional também com sistemas opto-mecânicos [17].
- Em 1994, H. M. Ozaktas publica artigo com a realização do núcleo de transformação *chirp* da difração no domínio da transformada fracionada de Fourier [33].

- Em 2002, S. Deschenes et al publica artigo em que desenvolve as wavelets físicas – representação através de domínio próprio as wavelets como ondas eletromagnéticas [34].
- Em 2002, Christopher Palmer publica as bases das grades de difração através do Handbook de Grades de Difração [35].
- Em 2003, M. Liebling et al desenvolvem as bases das wavelets discretas de multiresolução para holografia digital [36].
- Em 2007, O. K. Ersoy estabelece as bases da transformada de Fourier óptica para lentes ópticas de difração [37].

1.1. Contribuições

O presente trabalho visa o desenvolvimento de novas wavelets tendo como ponto de partida as equações de onda esféricas de Huygens-Fresnel. A partir desse ponto desenvolvem-se wavelets que representem o núcleo de transformação da difração escalar. Seguem-se as wavelets do padrão cromático de difração de uma nova topologia de monocromadores com grade fotônica de espectrofotômetros e a de fusão de imagens em microscopia holográfica.

As principais contribuições dadas no desenvolvimento de wavelets ópticas:

- Uma nova ferramenta de processamento digital de imagens ópticas, equivalente à difração escalar da teoria da óptica.
- Uma nova grade de difração com topologia nanofotônica para espectrofotômetros.
- Modelamento dos padrões ópticos cromáticos transmitidos por grades de tecnologia nanofotônica em espectrofotômetros.
- Um novo filtro decorrente do núcleo de transformação da equação de onda que elimina os problemas decorrentes da difração nas imagens de microscopia digital holográfica causada pelas imagens gêmea e de ordem zero.
- Otimização das aplicações das Daublets, Symlet e Coiflet com o desenvolvimento de suas expressões analíticas no domínio do tempo e da frequência.

- Completar e expandir as investigações biológicas e físico-químicas em pontos nunca antes estudados.

A nova formulação de difração escalar na forma da transformada contínua de wavelets bidimensional apresentada tem valorosas implicações tecnológicas. Trará como virtude a drástica diminuição de custo e dimensões do *hardware* nas áreas do conhecimento que estiver envolvida, principalmente na área biomédica. Isto se deve ao fato de superar diversas barreiras causadoras de erros e interferências sem o uso de dispositivos opto-mecânicos (filtros espaciais, lentes, câmeras auxiliares, e outros).

1.2 Organização da Tese

A tese está organizada em seis capítulos e dois apêndices. Após esta introdução, o Capítulo 2 apresenta os fundamentos teóricos necessários para o entendimento dos desenvolvimentos envolvidos na Tese: as modernas técnicas de processamento digital de sinais, os conceitos de transformada de wavelet e de teoria óptica, preparando o terreno para a verificação do inter-relacionamento entre suas equações. No Capítulo 3 são demonstradas as novas formulações de difração escalar na forma da transformada contínua de wavelet bidimensional. No Capítulo 4 inicia-se com a apresentação da topologia de monocromadores substituindo a grade convencional por uma nova de tecnologia nanofotônica. A seguir, os padrões ópticos transmitidos pela grade nanofotônica são modelados com auxílio da formulação apresentada no capítulo anterior. No Capítulo 5 são demonstradas as expressões analíticas das *Daublets* desenvolvidas para o domínio do tempo e sua consequente solução no domínio da frequência. O Capítulo 6 apresenta as conclusões e os trabalhos futuros. E por último, dois Apêndices apresentando outros trabalhos desenvolvidos com aplicações wavelets, durante o transcorrer da tese.

CAPÍTULO 2

REVISÃO TEÓRICA

2.1 Técnicas de Processamento Digital de Sinais no Domínio da Óptica

Processamento digital de sinais é uma área da ciência e engenharia que se tem desenvolvido rapidamente nos últimos 40 anos. O processamento digital de sinais estuda o comportamento dos sinais e viabiliza meios de extrair informações úteis, diminuindo custos e fornecendo soluções para problemas específicos nas mais diversas áreas da engenharia, ciências biológicas, física, militar, entre outras.

Nesse contexto, esta ferramenta matemática tem papel importante em áreas como a biomedicina onde a aplicação de técnicas de processamento digital de imagens na óptica desenvolveu fortemente ferramentas tais como a tomografia computadorizada e a ressonância magnética.

A transformada de Fourier e de wavelets, associados com operações de convolução e correlação, formam as bases na formação da imagem óptica e processamento com sistema de lentes. Também se pode citar a forte influência nas pesquisas da estrutura atômica da matéria à estruturas galácticas do universo, e de métodos modernos na espectrofotometria.

2.1.1. Modelos Matemáticos para Sinais Ópticos

2.1.1.1. Definições e classificação

Sinais e técnicas de processamento de sinais são tratados através de modelos

matemáticos. O modelo mais simples é aquele de uma função matemática. Por exemplo, sinais ópticos são considerados funções que especificam a relação entre parâmetros físicos de ondas tais como coordenadas espaciais e de tempo. A seguir serão dados alguns exemplos de terminologias associadas a funções matemáticas que pode ser utilizado como uma classificação.

Exemplos de sinais ópticos escalares são as imagens de escala de cinza. Exemplos de sinais vetoriais são sinais de dois componentes que representam, por exemplo, componentes ortogonais de uma onda eletromagnética. Exemplos de sinais 1D (unidimensionais) são sinais de áudio ou medidas físicas em função do tempo. Imagens são modeladas como funções 2D (bidimensionais) com coordenadas em um plano. Vídeo pode ser considerado como funções 3D (tridimensionais) com coordenadas em um plano e tempo. O espectro óptico de imagens coloridas também pode ser tratado como função 3D de coordenadas e comprimento de onda no plano.

Sinais discretos são sinais especificados como uma sequência de valores. Os termos desta sequência são chamados de sinais amostras. Sinais quantizados são aqueles que recebem valores de um conjunto finito de possíveis valores (níveis de quantização). Sinais ópticos que carregam informação com propriedades de objetos físicos reais são sinais contínuos. São modelados como funções contínuas em termos de suas amplitudes e argumentos. Sinais contínuos são frequentemente chamados de sinais analógicos por eles serem considerados como análogos do correspondente objeto físico.

No outro lado da classificação encontram-se os sinais digitais. Geralmente, cada sinal digital pode ser considerado um simples número. Na prática, sinais digitais são representados como uma sequência de números quantizados que podem ser considerados como dígitos destes simples número e são chamados amostras digitais. Neste sentido, os sinais digitais podem ser considerados como sendo discretos e quantizados. Em processamento digital de sinais os sinais analógicos devem ser convertidos para aqueles digitais correspondentes. Esta conversão será referida como digitalização do sinal. A digitalização do sinal sempre assume, explícita ou implicitamente, que a inversão para o correspondente analógico é possível. Esta conversão digital-analógica será referida como reconstrução do sinal.

2.1.1.2. Técnicas de processamento

Certas técnicas são fundamentais para o processamento imagens digitais ópticas. Estes incluem ferramentas matemáticas, tais como convolução, análise de Fourier, e a amostragem. Essas ferramentas serão apresentadas sem qualquer motivação específica. A motivação será a seguir em seções posteriores.

a – Sistemas Lineares, Convolução e Correlação

Um sistema pode ser considerado como o mapeamento de uma entrada ou conjunto de entradas para uma saída ou conjunto de saídas. Uma representação interessante é a de um operador matemático [40]. Segue um exemplo de um sistema de entrada única e saída única,

$$F_o(x,y) = P_{xy}\{f_i(x,y)\}, \quad (1)$$

em que f_i e f_o são a entrada e a saída, respectivamente, e P_{xy} é o operador.

A saída $P_{xy}\{\delta(x-x',y-y')\} = \hat{h}(x,y,x',y')$ para uma função delta de entrada da forma $\delta(x-x',y-y')$, é chamada resposta ao impulso de um sistema linear. Usando-se a propriedade de deslocamento de funções delta, sabe-se que uma função arbitrária $f_i(x,y)$ pode ser representada como a seguir [39].

$$f_i(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x',y')\delta(x-x',y-y')dx'dy', \quad (2)$$

em que $f_i(x,y)$ pode ser considerada como uma combinação linear de funções delta ponderadas e deslocadas. Pode-se, então, escrever a saída $f_o(x,y)$ do sistema linear como mostrado a seguir.

$$f_o(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x',y')\hat{h}(x,x',y,y')dx'dy', \quad (3)$$

Desde que, um sistema é chamado invariante no espaço se a resposta ao impulso $\hat{h}(x,y,x',y')$ depende somente de $x - x'$, $y - y'$, ou seja,

$$\hat{h}(x,y,x',y') = h(x - x',y - y'). \quad (4)$$

Assim, um sistema é chamado invariante no espaço se a saída $f_o(x,y)$ da equação (3) é

reescrita como,

$$f_o(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x', y') h(x - x', y - y') dx' dy', \quad (5)$$

A equação (5) também é chamada de integral de convolução.

A convolução $f(x, y)$ de duas funções $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ é definida como

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x', y') f_2(x - x', y - y') dx' dy' = g_1(x, y) * g_2(x, y), \quad (6)$$

Usando esta definição, a equação (5) pode ser reescrita também de uma forma simbólica como na equação a seguir. Observe que atende a propriedade comutativa.

$$f_o(x, y) = f_i(x, y) * h(x, y) = h(x, y) * f_i(x, y), \quad (7)$$

A correlação $s(x, y)$ de duas funções $s_1(x, y)$ e $s_2(x, y)$ é definida como

$$s(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x', y') s_2(x + x', y + y') dx' dy' = s_1(x, y) \otimes s_2(x, y), \quad (8)$$

Comparando-se a equação (6) com (8) pode-se observar a seguinte relação.

$$s(x, y) = s_1(x, y) * s_2(-x, -y) = s_1(-x, -y) * s_2(x, y), \quad (9)$$

Estes resultados de convolução e correlação podem ser utilizados para geração da distribuição espacial das aberturas padrão de grade de difração. E terão utilização extensiva nos capítulos que seguem na formulação da difração na forma da transformada contínua de wavelets. A seguir a Figura 2 mostra graficamente a aplicação da convolução.

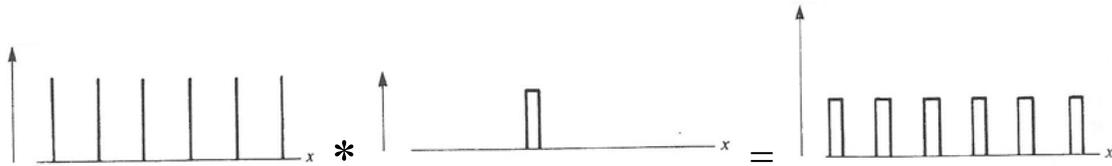


Figura 1. Exemplo de aplicação da convolução para gerar a distribuição espacial de aberturas retangulares de uma grade de difração.

b – Amostragem no domínio do fenômeno da difração

Uma imagem digital $b(m,n)$ descrita em um espaço discreto é obtido de uma imagem analógica $a(x,y)$ em um espaço contínuo 2D através de um processo de amostragem, frequentemente referido como digitalização. No sistema de amostragem ideal, $a(x,y)$ é multiplicado por um trem de pulso ideal 2D.

Nos sistemas de imagens a informação normalmente medida é intensidade da imagem (sinal) ou do padrão de difração. E assim, nas imagens da difração, por serem funções complexas, a informação de fase é perdida [41]. Não obstante, o principal problema é a recuperação do sinal que precisa das duas informações, amplitude e fase.

Existem diversos estudos na tentativa de contornar esse problema [41], [42]. Portanto, devido a esse fato que não é o foco deste trabalho, esta seção não se aprofundará nesta ferramenta matemática.

2.1.2. Transformadas

A transformada de Fourier espacial unidimensional de uma função quadrado integrável, $f(x)$, é dada como a seguir [38],

$$F(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{jk_x x} dx = \mathfrak{F}_x \{f(x)\}. \quad (10)$$

A transformada inversa de Fourier é

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x)e^{-jk_x x} dk_x = \mathfrak{F}_x^{-1} \{F(k_x)\}. \quad (11)$$

Se $f(x)$ denota uma quantidade fasorial eletromagnética, a multiplicação por $e^{j\omega t}$ resulta no espectro de ondas planas viajantes.

A extensão 2D das Equações (10) e (11) são mostradas a seguir

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy = \mathfrak{F}_{x,y} \{f(x, y)\}, \quad (12)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y)e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = \mathfrak{F}_{x,y}^{-1} \{F(k_x, k_y)\}. \quad (13)$$

Em muitas aplicações ópticas, a função $f(x,y)$ representa um campo eletromagnético ou óptico em um plano de observação a uma distância z do plano de iluminação. Assim, introduzindo o parâmetro z nas equações (12) e (13), a equação (13) pode ser reapresentada da seguinte forma,

$$f(x, y; z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (14)$$

A utilidade desta transformada reside no fato de que quando substituída na equação de onda, pode-se reduzir uma equação parcial diferencial de três variáveis (onda 3D), em uma equação diferencial ordinária na equação espectral $F(k_x, k_y; z)$.

A transformada de Fourier desempenha um papel excepcional na holografia digital e no processamento de imagens ópticas. Além de seu papel fundamental na representação matemática de propagação de ondas e formação de imagem, ele tem, em sua representação discreta, a transformada discreta de Fourier (DFT), a propriedade notável de eficiência computacional via transformada rápida de Fourier (FFT).

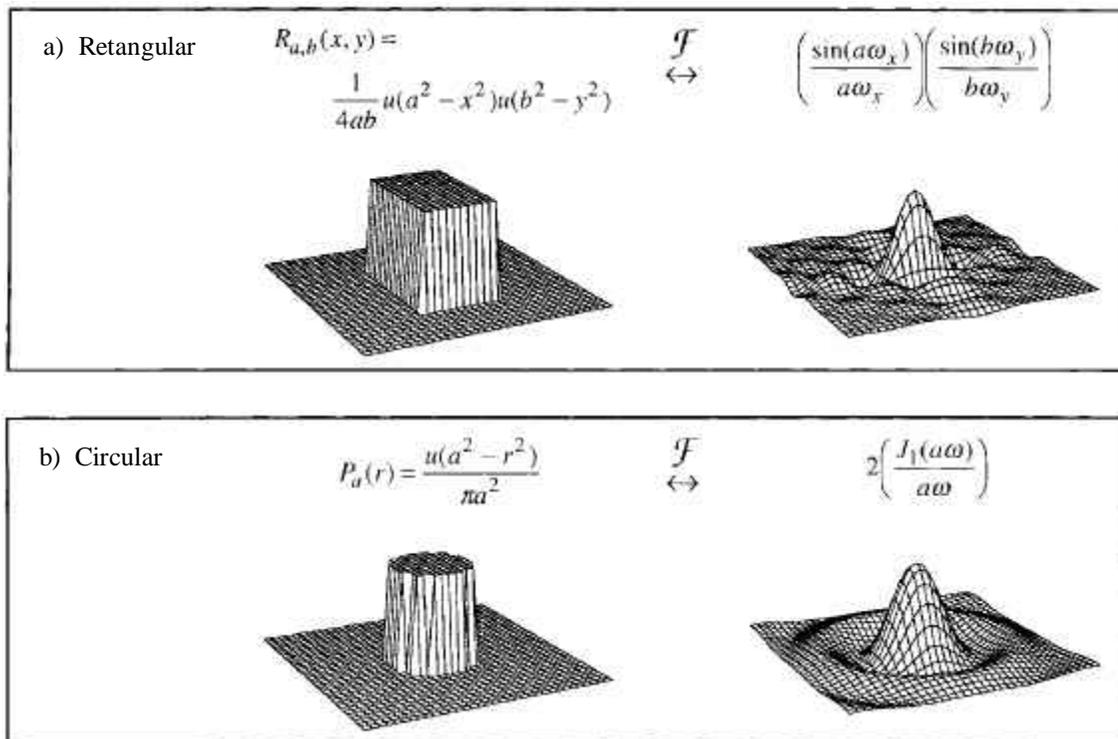


Figura 2. Gráficos exemplos de aplicação da FT para aberturas padrão. a) Retangular 2D. b) Circular 2D

A transformada de Fourier pode ser utilizada para gerar imagens de difração, mas precisa de formulação adicional para a introdução do parâmetro, z , a distância do plano de geração e o plano de observação. A seguir, vemos dois exemplos da aplicação desta ferramenta matemática.

d – Transformada discreta de Fourier

Seja uma sequência de duração finita, $x[n]$, de comprimento L (ou seja, $x[n] = 0$ para $n < 0$ e $n \geq L$) tem transformada de Fourier [39],

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j\omega n}, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi \quad (15)$$

em que os índices superiores e inferiores do somatório refletem o fato de que $x[n] = 0$ fora do intervalo $0 \leq n \leq L-1$. Quando amostra-se $X(e^{j\omega})$ em frequências igualmente espaçadas $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, sendo $N \geq L$, as amostras resultantes são,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (16)$$

A Equação (16) é a transformação de uma sequência, $x[n]$, de comprimento $L \leq N$ em uma sequência de amostras de frequência, $X[k]$, de comprimento N . Uma vez que as amostras de frequências são obtidas através da avaliação da transformada de Fourier, $X(e^{j\omega})$, em um conjunto de N (igualmente espaçadas) frequências discretas, a Equação (16) é chamada a transformada discreta de Fourier de $x[n]$. A Equação (17), por sua vez, permite recuperar a sequência $x[n]$ a partir das amostras de frequência, e mostrada a seguir.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (17)$$

A equação (8) é chamada de DFT inversa (IDFT).

A DFT é uma maneira de aproximar numericamente a transformada de Fourier de uma função. A DFT é de interesse porque pode ser rapidamente e eficientemente avaliada através da FFT. O uso da FFT é útil no cálculo da propagação de feixes ópticos em fibras ópticas e processamento de imagens.

2.2 Wavelets e Filtragem Adaptativa

O algoritmo convencional de filtragem adaptativa pelas médias mínimas quadráticas (LMS) é comumente usado na detecção de sinais no domínio do tempo [43]. Ele tem a vantagem de ser simples, fácil de implementar e de baixa complexidade computacional. Contudo, quando o sinal de entrada possui banda de frequência extensa, a convergência é muito baixa [43]. Uma maneira para suavizar este problema é dividir o sinal em sub-bandas usando certo número de transformadas, as quais podem ser calculadas com uma pequena carga computacional extra, através da FFT e da transformada discreta do coseno (DCT) [44]. Portanto, a filtragem adaptativa no domínio da frequência tem melhores propriedades de convergência e menor complexidade computacional [45, 46, 47, 48].

A filtragem adaptativa em sub-bandas [49] tem sido sugerida como uma maneira de aumentar o desempenho de velocidade e convergência dos esquemas clássicos de filtragem [47, 48]. Um sinal é primeiro processado por um banco de filtros em que é separado em várias bandas de frequências. A filtragem adaptativa é então realizada em cada sub-banda. A força da filtragem adaptativa em sub-bandas reside na quebra de um dado problema em partes menores que, fracamente ligadas entre si, podem então ser resolvidos quase independentemente um do outro. Conseqüentemente, o esquema de sub-bandas facilita a redução em frequências de amostragem (dizimação) e este por sua vez melhora a eficiência computacional [48]. Além das vantagens usuais de decomposição em sub-banda, tais como a possibilidade de processamento em paralelo ou a sua aplicação usando uma quantidade limitada de dados a serem processados em cada sub-banda, outros benefícios são conseguidos, tais como a redução do comprimento do filtro adaptável e da velocidade de convergência da adaptação [47].

O uso da Transformada de *Wavelet* (WT) na detecção adaptativa de sinais é análogo ao uso do método de filtragem adaptativa baseada na DFT introduzido por Shynk [50]. No entanto, a análise de wavelet tem vantagens sobre a análise de Fourier quando uma soma ponderada de senóides não representa adequadamente os modos variantes no tempo dos sinais envolvidos. Na Filtragem Adaptativa por Transformada de Wavelet (WTAF), o sinal

de entrada é dividido em sub-bandas, os quais representam sinais em diferentes níveis de resolução. Os sinais de sub-bandas são então usados como entradas para um filtro. Assim, os coeficientes do filtro adaptativo podem ser atualizados pelo algoritmo LMS.

A aplicação da transformada de wavelet no processamento adaptativo de sinais tem sido objeto de pesquisa e desenvolvimento ao longo dos anos, e vários pesquisadores [47, 48, 51, 52, 53] têm contribuído para esta área. Contudo, não há estudos sistemáticos da WTAF.

Uma nova aplicação de filtros adaptativos é a predição de ativos na bolsa de valores (por exemplo, através da previsão sobre o valor real das ações da Petrobras negociadas na Bolsa brasileira). Nesse cenário são introduzidos conceitos que permitem entender do método e o cálculo da correspondente previsão. A escolha inicial do comprimento da janela e o número de coeficientes do filtro é feita observando-se a correlação entre o sinal de previsibilidade e o curso atual apresentado pelo mercado. Nota-se claramente que o cenário é ideal para utilização da WTAF utilizando-se os sinais de sub-banda para realizar a correlação.

2.3 Transformada de *Wavelet*

A transformada de wavelet tem sido aplicada para analisar sinais que podem ser descritos como aperiódicos, tais como ruído, sinais intermitentes, transiente, e assim por diante. Sua habilidade em examinar sinais simultaneamente no tempo e na frequência, diferentemente da tradicional transformada de Fourier (FT), tem criado novos e sofisticados métodos de manipulação e questionamento de sinais baseados em wavelets. Atualmente, a análise de transformada de wavelet tem sido aplicada na investigação de um grande número de fenômenos físicos, da análise climática [54] para a análise de índices financeiros [55], da monitoração cardíaca [56] à monitoração de máquinas rotativas [57], da eliminação de ruído em sinais sísmicos [58] à eliminação de interferências em imagens de astros do Universo [59], da caracterização de rachaduras de superfície [60] à caracterização de turbulência intermitentes [61], da compressão de imagens [62] à compressão de registros de sinais médicos [63].

A WT utiliza pequenas funções tipo ondas conhecidas como *wavelets*. A Figura 3, a seguir, mostra exemplos de wavelets comumente utilizadas na aplicação da WT.

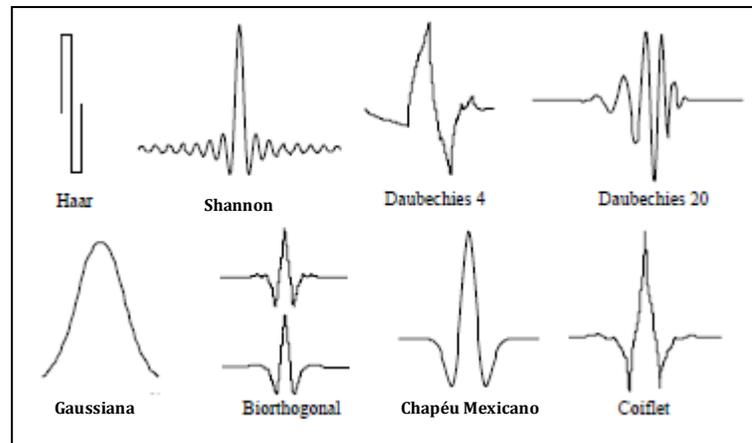


Figura 3. Gráficos de algumas wavelets padrões.

Atualmente, funções “locais” tipo ondas são uma descrição mais precisa de uma *wavelet*. *Wavelets* são usadas para transformar um sinal sob investigação em outra representação, a qual apresenta as informações do sinal de uma maneira mais útil. Esta transformação do sinal que atua como um operador de localização em tempo e frequência é conhecida como transformada de wavelet. Matematicamente falando, a transformada de wavelet é a convolução da função wavelet com o sinal sob análise.

A wavelet é processada de duas maneiras:

- 1- Posicionada em varias localizações de tempo ou espaço (ou deslocamento da wavelet no tempo ou espaço). A Figura 4, a seguir, mostra graficamente esse efeito.



Figura 4. Gráficos mostrando o efeito de deslocando da wavelet.

- 2- Comprimida ou dilatada como mostrado a seguir na Figura 5.

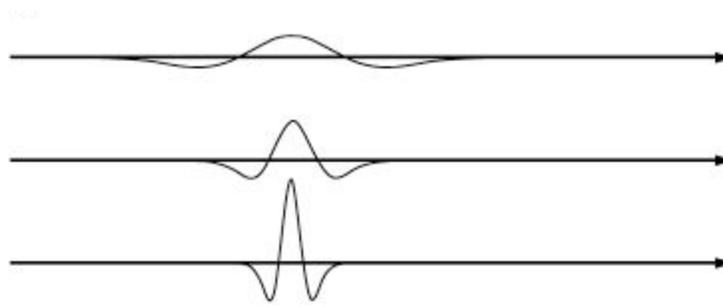


Figura 5. Mostra variações do tamanho da wavelet chapéu mexicano localmente.

A transformada contínua de wavelet (CWT), como a FT, usa produtos internos para medir a similaridade entre um sinal e uma função analisadora. Na FT, as funções analisadoras são exponenciais complexas, $e^{j\omega t}$. A transformação resultante é uma função de uma simples variável, ω .

Na CWT, a função analisadora é uma wavelet, ψ . A CWT compara o sinal com versões deslocadas (posição) e comprimidas ou dilatadas de uma wavelet. Expandir ou comprimir uma função (Figura 5) corresponde à noção física de escala. Comparando o sinal à wavelet em várias escalas e posições, obtém-se uma função de duas variáveis.

O processo da CWT será descrito a seguir com auxílio da Figura 6. A forma de onda (B) mostra uma wavelet Daubechie 20 (db20) de aproximadamente 1/8 de segundo de extensão. A wavelet aqui é uma função contínua no tempo (obtida após um processo iterativo). Devido à frequência inicial e a posição, a comparação ponto-a-ponto com sinal sob análise (A) obterá uma correlação pequena. Deslocando a db20 para direita, até a posição mostrada em (C), a comparação com (A) ainda obterá uma correlação pequena, devido (C) e (A) estarem em frequências diferentes. A forma de onda (D) mostra a wavelet db20 dilatada até que frequência seja aproximadamente a mesma que (A) e deslocada para a direita até que os picos e vales se alinhem razoavelmente. Nestes valores de deslocamento e dilatação será obtido, na comparação, um valor elevado de correlação.

Observe-se que este processo mede o grau de similaridade entre os dois sinais.

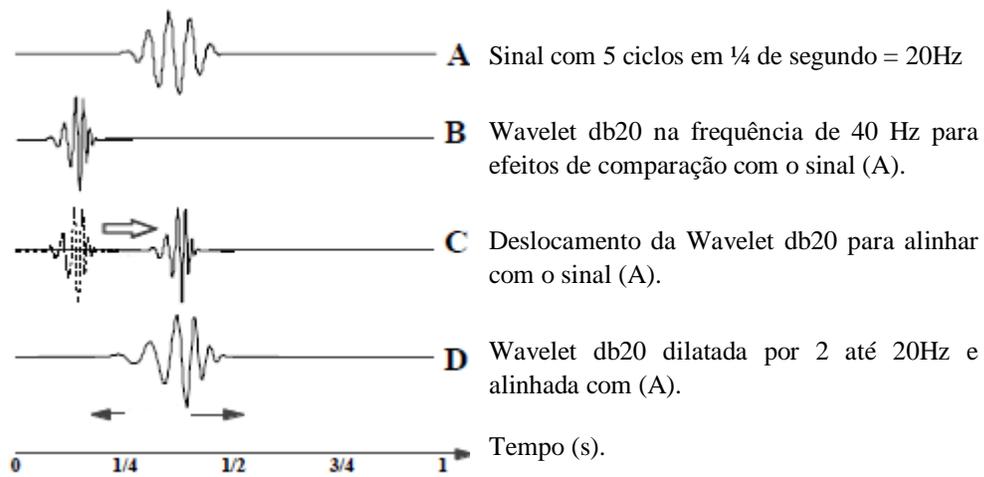


Figura 6. Demonstração esquemática do processo de dilatação e deslocamento da CWT.

A Figura 7 mostra o resultado da CWT para o exemplo anterior. Os pontos mais brilhantes indicam onde os picos e vales da wavelet dilatada e deslocada melhor alinham-se com o sinal sob análise. Pontos escuros indicam quando não há correlação. Neste exemplo, dilatando a wavelet por um fator de 2 (40 Hz para 20 Hz) e deslocando-a $\frac{3}{8}$ de segundo obtém-se a maior correlação.

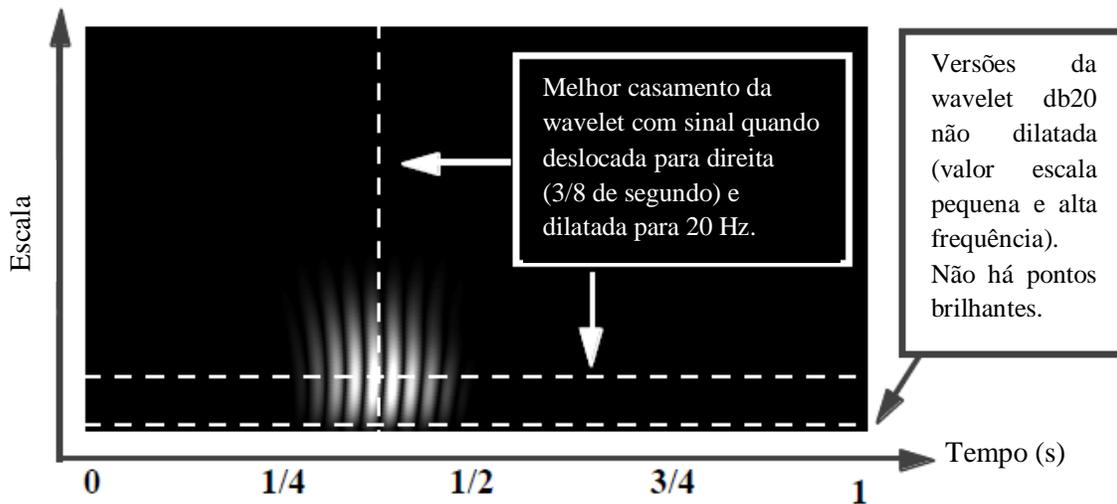


Figura 7. Imagem mostrando o Resultado da CWT com a db20.

2.3.1. Formulação Matemática da CWT

A quantidade de dilatação e contração de uma wavelet é governada por parâmetro de escala designado por a . O movimento da wavelet ao longo do eixo dos x é governado por um parâmetro de translação designado por b . Dada uma wavelet $\psi(t)$, pode-se incluir estes parâmetros de modo que agora ela passa a ser apresentada da forma a seguir,

$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (18)$$

Dada a Equação (18) pode-se agora transformar um sinal, $x(t)$, usando uma faixa de a 's e b 's. A transformada de wavelet de um sinal contínuo com relação a função wavelet é definida como a seguir.

$$CWT(a,b) = w(a) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (19)$$

em que $w(a)$ é um fator de ponderação. O asterisco indica o complexo conjugado no caso de utilizar funções wavelets complexas. A CWT pode ser analisada como a correlação de um sinal e uma série de projeções de $\psi(t)$, cujas versões são transladadas e reescaladas sobre $x(t)$. Normalmente, o fator $w(a)$ é ajustado para $a^{-1/2}$ por razões de conservação de energia (isto é, assegura que as wavelet tenham a mesma energia em todas as escalas). Algumas vezes a constante é usada sob a forma $1/a$ (normalização em termos de amplitude), mas nada impede que seja usado outro valor buscando-se sempre a normalização.

Então, a função wavelet normalizada é reescrita da seguinte forma.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (20)$$

Segundo para a Equação (19) a CWT é o produto da wavelet e o sinal, integrados sobre a faixa do sinal. Em termos matemáticos isto é chamado de uma convolução. Assim a CWT tem sua forma final reescrita como

$$CWT(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (21)$$

Um sinal para ser classificado como uma wavelet, $\psi(t)$, deve satisfazer certos critérios matemáticos ou propriedades [64]. São eles;

1- A wavelet deve ter energia finita:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty, \quad (22)$$

em que E é a energia de uma função igual a integral de seu módulo quadrado. Se $\psi(t)$ é uma função complexa a energia deve ser encontrada usando suas partes reais e imaginárias.

2- Se $\Psi(\omega)$ é a FT de $\psi(t)$, ou seja,

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (23)$$

então, a seguinte condição deve ser satisfeita [64],

$$C_g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (24)$$

Isto implica que a wavelet não tem componente de frequência zero, $\Psi(0) = 0$, ou colocando de outra maneira, a wavelet $\psi(t)$ deve ter média zero. A Equação (24) é conhecida como condição de admissibilidade e C_g é chamado de constante de admissibilidade.

A transformada contínua de *wavelet inversa* (ICWT) é definida como a seguir,

$$x(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2} CWT(a,b) \psi_{a,b}(t) da db, \quad (25)$$

em que C_g é a constante de admissibilidade.

Esta expressão permite que o sinal original seja recuperado de sua CWT pela integração sobre todas as escalas e deslocamentos, a e b . Observe-se que para a transformada inversa, é usada a função *wavelet* original, ao invés de seu conjugado (usado na transformação direta). Um fato notável é que ao se limitar a integração sobre uma faixa de escalas a , ao invés de toda a faixa de a , estar-se-á realizando uma filtragem no sinal original.

As Figuras 8 e 9 ilustram este fato sobre um segmento de sinal construído de duas formas de onda senoidal, uma com um período $\frac{1}{4}$ da outra, em que se adicionou um ruído. As

Figuras 8a-c mostram as três componentes e a Figura 8d o sinal composto com a adição das três. O traçado da transformada do sinal composto na Figura 8e mostra as duas formas de onda constituintes nas escalas a_1 e a_2 .

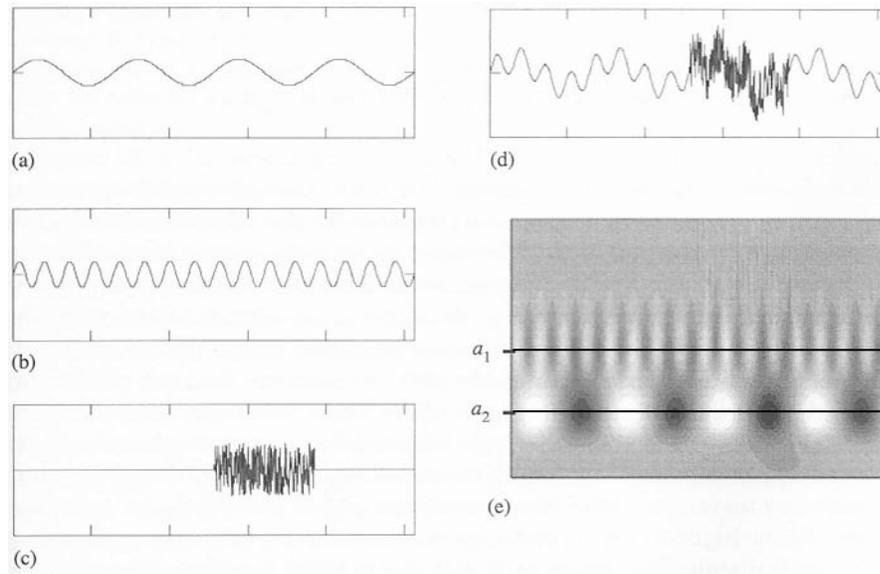


Figura 8. Um sinal composto e sua transformada CWT.

A Figura 9 mostra duas reconstruções do sinal, apenas modificando a faixa de integração da escala a da ICWT.

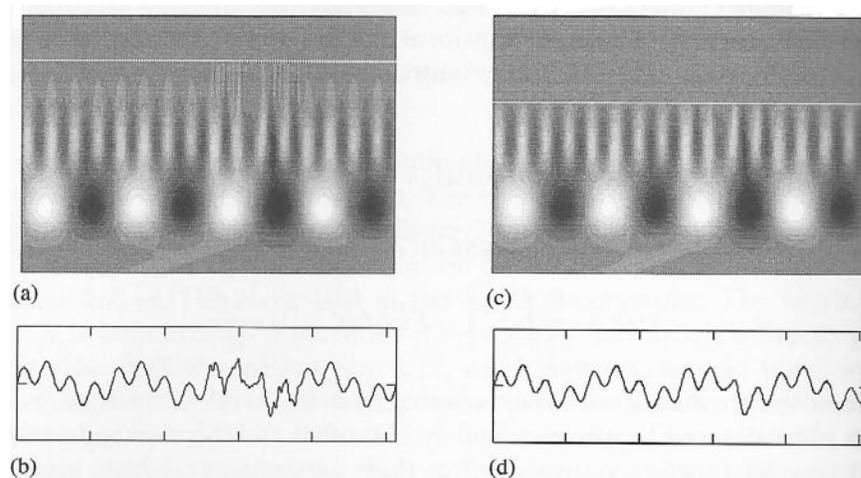


Figura 9. Filtragem do sinal composto através da ICWT.

2.4 Óptica

2.4.1 Difração

O fenômeno da difração está relacionado com as propriedades de ondas ao transportarem energia de um ponto ao outro do espaço.

As ondas são caracterizadas por interagirem entre si quando duas ou mais ondas atravessam a mesma região do espaço (fenômeno da interferência). Pode acontecer também que uma onda tenha a sua velocidade e/ou direção modificadas, ao interagir com um objeto ou meio material interposto em seu caminho.

A difração está relacionada com a interação de uma onda com um obstáculo, ao contorná-lo ou quando encontra uma abertura através do qual possa atravessar tal obstáculo.

Ao passarem por esse ponto do espaço, ondas difratadas de uma mesma origem tem a mesma fase e por isso podem interagir uma com a outra naquele ponto. A recombinação se processa porque as ondas, exibindo propriedades periódicas ao longo do espaço e ao longo do tempo combinam seus máximos e mínimos de amplitude de uma maneira que depende do total de ondas interagentes e das distâncias totais percorridas. O resultado disso varia entre dois extremos: num caso, num dado ponto, um máximo de amplitude se combina com um mínimo, produzindo uma anulação parcial ou total da energia da onda. Por outro lado, quando dois ou mais máximos ou mínimos se encontram, a energia observada é maior.

A técnica mais simples de analisar os problemas da difração, a qual será adotado neste trabalho, é baseado no princípio de *Huygens-Fresnel* [65]. Ele estabelece que: “Cada ponto em uma frente de onda não obstruída se constitui, em qualquer instante, em uma nova fonte de ondas esféricas (*wavelets*) secundárias com a mesma frequência da onda primária (Figura 10). O campo óptico em qualquer ponto é a superposição de todas as *wavelets* que alcançam aquele ponto (levando-se em consideração as suas amplitudes e fases relativas)”. Este princípio pode ser matematicamente obtido de equações diferenciais.

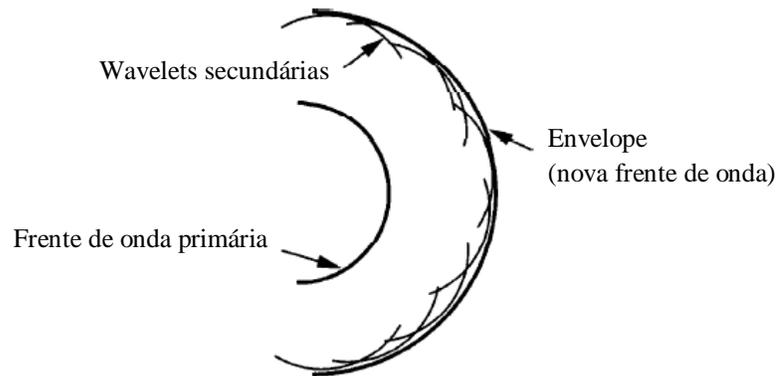


Figura 10. Construção das ondas de Huygens.

Quando o comprimento de onda é maior que o tamanho da abertura no plano de observação, pode ser usada a teoria de difração escalar. Mesmo quando isto não é verdade, a teoria de difração escalar tem se demonstrado algo próximo do valor real [66]. Esta teoria envolve a conversão da equação de onda, uma equação diferencial parcial, em uma equação integral. Isto pode ser usado para analisar a maioria dos fenômenos de difração e sistemas de imagens.

Observando-se a luz incidindo sobre uma tela opaca com uma abertura, em que o padrão de iluminação resultante é observado sobre um anteparo escuro. Essa luz é uma onda plana monocromática (com incidência normal ao plano, ou quando o ângulo de aproximação é desprezível). Colocando o anteparo nas proximidades da tela aparecerá uma mancha brilhante no formato da abertura. A Figura 11 ilustra este caso.

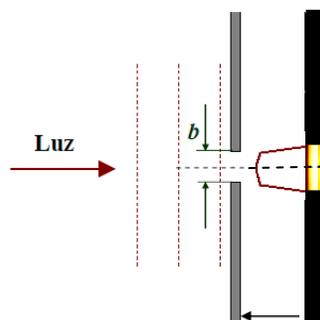


Figura 11. Iluminação com anteparo próximo da abertura.

Afastando-se o anteparo ficarão evidentes padrões de franjas finas em torno da mancha brilhante. Afastando-se mais ainda o anteparo da abertura, evoluirá um extenso sistema de franjas sobre ele, as quais estão intimamente ligadas à geometria da abertura. O padrão continua a variar e dispersar à medida que a tela de observação afasta-se da abertura. Esta região é a chamada difração de *Fresnel* ou de campo próximo. Em última análise, a distribuição da irradiação vai se apresentar em uma forma de franja simétrico, vastamente estendida, não tendo praticamente nenhuma semelhança com a abertura. Além de certa distância qualquer mudança de padrão virá ser imperceptível e, exceto para um contínuo aumento de tamanho, o sistema de franja aparecerá inalterado (Figura 12).

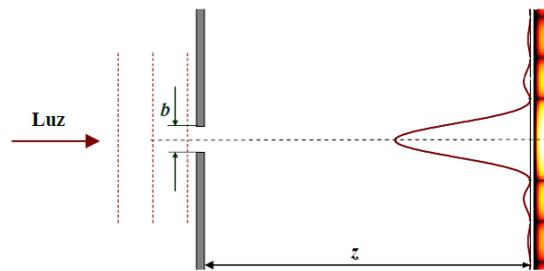


Figura 12. Padrão de difração e interferência na região de Fraunhofer.

Esta é a difração de *Fraunhofer* ou de campo distante e, sendo um caso com restrições, é mais simples de lidar com suas expressões matemáticas do que com as expressões da difração de campo próximo (Fresnel).

A seguir, a Figura 13 destaca as regiões de difração dependendo da distância, z , entre a abertura iluminada e o anteparo.

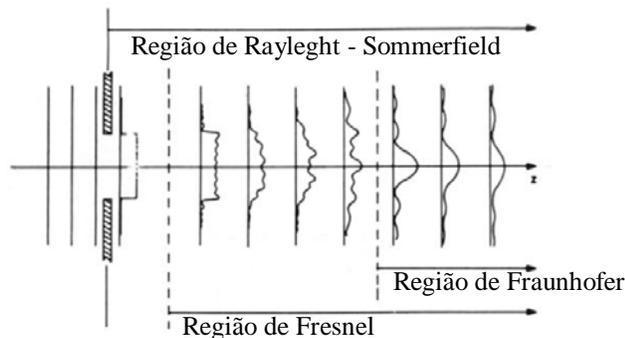


Figura 13. Conforme a distância para abertura formam-se diferentes padrões de difração e interferência.

As ondas monocromáticas, ou seja, com comprimento de onda (λ) fixo, tem solução da equação de onda plana em fasor como a seguir,

$$u(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r})e^{j\omega t}, \quad (26)$$

em que o fasor $U(\mathbf{r})$ é igual a $A(\mathbf{r})e^{j\Theta(\mathbf{r})}$; $A(\mathbf{r})$ é a amplitude e $\Theta(\mathbf{r})$ é a fase em \mathbf{r} .

Substituindo $u(\mathbf{r},t)$ na equação de onda homogênea $\nabla^2 u = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, obtém-se

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0, \quad (27)$$

em que $k = 2\pi/\lambda$. Esta é a chamada equação de *Helmholtz* [67].

A difração também pode ser tratada através da Equação (27), convertendo-a em uma integral usando o teorema de Green. O teorema de Green equipara a integral de uma função vetor sobre uma superfície fechada, a uma integral de uma função ao longo do volume fechado pela superfície. O teorema é aplicado a uma região do espaço circundante, mas excluindo-se, o ponto de observação P_0 , como ilustrado na Figura 14. O volume em questão é delimitado pelas duas superfícies fechadas S e S' . Seja S uma superfície fechada envolvendo um volume V , como mostrado na Figura 14. Se U e G , a primeira e a segunda derivadas parciais, respectivamente, são de valor único e contínuo, sem qualquer descontinuidade sobre

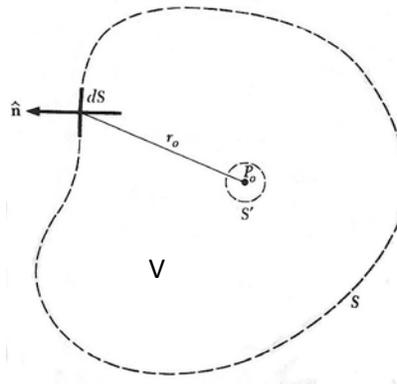


Figura 14. O volume e sua superfície usada no teorema de Green.

S , o teorema de Green estabelece que [68]

$$\iiint_V (G\nabla^2 U - U\nabla^2 G)dv = \iint_S \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds, \quad (28)$$

em que $\partial/\partial n$ indica uma derivada parcial na direção normal a cada ponto da área S . Neste caso, U corresponde ao campo de onda. A Figura 15 ilustra a geometria usada considerando a propagação de uma onda arbitrária incidente sobre um plano ($z = 0$). Na Figura 15, P_0 é um ponto no plano de observação, e P_1 é um ponto arbitrário no espaço.

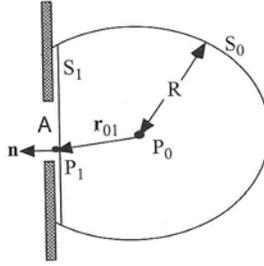


Figura 15. A geometria usada na formulação da difração pela teoria de Kirchoff.

Dados as condições anteriores, existem duas soluções utilizando a função de Green que guiam para a integral de difração. A primeira, parte da teoria de *Kirchoff* e é uma onda esférica dada por [69]

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{jkr_{01}}}{r_{01}}, \quad (29)$$

em que \mathbf{r} é o vetor posição apontando de um ponto P_0 (afastado e após a abertura) para um ponto P_1 (no centro da abertura), conforme Figura 15, e r_{01} é a distância entre eles dada por

$$r_{01} = [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2]^{1/2} \quad (30)$$

Visto que $G(\mathbf{r})$ é uma onda esférica se expandindo, também satisfaz a equação de *Helmholtz* [69].

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}) + k^2 G(\mathbf{r}) = 0. \quad (31)$$

Então, igualando os dois termos a zero da Equação (28) e aplicando na Equação (31), obtém-se a primeira solução de integral para $U(P_0)$,

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (32)$$

A segunda solução do teorema de Green parte da fórmula de difração de *Fresnel-Kirchoff*. A geometria considerada neste caso é mostrada na Figura 16 a seguir.

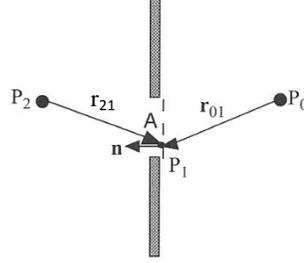


Figura 16. Geometria usada na formulação de difração de Fresnel-Kirchoff.

Considerando as condições de contorno da aproximação de *Kirchoff*, dentro e fora de uma abertura S , e assumindo agora que r_{01} é igual a muitos comprimentos de onda ópticos, obtém-se a seguinte solução para $U(P_0)$,

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{e^{jk r_{01}}}{r_{01}} \left[\frac{\partial U}{\partial n} - jk \cos(\theta) U \right] ds. \quad (33)$$

Aplicando-se a Equação (33) para o caso em que $U(P_1)$ é uma onda esférica originada em P_2 (ver Figura 16), denotando-se a distância entre P_1 e P_2 como r_{21} , e o ângulo entre a normal \mathbf{n} e r_{21} por θ_2 , tem-se,

$$U(P_0) = \frac{A}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{jk(r_{21}+r_{01})}}{r_{21}r_{01}} \left[\frac{\cos(\theta) - \cos(\theta_2)}{2} \right] ds. \quad (34)$$

Este resultado é conhecido como equação de difração de *Fresnel-Kirchoff*, válida para difração de uma onda esférica pontual através de uma abertura no plano.

Aqui se destaca uma interpretação interessante para os resultados que é reescrever-se (34) na forma,

$$U(P_0) = \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{jk r_{01}}}{r_{01}} ds, \quad (35)$$

em que

$$U(P_1) = \frac{A}{j\lambda} \frac{e^{jk r_{21}}}{r_{21}} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\cos(\theta) - \cos(\theta_2)}{2} \right] ds. \quad (36)$$

O resultado anterior pode ser interpretado como um campo em P_0 que surge de uma infinidade de fontes pontuais fictícias "secundárias" localizadas dentro da abertura. As fontes secundárias têm s amplitudes e fases determinadas por $U(P_1)$, que estão relacionados com a frente de onda e os ângulos de iluminação e observação. *Fresnel* assumiu essas propriedades a fim de obter resultados mais precisos. *Kirchhoff* mostrou que tais propriedades são uma consequência natural da natureza ondulatória da luz.

Note que a teoria acima é restrita ao caso de uma abertura iluminada consistindo por uma única onda esférica em expansão. No entanto, tal limitação pode ser resolvida pela teoria *Rayleigh-Sommerfeld*.

Suponha que G é gerado não só por uma fonte pontual localizada em P_0 , mas também simultaneamente por uma segunda fonte em um ponto \bar{P}_0 . A posição \bar{P}_0 é a imagem de espelho de P_0 no lado oposto da tela da abertura (Figura 17).

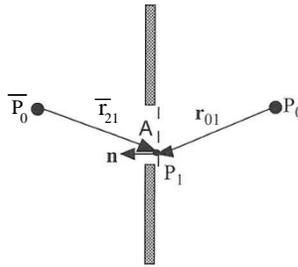


Figura 17. Geometria usada na formulação de difração de Rayleigh-Sommerfeld.

Seja a fonte em \bar{P}_0 de mesmo comprimento de onda que a fonte em P_0 ; duas situações podem ser impostas à função de Green: na primeira, as duas fontes estão oscilando com uma diferença de fase 180° e na segunda em fase. A difração em P_0 , nestes dois casos, é dada, respectivamente, por,

$$U(P_0) = \frac{A}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{jk(r_{21}+r_{01})}}{r_{21}r_{01}} \cos(\theta) ds \quad \text{e} \quad U(P_0) = -\frac{A}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{jk(r_{21}+r_{01})}}{r_{21}r_{01}} \cos(\theta_2) ds, \quad (37)$$

e são chamadas de primeira e segunda solução de *Rayleigh-Sommerfeld* para difração de ondas monocromáticas, em que r_{01} e $r_{21} \gg \lambda$.

O princípio de *Huygens-Fresnel*, como previsto pela primeira solução de *Rayleigh-Sommerfield*, pode ser expresso por

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{jkr_{01}}}{r_{01}} \cos(\theta) ds, \quad (38)$$

em que θ é o ângulo entre o vetor normal \mathbf{n} e o vetor r_{01} , apontando de P_0 para P_1 . A equação (38) expressa o campo observado $U(P_0)$ como a superposição de ondas esféricas divergentes $\exp(jk_0 r_{01})/r_{01}$, originadas das fontes secundárias localizadas em cada ponto P_1 dentro da abertura.

Para finalizar antes de observar esse princípio aplicado nos principais tipos de aberturas, voltando as Equações (35) e (36), a Equação (38) pode ser reescrita como

$$U(P_0) = \iint_{\Sigma} h(P_0, P_1) U(P_1) ds, \quad (39)$$

em que a resposta ao impulso $h(P_0, P_1)$ é dada explicitamente por

$$h(P_0, P_1) = \frac{1}{j\lambda} \frac{e^{jkr_{01}}}{r_{01}} \cos(\theta). \quad (40)$$

Este resultado será importantíssimo no capítulo 3, em que é desenvolvida uma unicidade analítica entre a CWT e as ondas de difração. O princípio de *Huygens-Fresnel* será visto, então, como uma integral de convolução.

A Equação (38) pode ser representada de uma forma mais explícita em coordenadas retangulares. Calculando-se o campo de onda em um plano (x, y) , o qual é paralelo ao plano (ξ, η) , situados a uma distância normal, z , entre si. O eixo de z passa na origem dos dois planos, como mostrado na Figura 18.

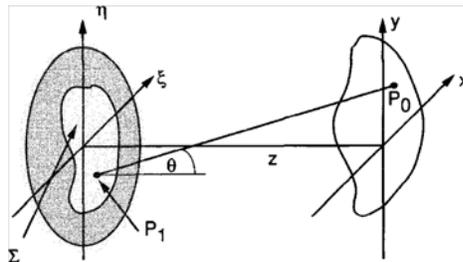


Figura 18. Geometria para o princípio de Huygens-Fresnel em coordenadas retangulares.

E assim, o princípio de *Huygens-Fresnel*, pode ser reescrito

$$U(x, y_1) = \frac{z}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{jkr_{01}}}{r_{01}^2} d\xi d\eta, \quad (41)$$

em que $\cos(\theta) = \frac{z}{r_{01}}$ e $r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$.

Aplicando-se a aproximação de *Fresnel* (fazendo simplificações em r_{01}) segue-se

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int U(\xi, \eta) e^{j\frac{k}{2z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} d\xi d\eta, \quad (42)$$

em que a função de convolução é $h(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)}$.

Fatorando-se o termo $e^{j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)}$, a expressão (42) se torna a integral de difração de *Fresnel* que vem a ser

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int [U(\xi, \eta) e^{j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)}] e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta, \quad (43)$$

Aplicando a aproximação de *Fraunhofer* ($z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)_{\text{máx}}}{2}$) a expressão acima se converte simplesmente na transformada de *Fourier* da distribuição da abertura, ou seja,

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int U(\xi, \eta) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta, \quad (44)$$

Considere-se inicialmente, uma abertura retangular conforme os parâmetros e geometria de uma abertura retangular, como na Figura 19,

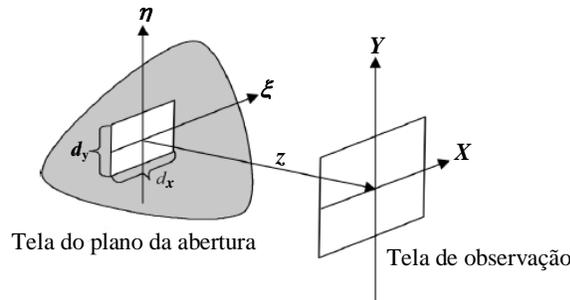


Figura 19. Coordenadas para o cálculo do padrão de difração de uma abertura retangular.

em que a transmitância da abertura é dada por

$$t_A(\xi, \eta) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{2d_x}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{2d_y}\right). \quad (45)$$

As constante d_x e d_y são a meia-largura da abertura nas direções de ξ e η . Se a abertura é iluminada por uma onda plana monocromática, normalmente incidente, então a distribuição sobre a abertura é igual à função de transmitância t_A . Assim, utilizando-se a equação (44), o padrão de difração de *Fraunhofer* também pode ser expresso em termos da FT como

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \mathbb{F}\{U(\xi, \eta)\} \\ &= \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} A \cdot \text{sinc}\left(\frac{2d_x X}{\lambda z}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{2d_y Y}{\lambda z}\right), \end{aligned} \quad (46)$$

e o padrão de intensidade é então

$$I(x, y) = \frac{A^2}{\lambda^2 z^2} \text{sinc}^2\left(\frac{2d_x X}{\lambda z}\right) \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{2d_y Y}{\lambda z}\right), \quad (47)$$

A seguir, na Figura 20, o gráfico de $I(x, y)$ na região de *Fraunhofer*, gerado através de MathCadTM, considerando $\lambda = 500\text{nm}$, uma abertura de $6 \times 3 \text{ mm}^2$ e uma distância entre os planos, $z = 10000 \text{ mm}$. Na Figura 21 a foto de $I(x, y)$, cortesia de *Atlas of Optical Phenomena*.

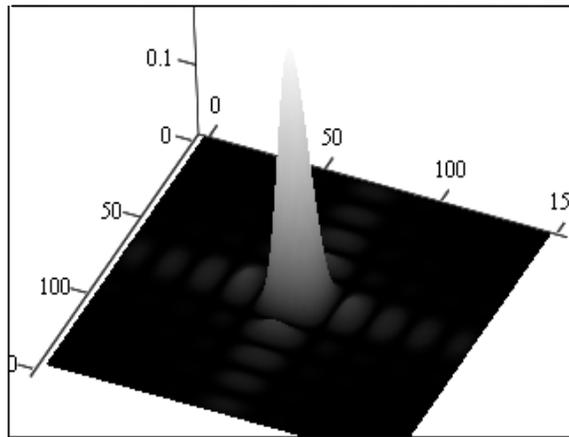


Figura 20. Gráfico 3D do padrão de intensidade de difração de *Fraunhofer* de uma abertura retangular.

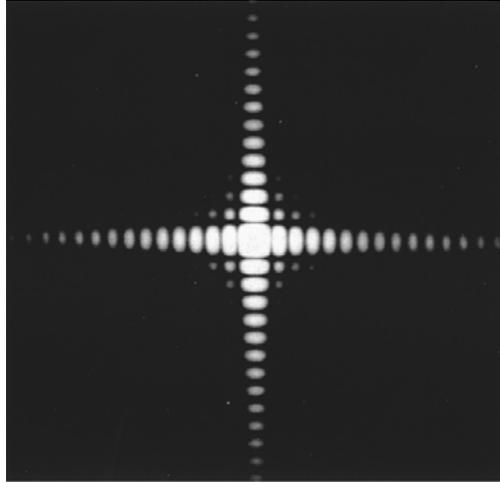


Figura 21. Padrão de difração de campo afastado de uma abertura retangular (foto de M. Cagnet, M. Francon, and J.C. Thierr, *Atlas of Optical Phenomena*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1962).

Considere-se um plano com abertura circular (Figura 22), em vez de retangular, de raio d com transmitância de abertura dada por $t_A(q) = \text{circ}\left(\frac{q}{d}\right)$, onde $q = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

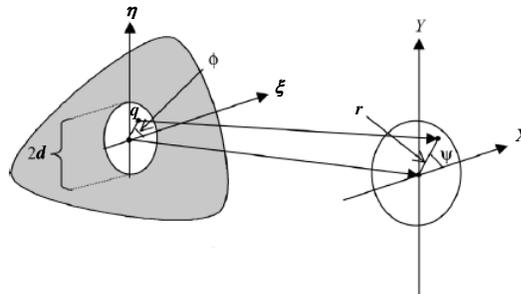


Figura 22. Coordenadas para o cálculo do padrão de difração de uma abertura circular.

A simetria circular sugere que a transformada de *Fourier* da equação de *Fraunhofer* seja substituída pela transformada de *Hankel* (*Fourier-Bessel*). Assim, se r é a coordenada radial no plano de observação, tem-se

$$U(r) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}r^2} \text{H}\{U(q)\} = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}r^2} A \frac{J_1(2\pi d \rho)}{\pi d \rho}, \quad (48)$$

em que $A = \pi d^2$, $\rho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$, e o padrão de intensidade é então,

$$I(r) = \frac{A^2}{\lambda^2 z^2} \left[\frac{J_1\left(\frac{2\pi dr}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi dr}{\lambda z}} \right]^2. \quad (49)$$

A seguir, na Figura 23, o gráfico de $I(r)$ na região de *Fraunhofer*, gerado através de MathCad™, considerando $\lambda = 600$ nm, uma abertura de 10 mm de diâmetro e uma distância entre os planos, $z = 1000$ mm. A Figura 24 mostra a foto de $I(r)$, cortesia de *Atlas of Optical Phenomena*.

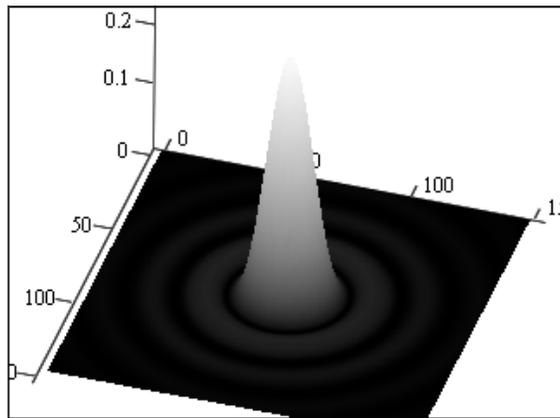


Figura 23. Gráfico 3D do padrão de intensidade de difração de *Fraunhofer* de uma abertura circular.

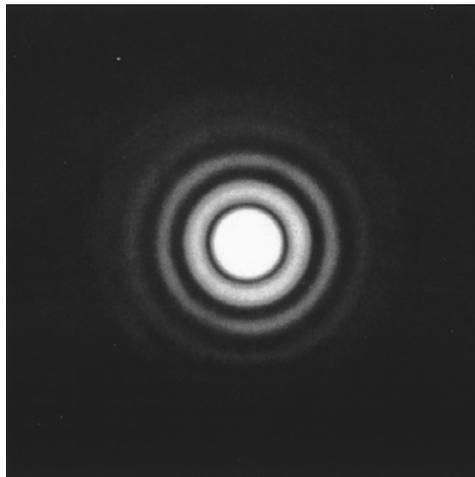


Figura 24. Padrão de difração de campo afastado de uma abertura circular (foto de M. Cagnet, M. Francon, and J.C. Thierr, *Atlas of Optical Phenomena*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1962).

2.4.2 Espectrofotometria

A espectrofotometria é o estudo quantitativo do espectro eletromagnético. A espectroscopia de ultravioleta-visível (UV-vis) é utilizada para obter o espectro de absorção de um composto em solução ou como um sólido. O que está realmente sendo observado pela espectroscopia é a absorção de energia ou radiação eletromagnética de luz, que excita os elétrons do estado fundamental para o primeiro estado de excitação (*singlet*) do composto ou material. A seguir a Figura 25 destaca as faixas de mais utilizadas na espectrofotometria (desde 200 nm até 2500 nm).

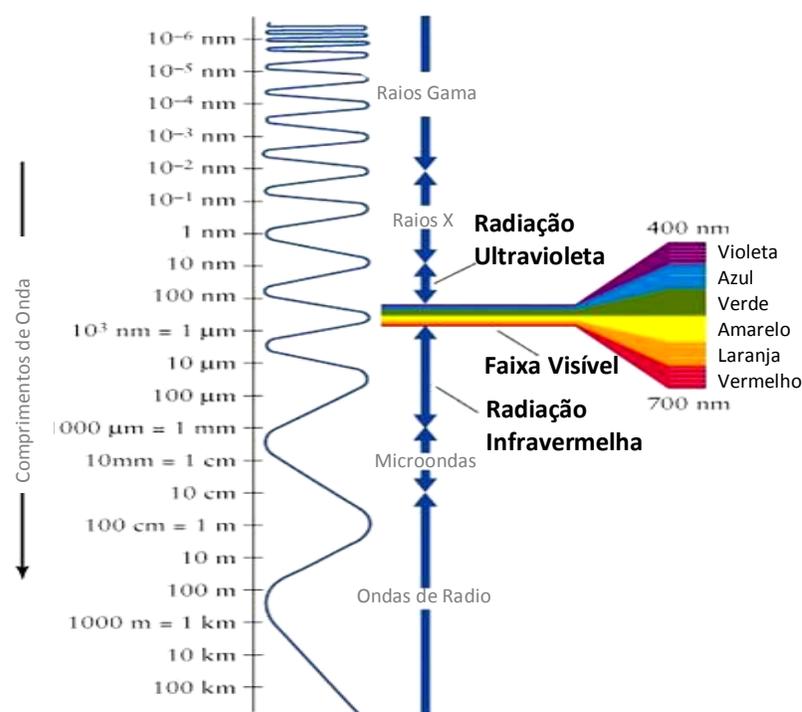


Figura 25. Gráfico ilustrando o espectro eletromagnético, com destaque para as faixas de utilização da espectrometria.

Todas as substâncias podem absorver energia radiante, mesmo o vidro que parece completamente transparente absorve comprimentos de ondas que pertencem ao espectro visível. A água absorve fortemente na região do infravermelho. A absorção das radiações

ultravioletas, visíveis e infravermelhas depende das estruturas das moléculas, e é específica para cada substância química.

A espectrofotometria se baseia no fato de que as substâncias absorvem ou emitem energia eletromagnética seletivamente em diferentes comprimentos de onda [70]. Isto leva a dois conceitos fundamentais da espectrofotometria, a transmitância e absorbância.

A transmitância pode ser definida como a razão entre a intensidade do feixe de luz depois de passar por uma amostra em relação à intensidade do feixe de luz original [71].

As curvas de transmitância são geradas medindo-se a transmitância de um filtro em uma série de comprimentos de onda dentro da faixa do espectrofotômetro. Os dados são então traçados com a transmitância no eixo das ordenadas expressa em % e o comprimento de onda na abscissa expresso em nm. O principal propósito da curva é indicar em quais comprimentos de onda determinado material ou filtro transmite e energia radiante com maior ou menor intensidade.

A absorbância pode ser definida como a razão entre a energia radiante absorvida por uma amostra e a energia radiante incidente sobre ela [71]. Em termos de transmitância (T), a absorbância (A) é dada por [72],

$$A = -\log(T) \quad (50)$$

2.4.2.1 Espectrofotômetro

Espectrofotômetros de faixa visível e ultravioleta têm tido diversas aplicações nos últimos 35 anos. Neste período tornou-se um dos mais importantes instrumentos analítico em laboratórios modernos. Em muitas aplicações, outras técnicas podem ser empregadas, mas nenhuma conseguiu concorrer na área de espectrometria UV-Visível, por sua simplicidade, versatilidade, velocidade, precisão e custo-efetividade.

O espectrofotômetro é um aparelho capaz de produzir luz no modo monocromático (comprimento de onda específico), e capaz de detectar a quantidade de luz absorvida por uma amostra nesse comprimento de onda específico. Ou seja, ele é usado para medir (identificar e

determinar) a concentração de substâncias, que absorvem energia radiante, em um solvente. Este aparelho possui uma gama de aplicações e está presente em várias áreas, tais como em química, física, bioquímica e biologia molecular. O inventor deste instrumento fundamental nos dias de hoje foi o químico americano Arnold O. Beckman, em 1940.

Existem dois tipos de espectrofotômetros: feixe simples e duplo feixe. Um espectrofotômetro de duplo feixe compara a intensidade da luz entre os dois caminhos da luz. Um caminho contém a amostra de referência. O outro a amostra teste. Um espectrofotômetro de feixe simples mede a intensidade de luz antes e depois da amostra. Antes há a necessidade de inserir a amostra de referência para identificação do zero de intensidade. Isto torna as leituras do espectrofotômetro de duplo feixe mais simples e estáveis. Por outro lado, o de feixe simples tem um sistema óptico mais simples e compacto.

Usualmente, espectrofotômetros compõem-se principalmente das seguintes partes:

- 1- Um compartimento de lâmpadas, em que estão as fontes de luz correspondentes às faixas de trabalho. Normalmente uma de tungstênio (visível) e uma de Deutério (UV).
- 3- Um monocromador contendo uma grade de difração para produzir o espectro analítico.
- 4- Uma câmara de amostras para introdução das soluções a serem medidas.
- 5- Um detector que pode ser um dispositivo de carga acoplada (CCD) ou uma matriz de fotodiodos (PDA). A medida é feita recebendo o feixe de luz monocromático que atravessa a amostra.

A seguir, na figura 26, uma foto de espectrofotômetro e localização de partes.



Figura 26. Espectrofotômetro convencional Spectronic 20 de uso geral.

Na figura 27, apresenta-se uma representação esquemática do funcionamento do espectrofotômetro seguindo-se uma descrição de suas partes principais,.

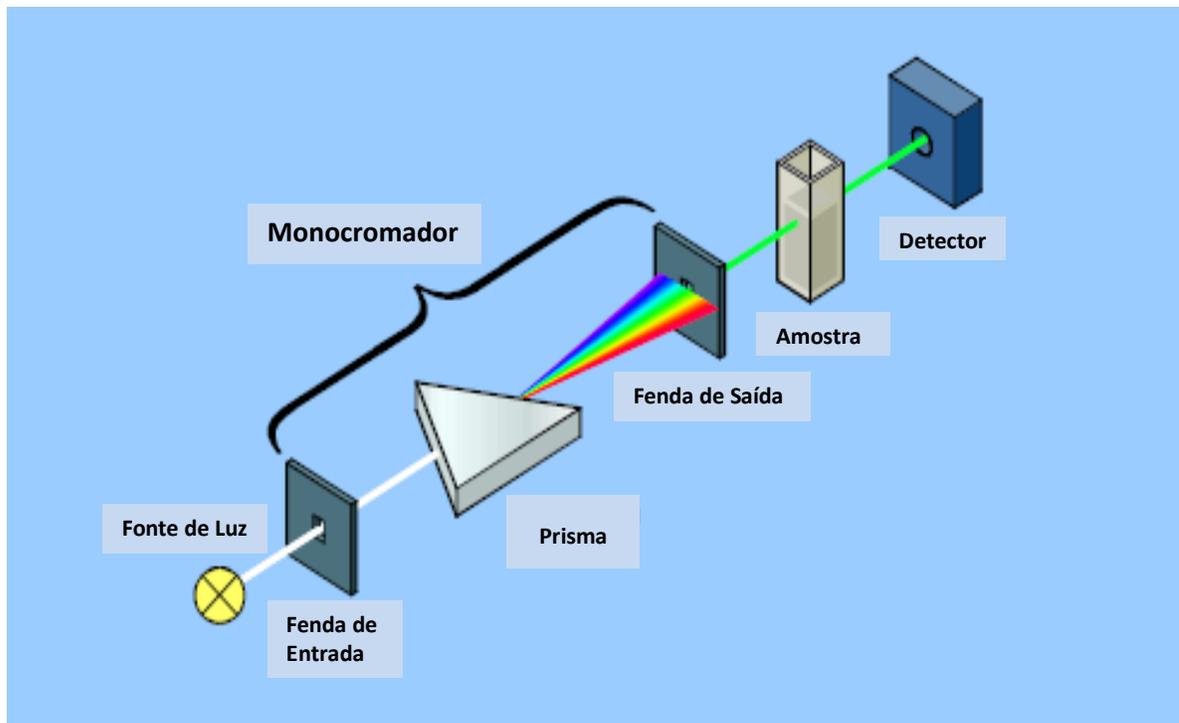


Figura 27. Representação esquemática do funcionamento de um espectrofotômetro convencional (cortesia Agilent).

a. Fontes de luz

A faixa de análise espectral de espectrofotômetros comerciais varre desde a radiação ultravioleta até a radiação infravermelho, passando pela faixa visível. Para dar cobertura a essa faixa, duas lâmpadas são as mais utilizadas, a de tungstênio e de deutério (Figura 28).

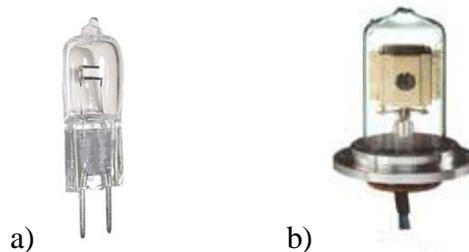


Figura 28. Figura com foto de lâmpada halógena de tungstênio (a) e deutério (b).

As medidas realizadas na faixa visível (400 nm a 750 nm) utilizam como fonte de luz a lâmpada halógena de tungstênio (W). Esta lâmpada é construída com um filamento de tungstênio dentro de um bulbo de vidro preenchido com um gás inerte. O tungstênio é usado como material de filamento, porque emite, ao aquecido, uma luz de espectro branco estável. Além disso, tem a capacidade de suportar altas temperaturas de fusão. O gás é para evitar oxidação do filamento.

No caso de comprimentos de onda na região UV (190 nm a 375 nm), as medições são realizadas com auxílio de lâmpadas de deutério (D_2). Estas lâmpadas utilizam o princípio da emissão de um arco voltaico de um catodo na direção de um anodo. No caminho, os elétrons colidem com o gás de deutério e emitem fótons. A distribuição espectral destes fótons é principalmente na faixa ultravioleta. Atualmente são também utilizadas lâmpadas de xenônio, que permitem uma gama maior de comprimentos de onda, entre 280-800 nm, no entanto têm a desvantagem da intensidade oscilar devido ao arco voltaico gerado na produção da luz.

b. O monocromador e os filtros de comprimento de onda.

A luz proveniente de uma das lâmpadas, deutério ou tungstênio, é direcionada e concentrada por um sistema de espelhos e lentes para o monocromador (Figura 29). O monocromador tem a função de gerar o espectro analítico através de um dispositivo de dispersão da luz.

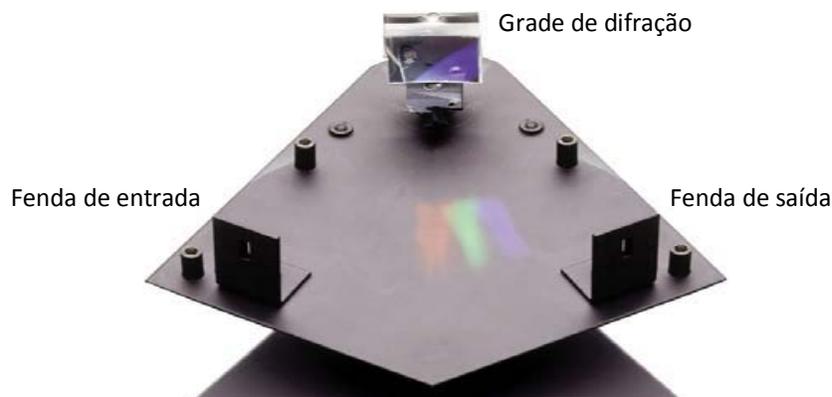


Figura 29. Figura com foto de um monocromador com grade de difração como elemento de dispersão da luz.

O feixe concentrado ao passar pela fenda estreita é direcionado a um dispositivo de dispersão da luz, a grade de difração, que vai decompor a luz branca nos diferentes comprimentos de onda. O dispositivo que difrata a luz (Figura 30) deve absorver o mínimo de energia luminosa, formar um espectro puro e não gerar comprimentos de onda sobrepostos. A resolução de comprimento de onda está diretamente relacionada com a distância entre o dispositivo de dispersão e a fenda de saída do monocromador.

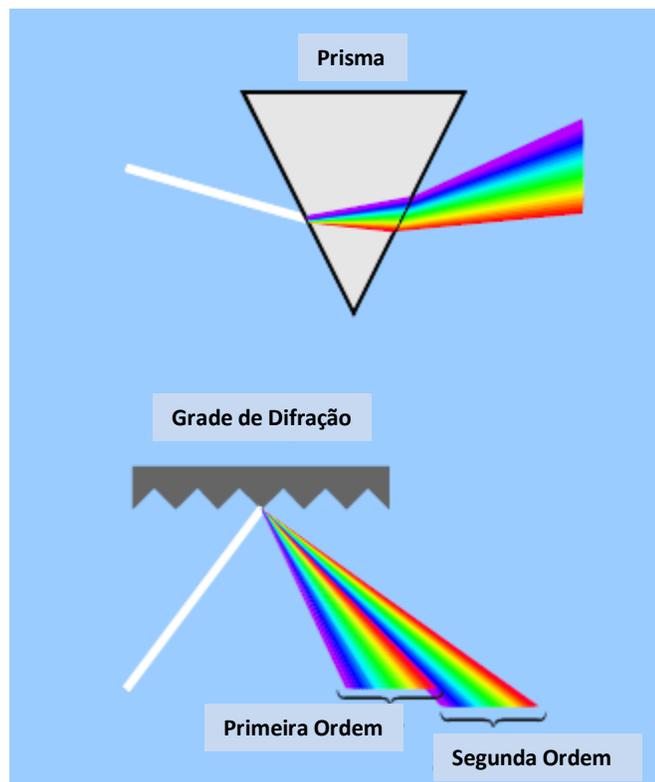


Figura 30. Esquema da difração de ondas de luz no prisma e na grade de difração (cortesia Agilent).

A seleção do comprimento de onda é efetuada através da rotação do dispositivo, por meios mecânicos automáticos (motores de passo) ou de uma forma manual. As desvantagens dos prismas é a dispersão estreita e o ângulo de desvio entre os diferentes comprimentos de onda não seguem uma regra geométrica linear. Os comprimentos de onda longos estão menos espaçados que os comprimentos de onda curtos. Este problema foi eliminado através do uso de grades de difração. A grade de difração é uma coleção de elementos reflexivos ou

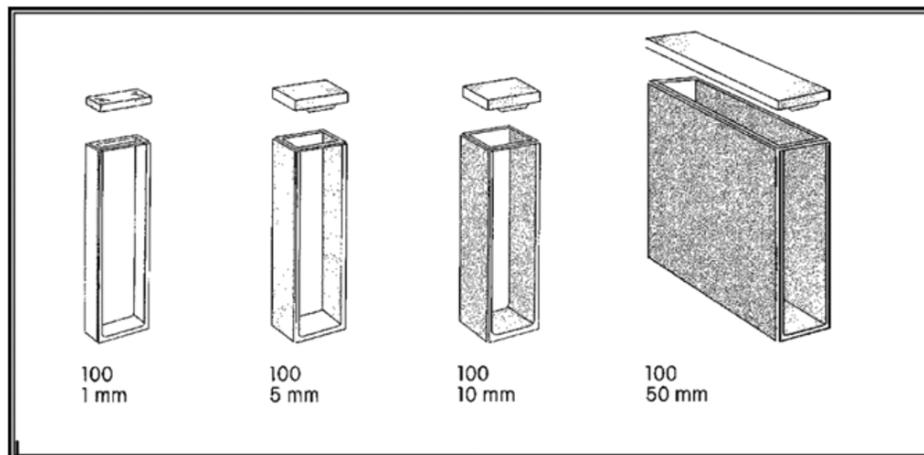


Figura 32. Figura ilustrando cubetas com diferentes comprimentos de passagem do feixe.

A cubeta é um acessório em que se devem tomar alguns cuidados no que concerne ao material que foi construída. São necessárias cubetas de materiais especiais para se trabalhar em determinadas gamas de comprimento de onda. Para medições na faixa visível, (380-720 nm) podem ser utilizadas cubetas de vidro, já que a absorção de energia luminosa nessa gama de comprimentos de onda é mínima. Devido o custo das cubetas de vidro, as cubetas de acrílico as substituíram na faixa visível. No entanto para gamas de comprimento de onda inferiores a 375 nm (região UV), o vidro e o acrílico absorvem muita radiação e por isso é necessário usar cubetas de quartzo ou de sílica sintética. Atualmente existem polímeros que permitem a utilização em determinadas gamas da região UV.

d. O Detector

O sistema de detecção de um espectrofotômetro consiste num dispositivo sensível à luz. Os primeiros dispositivos utilizados eram as válvulas fotomultiplicadoras que hoje em dia já foram substituídas por dispositivos de estado sólido, tais como os CCD's (Charge-Coupled Device) [74].

CCD ou Dispositivo de Carga Acoplada (figura 33) é um sensor para captação de imagens formado por um circuito integrado que contém uma matriz de capacitores acoplados. Um fóton de luz que chega na área definida por um dos *pixels* (elemento

individual de imagem) será convertida em um (ou mais) elétrons. O número de elétrons coletados nos capacitores será diretamente proporcional à intensidade da cena em cada *pixel*. Quando é feita uma varredura na matriz do CCD, o número de elétrons em cada pixel é medido e a cena reconstruída.

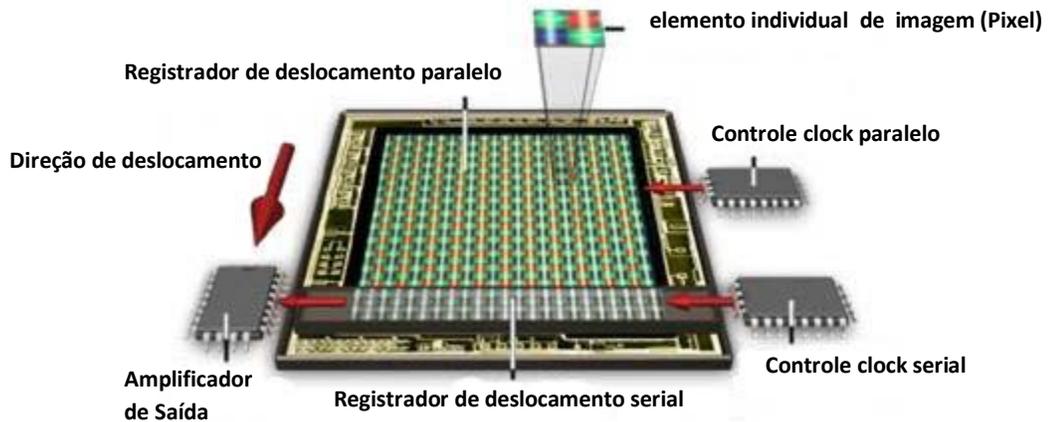
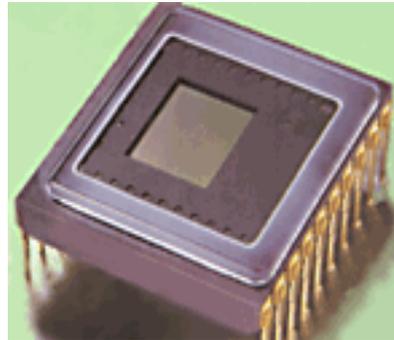


Figura 33. Figura com uma foto de um CCD e o esquema construtivo do dispositivo CCD (cortesia Agilent).

2.4.3 Holografia

Em 1948, Dennis Gabor [78] propôs um novo processamento de imagem para microscopia, o qual ele chamou de reconstrução da frente de onda, e hoje se conhece como holografia. Gabor reconheceu que quando uma onda de referência está presente

simultaneamente com a luz difratada de um objeto, a informação de amplitude e fase das ondas difratadas pode ser gravada. Ele demonstrou ainda que, de tais padrões gravados (que ele chamou de holograma), uma imagem do objeto original pode vir a ser obtida [65, 75].

Dois tipos principais de holografia podem ser citados: analógico e digital. Holografia analógica trata com ondas de espaço contínuo [76, 77]. A holografia digital resulta quando a onda de campo é amostrada, e a informação de amplitude e/ou fase é tratada computacionalmente com cálculos numéricos.

A gravação de hologramas é feita através de um conjunto óptico que consiste numa fonte luminosa (laser), os espelhos e as lentes para guiar o feixe a um dispositivo de gravação, por exemplo, uma placa fotográfica. Uma configuração típica é mostrada na figura 34. Uma luz coerente é dividida em duas ondas parciais por um separador de feixes (BS). A primeira onda ilumina o objeto. Ela é dispersa na superfície do objecto e refletida para o meio de gravação. A segunda onda – chamada onda referência – ilumina o meio de gravação. As duas ondas se combinam e o padrão de interferência é gravado na placa fotográfica. O padrão de interferência gravado é denominado de holograma.

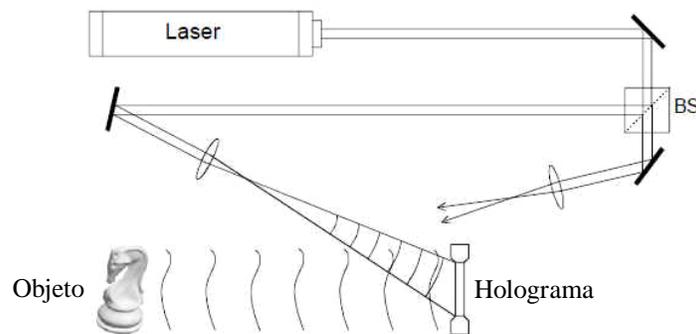


Figura 34. Gravação do holograma.

A imagem do objeto é reconstruída iluminando-se o holograma com a onda de referência, Figura 35. O observador vê uma imagem virtual, que se confunde com o objeto original. A imagem reconstruída exhibe todos os efeitos de perspectiva e profundidade.

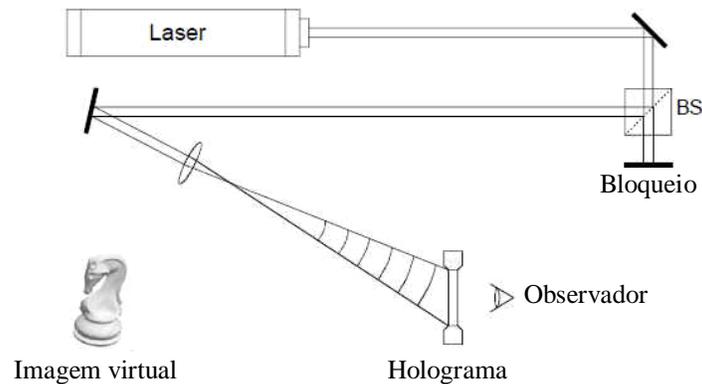


Figura 35. Reconstrução do holograma.

2.4.4 Microscopia Holográfica Digital

A holografia digital é baseada na teoria clássica da holografia [79], com a diferença de que a gravação do holograma é realizada por sensor de imagem digital, por exemplo, uma câmera CCD ou CMOS. A subsequente reconstrução da imagem holográfica, que contém a informação a respeito da onda objeto, é realizada com técnicas de cálculo numérico em um computador [80, 81].

A microscopia digital holográfica é dividida em duas principais topologias em relação ao posicionamento dos feixes da onda referência e da onda objeto. A primeira, chamada em linha, é a que os feixes transmitidos chegam em paralelo no plano de gravação. O segundo, chamado fora de eixo, os feixes atingem o plano de gravação com pequeno ângulo entre si. A holografia fora de eixo tem a vantagem de evitar a superposição das imagens de referência e do objeto. Esta configuração, porém, reduz o conteúdo de informação do holograma [82]. Na holografia em linha, devido os feixes estarem alinhados, toda a informação do holograma é utilizada, levando a uma maior resolução da imagem resultante [83, 84].

A Figura 36 mostra o diagrama esquemático de duas configurações de microscopia digital holográfica, a reflexiva e a transmissiva. Observe-se o intrincado conjunto de lentes, espelhos, condensadores e espalhadores de feixe.

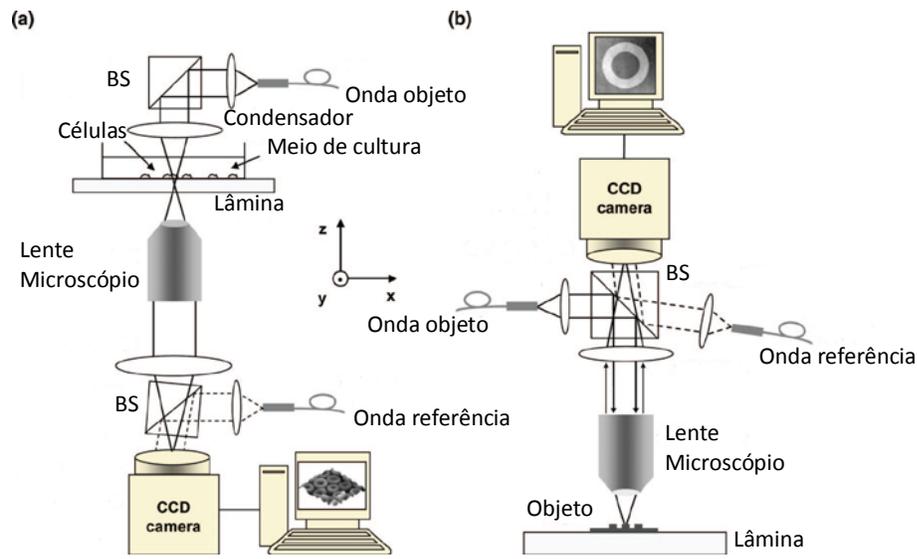


Figura 36. Diagrama esquemático de microscopia digital holográfica. a) usando luz incidente (reflexiva) e b) arranjo de transmissão inversa (direita).

A luz coerente de um laser (por exemplo, um laser Nd:YAG, $\lambda = 532 \text{ nm}$) é dividida em iluminação onda objeto e onda referência, usando fibra óptica monomodo. Fig. 36a mostra um arranjo de iluminação de luz incidente para a investigação de amostras reflexivas. A configuração na Fig. 36b é concebida para investigar espécimes transparentes tais como células vivas. A luz laser coerente para ambas as configurações de iluminação das amostras é acoplada ao caminho óptico do condensador do microscópio por um separador de feixes [83, 85]. A onda referência é sobreposta com a luz refletida ou transmitida pelo objeto por um segundo divisor de feixe. Observe-se que há uma ligeira inclinação em relação à frente de onda objeto. Isto cria o efeito de gerar hologramas "fora do eixo" no plano de gravação de uma câmera CCD. Depois da aquisição do holograma, os dados são transmitidos por uma para um sistema de processamento de imagem [86, 87].

A Figura 37 ilustra o funcionamento de um DHM. Considerou-se, por simplicidade, o caso unidimensional. Uma onda esférica emerge de uma abertura com comprimento de onda λ . Após propagar de uma distância d_1 este campo esférico divergente, $r(x; d_1)$; chamado de onda de referência, em que

$$r(x, z) = \exp[i\pi x^2/\lambda z], \quad (51)$$

incide sobre um objeto altamente transmissivo [88],

$$g(x) = |g(x)| \exp[i\phi(x)] \quad (52)$$

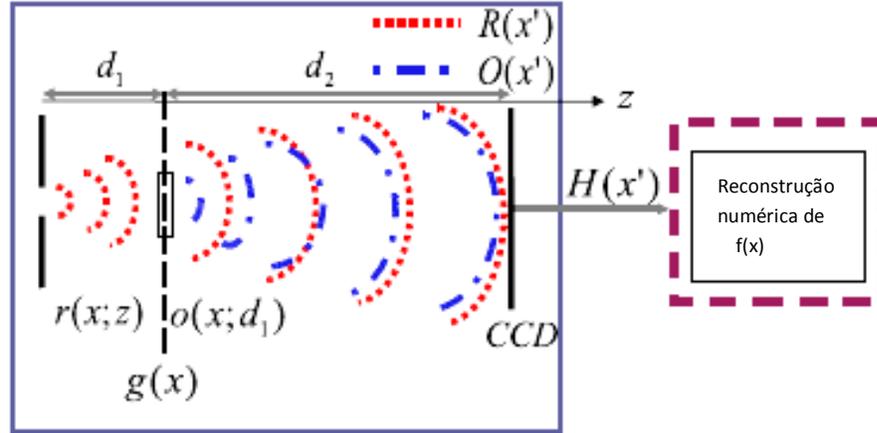


Figura 37. Gráfico esquemático de funcionamento de DHM: sinal $r(x, z)$ emergindo de uma abertura que ilumina um objeto $g(x)$ a uma distância d_1 . A onda que emerge logo após o plano de $g(x)$ é $o(x, d_1) = f(x)r(x, d_1)$. O padrão de interferência, $H(x')$, entre a onda referência propagada $R(x')$ e a onda objeto propagada $O(x')$ é recebida a uma distância d_2 . A imagem gerada é a entrada do sistema numérico de reconstrução.

O campo imediatamente após o objeto iluminado por $r(x, d_1)$ pode ser descrito como,

$$t(x, d_1) = r(x, d_1) g(x) \approx C[r(x, d_1) + o(x, d_1)], \quad (54)$$

em que $o(x, d_1) = r(x, d_1)i\phi(x)$. Considerando-se $C = 1$, a Equação (54) vem a ser

$$t(x, d_1) \approx r(x, d_1) + o(x, d_1). \quad (55)$$

Seja F_z o operador da transformada de Fresnel (FST) que aplicado a $\alpha(x)$ em um sistema de coordenadas x' [69], vem que

$$F_z[\alpha(x)] = \frac{1}{\sqrt{i\lambda z}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(x-x')^2} dx. \quad (56)$$

Aplicando-se a Equação (56) para propagar $t(x, d_1)$ na direção do plano da câmera obtém-se,

$$T(x') = F_{d_2} [t(x, d_1)] = F_{d_2} [r(x, d_1)] + F_{d_2} [o(x, d_1)]. \quad (57)$$

A intensidade da onda que é incidente sobre o CCD é o holograma

$$H(x') = |T(x')|^2 = |R(x') + O(x')|^2, \quad (58)$$

$$\text{em que } R(x') = r(x, d_1 + d_2) \text{ e } O(x') = F_{d_2} [o(x, d_1)] (x'). \quad (59)$$

Expandindo-se a Equação (58) chega-se a uma expressão, considerando-se que $R(x')$ e $O(x')$ são termos complexos, com quatro termos [89]

$$H(x') = |R(x')|^2 + |O(x')|^2 + O(x')R^*(x') + R(x')O^*(x'). \quad (60)$$

O primeiro termo é uma onda plana que se propaga diretamente até o plano do CCD, sofrendo apenas atenuação uniforme, mas sem espalhamento. O segundo termo pode ser desprezado em virtude de que na prática [69], $|O(x')| \ll |R(x')|$. Estes dois termos por suas características de não dependerem da fase de R e de O , são chamados de componentes de ordem zero. O terceiro termo representa um componente de campo que é proporcional a onda espalhada do objeto $O(x, y)$. Esta onda parece se originar a partir de uma imagem virtual do objeto original localizado a uma distância z_0 do holograma, como mostrado na Figura 38. Similarmente, o quarto termo é proporcional a $O^*(x, y)$ e, de acordo com o que foi dito, guia para a formação de uma imagem real distante z_0 do lado oposto do holograma (ver Figura 38). Assim, o holograma gera simultaneamente imagens real e virtual do objeto. Estas são as chamadas imagens gêmeas separadas por uma distância axial $2z_0$.

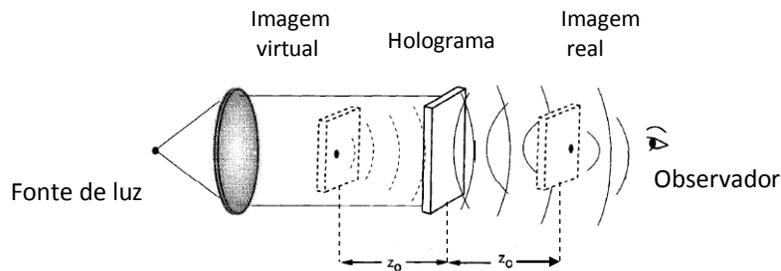


Figura 38. Formação das imagens gêmeas a partir do holograma.

CAPÍTULO 3

WAVELETS ÓPTICAS

Neste capítulo primeiramente será revisada a teoria sobre o assunto em epígrafe, principalmente a realização óptica da transformada, de modo a expressar a difração escalar sob a formulação da transformada de wavelet, e as equações de onda. A partir daí será construída uma ponte entre as equações de ondas esféricas introduzidas em 1678 por Christian Huygens e a transformada contínua de wavelets. Para isso, serão introduzidas wavelets, que atendam os princípios de ondas e as propriedades de wavelets. A seguir, será aplicada a nova formulação para verificar a equivalência entre a difração de Huygens-Fresnel e a transformada de wavelet.

3.1 Wavelets e as Equações de Onda de Huygens

Wavelet e suas transformadas Contínua e Discreta (CWT e DWT, respectivamente) têm surgido como uma ferramenta definitiva em processamento de sinais [90, 91]. Isto se deve ao fato dela proporcionar a identificação, com precisão, de informações locais e globais de sinais [92]. Outra aplicação que vem tomando grande impulso são os estudos que utilizam a análise de wavelet nas técnicas de processamento óptico [93, 31]. Por tratarem de imagens e difração, estendem a análise de wavelet para duas (2-D) e três (3-D) dimensões. Contudo, uma interpretação da relação fundamental entre a essência da óptica e o conceito de wavelet, vem sendo intentada nas últimas décadas. Ou através de soluções com a implementação de

dispositivos ópticos ou com representações em domínios como a transformada fracionada de Fourier [32-33]. Mesmo assim, ainda não havia sido estabelecida com propriedade que a propagação de ondas carrega características inerentes da transformada de wavelet bidimensional.

A teoria escalar de difração envolve a conversão da equação de onda, a qual é uma equação diferencial parcial, em uma equação de integral. Isto pode ser usado para analisar a maior parte dos fenômenos e sistemas de imagens dentro de seu domínio de validade [37]. O padrão de difração de um objeto 2-D, $U(x,y)$, a uma distância z , de acordo com a teoria de difração da região de Fresnel (aproximada), pode ser escrito como

$$U_z(x, y) = \frac{e^{j\frac{2\pi z}{\lambda}}}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int U(x_0, y_0) e^{j\frac{\pi}{\lambda z}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} dx_0 dy_0 . \quad (61)$$

A Equação (61) pode ser reescrita como

$$U_z(x, y) = U(x_0, y_0) ** h_z(x, y) , \quad (62)$$

em que ** denota a convolução 2-D, λ é o comprimento de onda e a resposta ao impulso é expressa por

$$h_z(x, y) = \frac{e^{j\frac{2\pi z}{\lambda}}}{j\lambda z} e^{j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)} . \quad (63)$$

A Equação (62) indica que a difração de Fresnel, a qual é baseada na teoria de ondas de Huygens, exibe características da moderna matemática de sinais de *wavelet*, ou seja, um conjunto de diferentes padrões de difração produz um conjunto de “imagens transformadas de wavelets”, a partir de um mesmo objeto 2-D.

As ondas ópticas definidas na Equação (63) são de fato as ondas esféricas monocromáticas de Huygens. Sob a aproximação de Fresnel, a equação de Huygens–Fresnel é interpretada como uma transformada de *wavelet*. Segundo Onural [31] é fácil ver a partir das Equações (62) e (63) que o núcleo da equação de convolução de difração de fato possui as propriedades deslocamento e escalonamento associados com uma família de wavelet própria. Isto é mostrado definindo tal *wavelet* da seguinte forma:

$$h_z(x, y) = e^{j(x^2+y^2)}, \quad (64)$$

e obtendo a partir de (65) a família de wavelets

$$h_{abc}(x, y) = K_a \psi\left(\frac{x-b}{a}, \frac{y-c}{a}\right), \quad (65)$$

em que $a = \sqrt{\lambda z / \pi}$, $b = \xi$, e $c = \eta$, e a constante K_a é

$$K_a = \frac{e^{j\frac{2\pi z}{\lambda}}}{j\lambda z} = e^{j\left\{\frac{2}{\pi a^2}\left[\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2 - \frac{\pi}{4}\right]\right\}}. \quad (66)$$

Observe-se que a distância de propagação z é interpretada como fator de escala das wavelets.

Tudo estaria resolvido no domínio da transformada se as wavelets ópticas, definidas na Equação (64), satisfizessem às condições de *wavelets*, entre elas a de admissibilidade. Ainda que as equações do campo inicial $E(x_0, y_0, 0)$ estabelecem a recuperação através do campo difratado $E(x, y, z)$ por propagação óptica inversa, as integrais não convergem para uma solução, mesmo nos cálculos com FFT e IFFT, já que produzem distorções na aplicação em formas circulares [94].

Outro desafio é que essas wavelets não estão localizadas nem no domínio espaço-temporal e nem no domínio da frequência. Mais tarde, o próprio Onural chamou-as de funções de escala *chirp* em vez de *wavelets*, no domínio da Transformada de Fourier Fracionada [33].

3.2 A Wavelet Proposta

Pode-se observar que a convolução na Equação (62) deve ser realizada através de uma família de *wavelets* contínua para uma função 2-D espacial, que satisfaça todas as condições de ondas. Classicamente, as *wavelets* são funções, obtidas de uma função, indexada por dois coeficientes [90]:

$$\psi_{a,s}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x-a}{s}\right), \quad (67)$$

em que a é o parâmetro de deslocamento, s é o parâmetro de escala, e $s^{1/2}$ é um fator de normalização. A expansão para dimensões maiores, por conseguinte pode ser obtida e mostrada a seguir,

$$\psi_{abs}(x, y) = \frac{1}{s} \psi\left(\frac{x-a}{s}, \frac{y-b}{s}\right). \quad (68)$$

Sob o ponto de vista das equações de onda e da CWT, teria que haver a família de *wavelets* que desempenhe as mesmas propriedades de localização ou difração na CWT. Como fazer uma função *chirp* que tende ao infinito se tornar “comportada”, ou seja, atender as propriedades ou requisitos de *wavelets*.

A solução, em parte, vem de uma família de wavelets recentes, as *chirplets* [95]. Em parte porque apesar de agora serem funções limitadas em banda, devido à janela gaussiana aplicada, estas wavelets não são funções pares, já que possuem um termo de deslocamento na exponencial que aumenta com a frequência e um termo de *chirp rate*.

Então, levando-se em consideração as Equações (63-68) introduz-se neste trabalho, uma nova família de *wavelet* 2D que se convencionou chamar de *chirplet* óptica, e é apresentada a seguir

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\sigma}} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{4\sigma^2}} e^{j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)}, \quad (69)$$

em que z é o fator de propagação e λ o comprimento de onda. Note que o valor de σ^2 deve ser grande o suficiente, de maneira a levar em consideração o máximo número de lóbulos envolvidos no *kernel*. E esta *wavelet* passa a ser uma função par como sua análoga em (63), inclusive com a mesma representação da função de famílias de wavelets (65) e a constante de fase (66), de banda limitada e com as propriedades relacionadas a seguir.

A função $\psi(x,y)$ atende os requisitos ou propriedades de wavelets de energia unitária,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y)|^2 dx dy = 1, \quad (70)$$

o requisito de média nula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) dx dy = 0, \quad (71)$$

e a propriedade de momentos nulos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) x^n y^n dx dy = 0, \quad (72)$$

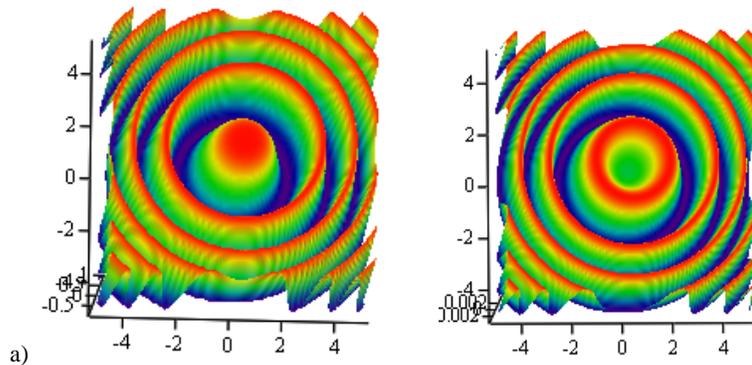
com $n = 1, 2, 3, \dots$ (verificação computacional até 35).

A transformada de Fourier (FT) da *chirplet* óptica é expressa da seguinte forma

$$\Psi(u, v) = \frac{\pi}{\alpha - j\beta} e^{-\frac{(u - w_0 \cos \theta_u)^2 + (v - w_0 \sin \theta_v)^2}{4(\alpha - j\beta)}}, \quad (73)$$

sendo $\alpha = 1/4\sigma^2$, $\beta = \pi/\lambda z$ e $w_0 = 2\pi/\lambda$. A função *chirplet* óptica é definida como uma *chirp* cosenoidal complexa, cuja amplitude é modulada por uma função gaussiana e sua frequência tem varredura quadrática. Partindo deste conceito, o cálculo da expressão no domínio da frequência surge naturalmente da transformada de Fourier de um sinal exponencial quadrático complexo, a qual o resultado é um pulso gaussiano complexo [96].

Os gráficos da wavelet *chirplet* óptica, e sua respectiva FT são mostrados na Figura 39. Observe-se a característica de pulso de $\Psi(w)$ e seu decrescimento ao valor nulo quando tende às coordenadas (0,0) e ∞ .



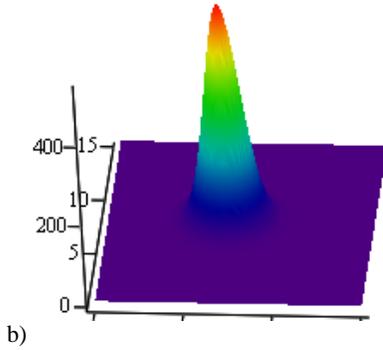


Figura 39. Gráficos da Wavelet Chirplet Óptica. a) Representação em 3-D da parte real e imaginária, respectivamente, da wavelet proposta. b) A transformada de Fourier da Wavelet Chirplet Óptica na representação em 3-D.

3.3 A 2D-CWT

A transformada contínua de wavelet 1-D do sinal $f(x)$ é definida como segue [97],

$$CWT(a, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{a,s}^*(x) dx . \quad (74)$$

Observe-se que a equação (14) tem a forma de correlação entre o sinal de entrada $f(x)$ e a dilatada e deslocada wavelet mãe $\psi_{ab}(x)$, a qual é reescrita em forma de convolução a seguir [97].

$$CWT(a, s) = (f * \psi_s^*)(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s^*(a-x) f(x) dx \quad (75)$$

Na implementação da 2D CWT, um padrão $g(x,y)$ é projetado sobre a wavelet $\psi_{a,b,s}$, pela translação de a e b , nos eixos x e y respectivamente, e escala por s , da wavelet mãe $\psi(x, y)$, como representado a seguir.

$$CWT(a, b, s) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \psi_{abs}^*(x, y) dx dy \quad (76)$$

$$\text{ou } CWT(a, b, s) = (g ** \psi_s^*)(a, b).$$

e então, levando em consideração as Equações (69) e (76) têm-se finalmente

$$CWT_s(a, b) = \frac{K_s}{s} \int_{\xi}^{\eta} \int t_A(\xi, \eta) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{4\sigma^2}} e^{j[\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{s}]} dx dy, \quad (77)$$

em que $s = \lambda_z / \pi$, $t_A(\xi, \eta)$ é a equação de transmitância do objeto gerador e K_s a constante de fase, Equação (66).

A transformada de wavelet, como na Equação (75) é a convolução do sinal com a função de wavelet. Assim, pode-se empregar o teorema da convolução para expressar a transformada de wavelet em termos de produtos na transformada de Fourier do sinal, $X(\omega)$, e da wavelet, $\Psi_{a,b}(\omega)$, como mostrado a seguir [98]

$$CWT(a, s) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \Psi_{a,s}^*(\omega) d\omega, \quad (78)$$

em que é usado o conjugado da função wavelet, e $\omega = 2\pi f$, cuja a transformada de Fourier da wavelet transladada e de escala é

$$\Psi_{a,s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-a}{s}\right) e^{-j\omega t} dt. \quad (79)$$

Fazendo a substituição $t' = (t - a)/s$, assim $dt = s dt'$, obtém-se

$$\Psi_{a,s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t') e^{-j\omega(st'+a)} s dt'. \quad (80)$$

Separando os termos constantes da função exponencial e retornando ao t inicial a partir de t' , obtém-se,

$$\Psi_{a,s}(\omega) = \sqrt{s} e^{-j\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j(s\omega)t} dt. \quad (81)$$

A integral na equação anterior é simplesmente a FT da wavelet reescalada na frequência $a\omega$. Dessa forma pode-se reescrever a Equação (81) como a seguir:

$$\Psi_{a,s}(\omega) = \sqrt{s} \Psi(s\omega) e^{-j\omega a}. \quad (82)$$

Então, a transformada de Fourier da função wavelet conjugada é,

$$\Psi_{a,s}^*(\omega) = \sqrt{s} \Psi^*(s\omega) e^{j\omega a} \quad (83)$$

E finalmente, a equação (78) pode ser expandida para o domínio bidimensional, assumindo seguinte forma:

$$CWT_{FT}(a, b, s) = s \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(u, v) \Psi^*(au, bv) e^{j(au+bv)} dudv \quad (84)$$

Pode-se observar que a equação (84) tem a forma de uma transformada inversa de Fourier.

3.4 A 2D-ICWT

A difração inversa envolve a recuperação da imagem de um objeto a qual o padrão de difração foi medido, por exemplo, sobre um plano. No caso das aproximações de *Fresnel* e *Fraunhofer* as equações de inversão são obtidas diretamente, invertendo apenas os operadores complexos [37]. No caso do campo muito próximo, ou seja, aquele que se aproxima do objeto iluminado, podem ser usadas técnicas de representação do espectro angular, mas com o cumprimento de algumas condições. Nos dois casos citados a complexidade matemática é enorme, já que envolve integrais duplas, normalmente de solução não facilmente convergente, como pode ser observado a seguir.

a. Fraunhofer

$$U(x, y, z) = \frac{je^{-j\frac{2\pi}{\lambda}z_0}}{\lambda z_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_0, y_0, z_0) e^{-j\frac{\pi}{\lambda z_0}(x_0^2 + y_0^2)} \times e^{j\frac{2\pi}{\lambda z_0}(x_0 x + y_0 y)} dx_0 dy_0 \quad (85)$$

b. Fresnel

$$U(x, y, z) = \frac{je^{-j\frac{2\pi}{\lambda}z_0}}{\lambda z_0} e^{-j\frac{\pi}{\lambda z_0}(x^2 + y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_0, y_0, z_0) \times e^{-j\frac{\pi}{\lambda z_0}(x_0^2 + y_0^2)} e^{j\frac{2\pi}{\lambda z_0}(x_0 x + y_0 y)} dx_0 dy_0 \quad (86)$$

c. Espectro angular

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(x_0, y_0, z_0) e^{-j2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)} dx_0 dy_0 \right] \times e^{-jz_0 \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda^2} - 4\pi^2(f_x^2 + f_y^2)}} e^{j2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y \quad (87)$$

sendo z é a distância entre o plano de observação e o plano de geração.

Em contraste com as equações anteriores, agora se têm a 2-D ICWT , para reconstruir o padrão de entrada, através de suas decomposições de wavelets *chirplet* óptica:

$$ICWT(x, y) = \frac{K_s^*}{s^2 C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CWT_s(a, b) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{4\sigma^2}} e^{-j\left[\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{s}\right]} da db \quad (88)$$

onde $s = \lambda z / \pi$, denota o parâmetro de escala de observação e C é constante e igual a (uma condição 2D de admissibilidade).

$$C(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(u, v)|^2}{|u v|} du dv < \infty . \quad (89)$$

Considerando que C deve ser um número finito para obter a transformada de wavelet inversa, a *wavelet chirplet* óptica atende essa condição, como observado na Figura 39, e

$$\Psi(0,0) = 0. \quad (90)$$

A transformada de wavelet, como na equação (88) é a convolução da CWT com a função de wavelet. Assim, também se pode empregar o mesmo procedimento da seção 3 para expressar a 2D-CWT em termos de produtos na transformada de Fourier da CWT, $X(\omega)$, e da wavelet, $\Psi_{a,b}(\omega)$, como mostrado a seguir [12]

$$ICWT(x, y) = \frac{1}{sC} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CWT_{FT}(u, v) \Psi(su, sv) e^{-j(au+bv)} dudv \quad (91)$$

Este é um resultado particularmente útil da mesma forma que (84) já que facilita os cálculos da transformada contínua de wavelet inversa em funções de maior complexidade matemática.

3.5 Simulação e Resultados

Apresentamos a seguir uma simulação em MathCadTM para demonstrar a validade das expressões da 2D-CWT direta e reversa com a *wavelet chirplet* óptica. A Figura 40 mostra a simulação da equação de difração aproximada de Fresnel e da CWT chirplet óptica aplicadas

a um objeto teste de uma abertura retangular de 2 X 6 mm com amplitude unitária, iluminada por uma fonte monocromática.

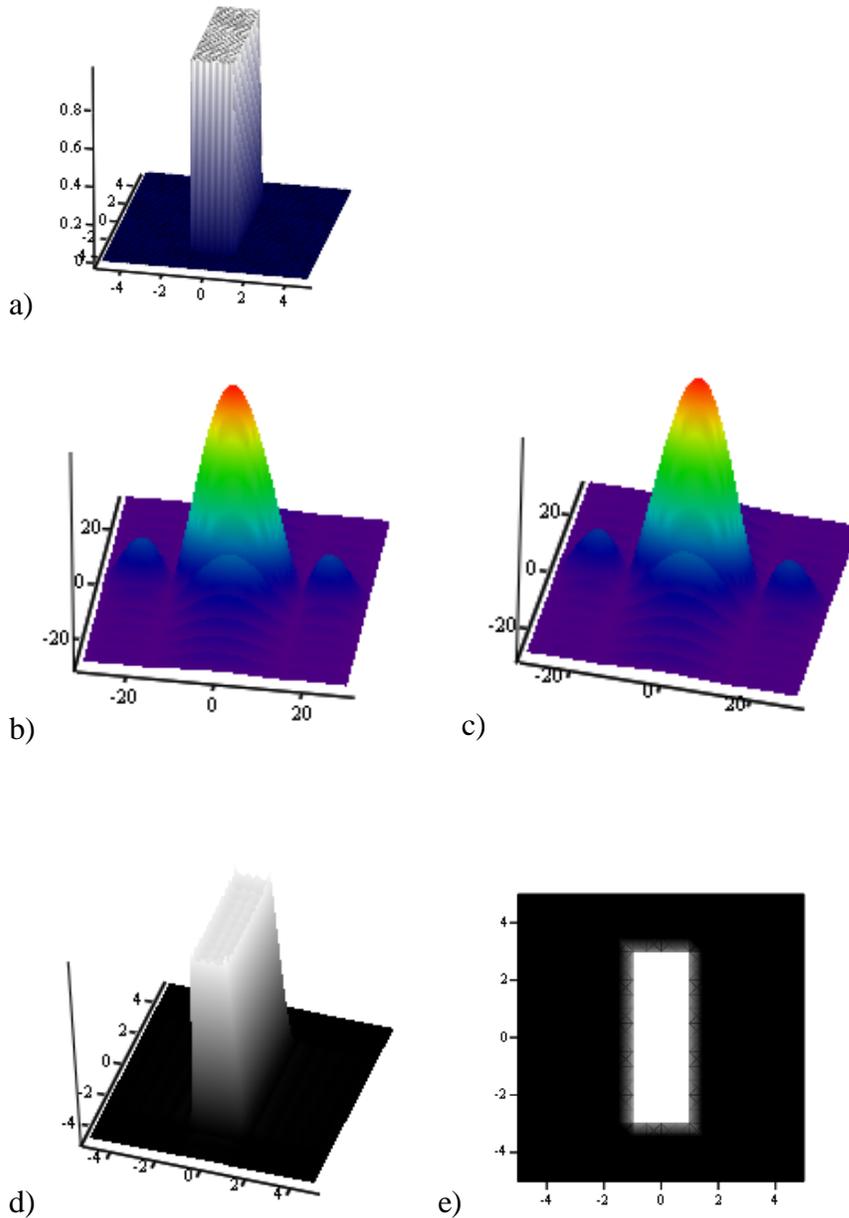


Figura 40. a) Objeto de teste no plano gerador. (b) Ilustra a aplicação da equação de difração de Fresnel (c) Ilustra também o padrão de amplitude da aplicação da chirplet 2D-CWT direta, nas mesmas condições de (b). (d) Mostra o resultado da aplicação chirplet óptica 2D-CWT reversa na reconstrução do objeto gerador do padrão e (d), A máscara que gerou o padrão de amplitude.

Vale salientar que na difração reversa somente as integrais da 2D-CWT convergiram para uma solução.

Na Figura 41, a seguir, mostra-se o efeito da visualização 3D da célula epidermal da semente *Arabidopsis*, a partir da imagem 2D.

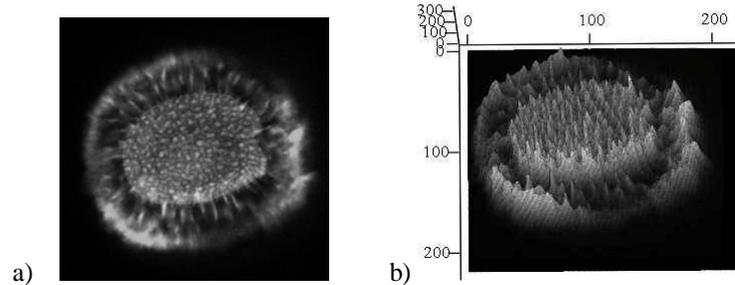


Figure 41. Célula epidermal da semente *Arabidopsis*. a) Imagem como visualizada originariamente pelo DHM. (b) Ilustra o resultado da aplicação da chirplet óptica 2D-CWT, revelando uma imagem 3D do objeto gerador.

3.6 Potenciais aplicações

Apesar do fato de se conhecer a teoria de difração estabelecida por Huygens-Fresnel há mais de 300 anos, apenas nas últimas décadas tomou impulso sua aplicação com a introdução da holografia [99], tomografia [100], ultrassonografia [101], projeto de antenas [102] e até na compressão de imagem [103].

Essas aplicações, principalmente na área biomédica, encontram sérias implicações tecnológicas e de custos na implementação física dos dispositivos ópticos, na tentativa de superar diversas barreiras causadoras de erros e interferências.

Sob esta nova formulação da transformada de wavelet, em que é uma função passa-banda, pode ser aplicada, por exemplo, na recuperação de imagens 3D na microscopia digital holográfica [104]. Nesta aplicação ao mesmo tempo em que elimina o efeito da imagem de ordem zero, também elimina *blurry* e imagem gêmea sem filtros espaciais. A imagem de ordem zero (DC) e as imagens gêmeas são um par de termos simétricos à ordem zero no espectro. Então é possível ajustar o filtro de modo a posicionar o passa-faixa sobre a imagem requerida (ordem +1) como pode ser observado na figura 42.

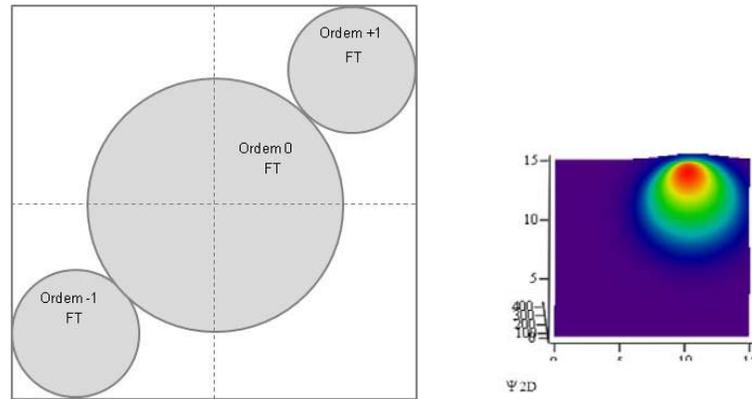


Figura 42. Filtragem com ICWT Chirplet Óptica. a) Representação das imagens no espectro. b) A transformada de Fourier da Wavelet Chirplet Óptica ajustada para filtragem da imagem ordem+1.

Este quadro, em virtude da relação de difração-wavelet apresentada, também mostra-se útil no projeto de grades de difração como será visto no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 4

WAVELETS CROMÁTICAS

Nas últimas décadas, a miniaturização de espectrofotômetros tomou grande impulso com o advento da tecnologia SMD (*Surface Mounted Device*) que tornou possível a compactação das placas de circuito impresso, mas pouco se modificou nos componentes ópticos convencionais. As grades de difração, em que a relação entre ângulo de difração e comprimento de onda impacta diretamente nas dimensões elevadas do monocromador e na resolução de leitura do espectrofotômetro; espelhos cuja durabilidade está condicionada a umidade do local e ao ambiente limpo; e fontes de luz, com seu intrínseco alto grau de emissão de calor e correntes de funcionamento também elevadas. Aqui, apresenta-se uma nova topologia que resolve esses problemas e miniaturiza o espectrofotômetro.

4.1 Espectrofotômetros na faixa visível com uma nova topologia nanofotônica de Grade de Difração

O espectrofotômetro convencional realiza medições espectrais através da projeção cromática da luz difratada por grades de difração. A ideia foi então reproduzir essa mesma formatação geométrica de projeção diferenciando os comprimentos de onda da luz de entrada através de uma base formada por um padrão de cristal fotônico (PhC). A fonte de luz afastada da grade por motivos de calor e ângulo de difração pode ser caracterizada por um diodo emissor de luz branca de alto brilho guiada ao painel de cristais fotônicos através de fibra óptica.

O estado da arte da miniaturização de espectrômetros ópticos pode ser vista em [106, 107], bem como detalhes de sua portabilidade em [108, 109]. Outros artigos também propõem técnicas para miniaturização, mas com foco em determinadas seções do espectrofotômetro. Por exemplo, substituição do detector de CCD [110], introdução de grade de difração com transmissão em guia de onda [111, 112]. Topologias com geometria similares àquela tratada neste artigo podem ser consultadas em [113] introdução de um prisma fotônico, [114] que utilizam um array de LED's, e [115] que propõe projeção cromática da luz, mas numa geometria que inviabiliza a aplicação prática devido à difícil seleção do comprimento de onda necessária no espectrofotômetro. O equipamento apresentado aqui se demonstrou extremamente simples, baixo custo e banda visível baseado na propriedade de cristais fotônicos de acoplar seletivamente os comprimentos de onda da luz guiada, alinhados de forma a simular a grade de difração.

4.2 Princípio de operação do espectrofotômetro fotônico

Os cristais fotônicos são meios dielétricos periódicos de baixas perdas e de absorção mínima de luz, em que as refrações e reflexões de luz proveniente dessas interfaces têm os mesmos fenômenos dos fótons que os potenciais atômicos produzem nos elétrons [116]. Assim o controle e a manipulação óptica podem ser determinados pela escolha da estrutura cristalina, a forma e tamanho de aberturas, a espessura da camada dielétrica, a variação de ϵ (permissividade) e pela distância interdielétricos (constante de *lattice*) a .

A estrutura cristalina fotônica empregada aqui é similar ao esquema de extração de luz de diodos emissores de luz fotônicos – PhC LED [117]. Outros esquemas, envolvendo o acoplamento de luz guiada usando cristais fotônicos podem ser consultados em [118, 119].

A Figura 43 ilustra o funcionamento do espectrofotômetro dividido em seus principais blocos. A luz proveniente da fonte selecionada é transmitida através de uma fibra ótica e aplicada às bordas de um substrato transparente dentro do monocromador. Na camada acima do substrato são litografados blocos de cristais fotônicos na forma de tiras cuja conformação geométrica pode ser de orifícios ou bastões com vinte diferentes distâncias

interdielétricos. Cada uma dessas tiras de cristais fotônicos foi projetada de tal maneira que reflita vinte diferentes bandas de espectro. A escolha desse quantitativo foi baseada na relação entre a banda total visível (400 a 700 nm) utilizada e o FWHMs (*Full Widths at Half Maximum*) da resposta espectral de cada tira. Teria que cobrir toda a faixa sem deixar *gaps* que comprometessem a resposta do espectrofotômetro. A câmera ou detector CCD (*Charge Coupled Device*) é iluminada por esse feixe de luz proveniente do painel fotônico que passar seletivamente pela fenda e sofre perdas na amostra dentro da cubeta que contém a amostra a ser analisada. O resultante elétrico na saída do CCD é comparado com uma referência e a diferença é amplificada e calibrada de tal forma a representar os fótons absorvidos pela amostra. Observe-se que conforme a resposta espectral das fontes de luz haverá diferentes calibrações no CCD para uniformizar a resposta.

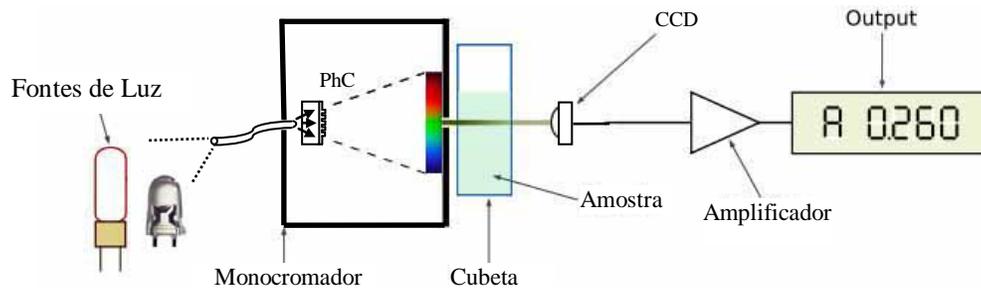


Figura 43. Desenho esquemático do funcionamento do espectrofotômetro dividido nos principais blocos ressaltando a introdução de painéis de cristais fotônicos.

Os cristais fotônicos apresentados neste trabalho são fabricados em poli-metilmetacrilato (PMMA) litografados sobre um substrato de vidro. O índice de refração n_D do PMMA nos comprimentos de onda de interesse (400 a 700 nm) está entre 1,499 e 1,512, ligeiramente menor que o do vidro ($n \approx 1,52$); o meio contrastante é o ar. Os cristais fotônicos empregados são todos de conformação geométrica retangular em um padrão trinitron estendido devido as 20 tiras de cristais fotônicos, com fator de preenchimento (r/a , em que r é o raio do orifício) de aproximadamente 0,34. Com essa parametrização, o potencial periódico não deve ser intenso o suficiente para abrir uma banda inteira [119]. A seleção dos comprimentos de onda emitidos pelo painel fotônico pode ser implementada com auxílio de motores de precisão capacitivos.

4.3 Difração por fendas múltiplas e as wavelets cromáticas

Com a topologia de tiras pode-se comparar o bloco fotônico com uma grade de difração transmissiva em amplitude por fendas múltiplas. Grades transmissivas são estruturas periódicas que alternam aberturas opacas e translúcidas.

Neste caso é um painel de 20 aberturas retangulares, de largura $a = 50 \mu\text{m}$, altura $b = 400 \mu\text{m}$, e separadas entre si de $70 \mu\text{m}$, como ilustrado em 2D na Figura 43 a seguir.

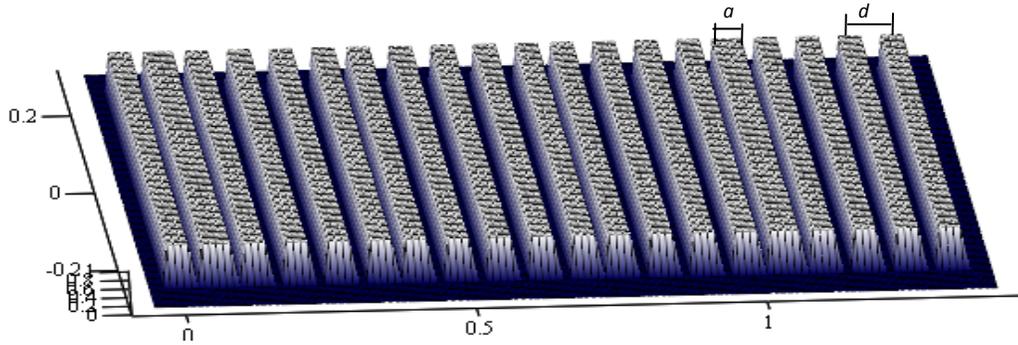


Figura 44. Painel de aberturas retangulares 2D.

O cálculo do padrão de difração de um conjunto de fendas é semelhante ao seguido no caso de duas fendas, considerando-se também que são longas e paralelas (se comparadas ao λ). Só que, neste caso, os limites de integração devem ser estendidos para 20 fendas, de largura a , e separadas entre si de d , como ilustrado na Figura 44.

Primeiramente, será mostrado o resultado do cálculo da difração por fendas múltiplas [120] e, a seguir, a análise do impedimento de usar essa expressão analítica para a grade fotônica. A seguir será desenvolvida através da 2D-CWT a expressão analítica para este caso em questão.

Se a origem do sistema de coordenadas for considerada no centro da primeira fenda, determina-se a contribuição de cada fenda, num ponto P afastado, por:

$$E = C \int_{-b/2}^{b/2} F(z) dz + C \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z) dz + \dots + C \int_{(N-1)a-b/2}^{(N-1)a+b/2} F(z) dz, \quad (92)$$

em que $F(z) = \text{sen}[\omega t - k(R - z \text{sen}\theta)]$, C o fator de amplitude constante, $k = 2\pi/\lambda$, θ o ângulo de incidência em relação a x , e R a distância entre o plano Σ e o ponto P do plano de observação, como se apresenta na Figura 45, a seguir.

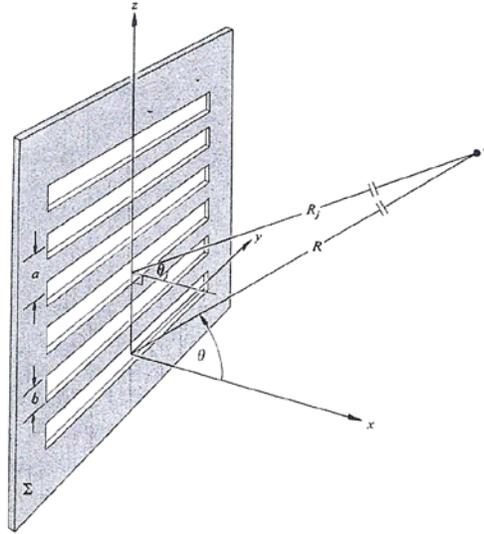


Figura 45. Geometria de uma grade de múltiplas fendas paralelas.

Este equacionamento leva ao caso de N contribuições de difração sobrepostas. Isto produz um padrão de interferência entre feixes múltiplos, modulado pela pelo sinal de difração de uma fenda simples. A equação do padrão de intensidade ou irradiância [121] é dada a seguir.

$$I(\theta) = \frac{\text{sen}^2[k\frac{b}{2}(\text{sen}(\theta))] \text{sen}^2[k\frac{a}{2}(\text{sen}(\theta))N]}{[k\frac{b}{2}(\text{sen}(\theta))]^2 [N \text{sen}[k\frac{a}{2}(\text{sen}(\theta))]]^2} \quad (93)$$

É o padrão de intensidade considerando-se N fendas, submetidas ao mesmo comprimento de onda, gerando inclusive a componente de ordem zero. Isto pode ser observado no resultado gráfico desta equação na Figura 46. Observe-se que a figura mostra o caso de um comprimento de onda com as componentes de ordem zero, 1 e 2 irradiadas. As contribuições de outros comprimentos de onda podem ser calculadas e adicionadas ao gráfico.

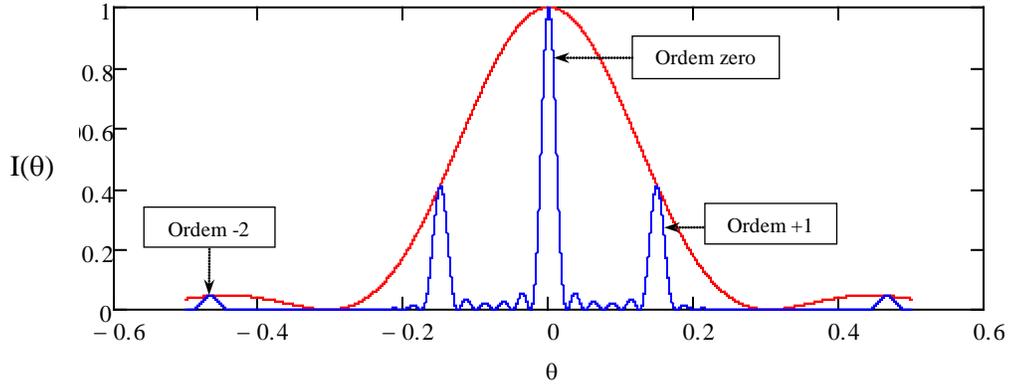


Figura 46. Padrão de difração de um sistema de fendas ($a = 0.002\text{mm}$, $b = 0.001\text{mm}$, $\lambda = 0.0005\text{mm}$ e $N = 6$).

Voltando-se ao caso da grade fotônica, cada fenda está submetida a um único comprimento de onda, além do fato notório de não irradiar a componente de ordem zero. Considerando-se que $\lambda \ll d$ e $\lambda \ll a$, então, para cada fenda pode ser calculada a difração separadamente e ao final superpor as contribuições. Seguindo o mesmo procedimento anterior, tem-se.

$$E = C \int_{-d/2}^{d/2} F(x, y) dx dy + C \int_{a-d/2}^{a+d/2} F(x, y) dx dy + \dots + C \int_{(N-1)a-d/2}^{(N-1)a+d/2} F(x, y) dx dy, \quad (94)$$

em que $F(x, y) = t_A(\xi, \eta) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{4\sigma^2}} e^{j[\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{s}]}$, o valor de C é igual a K_s/s , $s = \lambda_n z/\pi$, sendo z a distância entre as fendas e o plano de observação.

Em cada integral a wavelet *chirplet* óptica receberá um valor de comprimento de onda distinto das outras. Estas wavelets devido esta característica podem, então, ser chamadas de wavelets cromáticas.

O resultado de cada integral será uma função seno cardinal em um determinado comprimento de onda. Levando em consideração a contribuição de cada fenda, obtém-se a equação do padrão de intensidade para grade de difração fotônica ou de fendas múltiplas monocromáticas.

$$I(x, y) = \sum_{n=0}^{19} \left[I_n \text{sin c} \left(2a \frac{x-dn}{\lambda_n z} \right) \text{sin c} \left(2b \frac{y}{\lambda_n z} \right) \right]^2 \quad (95)$$

O gráfico 2D resultante desta equação pode ser observado na Figura 47, a seguir

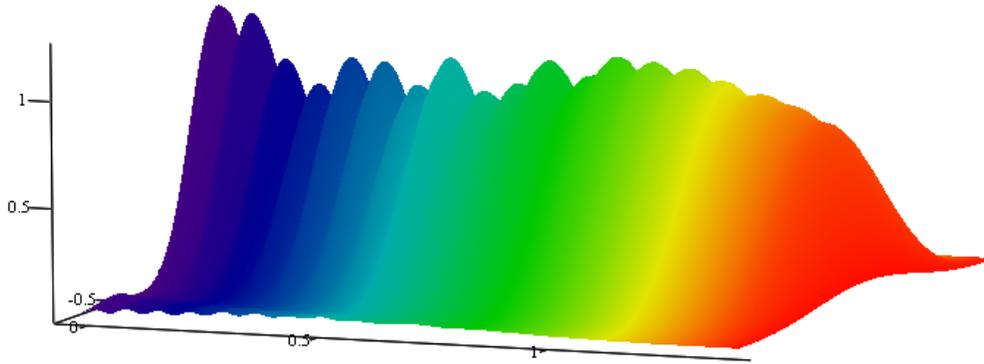


Figura 47. Padrão de difração 2D de um sistema de fendas ($a=0.002\text{mm}$, $b=0.001\text{mm}$, $\lambda=0.0005\text{mm}$ e $N=20$).

É relevante destacar que todo procedimento descrito poderia ter sido feito dos padrões de difração para o objeto gerador. Observe-se também que os padrões de difração apresentam-se difusas ou não resolvidas entre si. Na seção a seguir será tratada a solução desse problema.

4.4 Critério de Rayleigh dos padrões de difração

Em todo instrumento de medição óptica a luz deve atravessar algum tipo de abertura, ou algum elemento óptico de tamanho finito (por exemplo, uma face da lente, espelho grade, ou prisma). Com isso, as imagens associadas serão correspondentemente próximas e seus padrões de difração irão se sobrepor. Dependendo de como próximos os padrões de difração sejam, as imagens e, portanto, comprimentos de onda, ou será resolvido ou não resolvido pelo instrumento. A capacidade do espectrômetro para resolver duas linhas espectrais próximas e estreitas é chamada Poder de Resolução Cromático, \mathcal{R} , e é definida por,

$$\mathcal{R} = \lambda/\Delta\lambda_{\text{mín}} = \theta/\Delta\theta_{\text{mín}} \quad (96)$$

em que $\Delta\lambda_{\text{mín}}$ é a separação de comprimento de onda mínimo para duas linhas que são resolvidas, e λ é o comprimento de onda médio destas duas linhas.

O valor real de $\Delta\theta_{\text{mín}}$, a separação angular mínima de resolução das imagens, depende do perfil dos padrões de difração, que por sua vez depende da geometria da abertura de

difração. Para aberturas retangulares de largura a , pode ser demonstrado que o critério de Rayleigh para a separação angular mínimo é

$$\Delta\theta_{\text{mín}} = \lambda / a, \quad (97)$$

em que λ é o comprimento de onda de luz difratada.

Pode ser mostrado que o Poder de Resolução Cromático teórico de uma grade de difração, de acordo com o critério de Rayleigh, é dado por,

$$\mathcal{R} = N m, \quad (98)$$

em que N é o número de linhas ou tiras alinhadas (ou fendas) iluminadas ou transmitindo, e m é a ordem de difração ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) que neste caso é $m = 1$.

No caso das difrações calculadas na seção anterior o espaçamento entre as fendas é fixo, mas pode ser resolvido pelo afastamento ou aproximação, z , do plano de observação. O valor mínimo que resolve o Critério de Rayleigh é $z = 15\text{mm}$. Aplicando-se esse critério obtêm-se os padrões de difração mostrados na Figura 48.

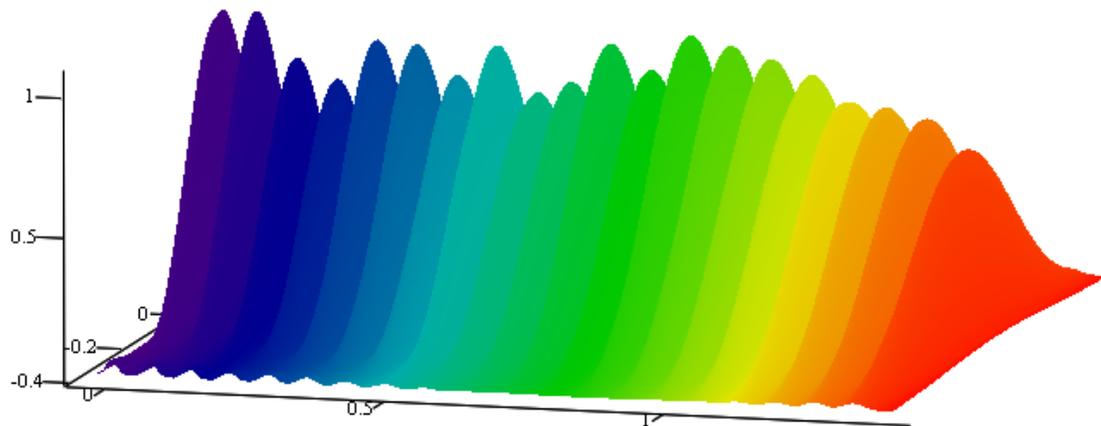


Figura 48. Os padrões de intensidade com as difrações resolvidas.

4.5 Experimentos e simulações

Os blocos de PMMA (MicroChem 495PMMA A series) foram litografados sobre vidro através do processo EBL (electron beam lithography), sendo este vidro em lâminas

cujas dimensões são 2,0 mm×1,5 mm×1,0 mm. A forma escolhida para a estrutura foi um arranjo hexagonal fcc (face centered cube) de fácil fabricação. O padrão de exposição foi 320 $\mu\text{C}/\text{cm}^2$.

A determinação dos valores ótimos dos parâmetros de diferentes distâncias interdielétricos, fator de preenchimento, e espessura de PMMA foram realizados avaliando-se no contexto de luz extraída do cristal.

Com isso, baseado nesses dados, um painel de vinte estruturas cristalinas retangulares com distâncias interdielétricos de 245 a 425 nm e fator de preenchimento de 0,35 foi escolhido para um PMMA de 400 nm de espessura. Cada espectrofotômetro consistiu de blocos de 20×1 de 50 μm ×400 μm de cristais fotônicos com um arranjo total de aproximadamente 1,47 mm ×400 μm . Uma foto ampliada desse bloco fotônico pode ser visto na Figura 49, a seguir.

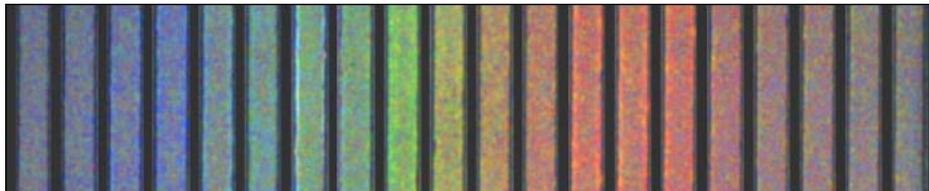


Figura 49. Foto ampliada dos segmentos do painel de cristais fotônicos. A emissão de luz foi realizada com um LED de espectro branco.

A iluminação do sistema de cristais fotônicos foi realizada usando uma fibra óptica e uma câmera USB. A luz foi guiada para as quatro bordas do substrato através de um cabo de fibra óptica de quatro derivações (*Lumitex Inc. e OptiLine*). Esta montagem consiste de um feixe de fibra plástica de 0,010”, montado dentro de quatro segmentos de 0,80”. Cada segmento foi acoplado a uma borda do substrato de vidro.

As imagens RGB do sistema foram tomadas usando uma câmera USB (*Matrix Vision mvBlueFox-120C*) com objetiva de aumento 4X e abertura de 0.096 (*Infinity Photo-Optical Infinitix*). A resposta espectral visível foi caracterizada usando uma fonte de luz programável (FLP) da *Horiba Tunable Light Source e Gemini 180 monochromator*. A

projeção do bloco fotônico foi medida usando um fotodetector calibrado (Câmera *Newport* 918D). A seguir, Figura 50, a montagem do sistema de teste fotônico.



Figura 50. Conjunto para simulação de espectrofotômetro fotônico.

Em seguida, o desempenho do espectrofotômetro fotônico foi avaliado em comparação com um espectrofotômetro óptico convencional (HITACHI U-1100) com grade de difração. A Figura 51 ilustra o referido espectrofotômetro.



Figura 51. Espectrofotômetro óptico (HITACHI U-1100) com grade de difração convencional.

Primeiramente, foram realizadas substituindo a entrada FLP por um LED de luz ultra branca de 5 mm [122], polarizado de modo a conduzir com uma corrente de 5 mA. Em seguida, o LED foi substituído por uma lâmpada de tungstênio [123, 124]. A resposta do espectrofotômetro comercial foi caracterizada usando sua lâmpada de tungstênio original

(Osram HALOSTAR Standard 64428) e a seguir substituída por um LED de luz branca (Cool-White L XK2-PW12-R00 Everlight) de 5 mm, polarizado do mesmo modo que no fotônico. As respostas foram analisadas através do aplicativo *SpectraSuite Spectrometer Operating Software* fornecido pela *Ocean Optics*. Vinte regiões de interesse (ROI) de 8×32 pixel foram definidas para o sistema 20×1 do espectrofotômetro. A luminância de escala de cinza ponderada foi calculada para cada ROI pela média dos valores das cores vermelho, verde e azul em cada região.

4.6 Resultados

A Figura 52 apresenta a resposta cromática do bloco de vinte cristais fotônicos para uma entrada de luz de espectro branco, por exemplo, de uma lâmpada halógena de tungstênio. As regiões iluminadas com várias cores em cada uma dessas tiras ilustram a variação de cor das respostas do cristal fotônico, indo do azul à esquerda para tons de vermelho à direita. O conjunto total de imagens é usado para calcular a luminância da escala de cinza ponderada para cada segmento Trinitron estendido. Desta maneira, obtém-se a resposta espectral de cada tira ou funções de base, como mostrado na Figura 52.

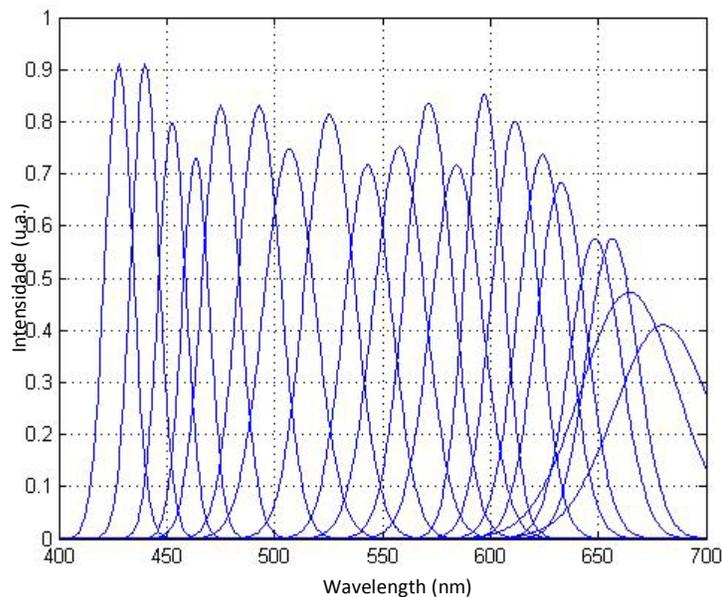


Figura 52. Resposta Espectral normalizada do painel 20X1 de cristais fotônicos padrão Trinitron, mostrados na Figura 49. As medições representam a média da intensidade versus comprimento de onda. Os picos em cada comprimento de onda são determinados pela distância interdielétricos de cada cristal.

A implementação aqui apresentada emprega imagens coloridas para obter informações do padrão de intensidade. O espectrofotômetro fotônico funciona mapeando a intensidade dos padrões espaciais para comprimento de onda referente à resposta de cada elemento do padrão Trinitron estendido.

A Figura 53 mostra a comparação do desempenho de espectrofotômetro com vinte cristais fotônicos padrão Trinitron estendido e um espectrofotômetro óptico convencional com grade de difração (HITACHI U-1100). O espectro usando o espectrofotômetro fotônico foi obtido através da análise de intensidades de escala de cinza dos padrões da Figura 49. O espectro em azul, também mostrado na Figura 53, representa o limite do sistema dado o padrão de resposta mostrado na Figura 52; ele é obtido projetando o espectro branco do LED (Cool-White LXX2-PW12-R00 Everlight) medido com o espectrofotômetro comercial sobre as funções de base mostradas na Figura 52.

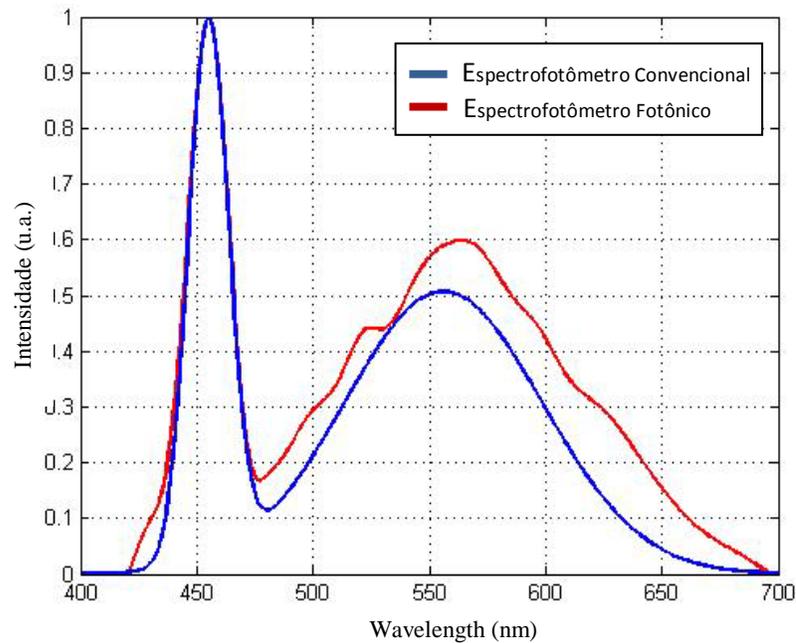


Figura 53. Comparação entre o espectrofotômetro fotônico e o espectrofotômetro óptico (grade de difração) convencional. Curvas do espectro medido com a utilização de LED de espectro branco no espectrofotômetro convencional, espectro medido projetando a luz branca do LED sobre a grade de difração, e do espectrofotômetro fotônico.

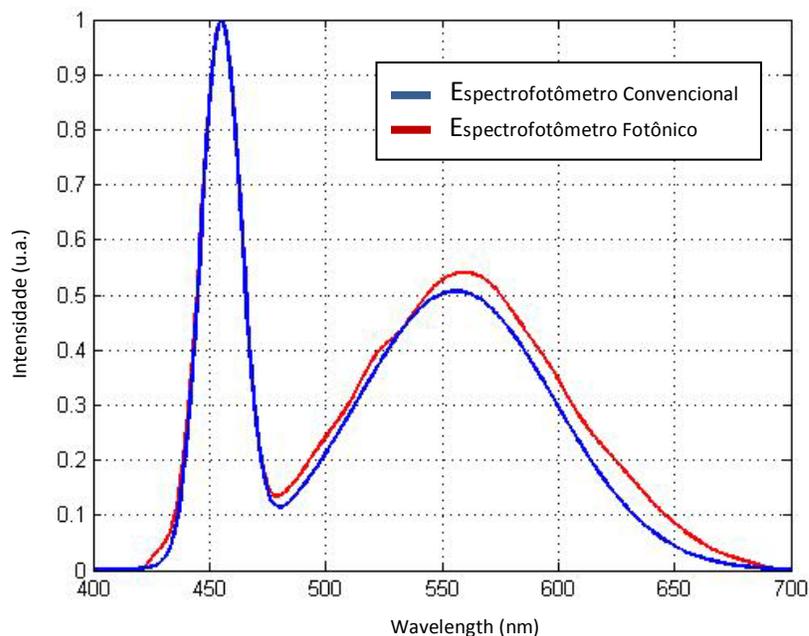


Figura 54. Efeito do número de elementos base sobre a resposta do espectrofotômetro fotônico. Projeção de LED de espectro branco ideal sobre 30 funções de base.

A precisão do espectro recuperado pode ser melhorada com o uso de mais módulos de cristais fotônicos. A Figura 54 mostra o efeito de aumento da densidade de funções resposta (similarmente moldadas a aquelas da Figura 52) sobre as projeções de luz de LED de espectro branco. Aumentando o número de funções resposta para 30, como na Figura 55, aumenta consideravelmente a precisão do espectro projetado. A realização experimental apresentada aqui pode ser conduzida para mais de 600 padrões, sem qualquer modificação. Pode-se, inclusive, alcançar a resolução de 1 nm para cada tira para otimizar o desempenho do espectrofotômetro.

O mesmo procedimento de comparação foi adotado com a iluminação com lâmpada de tungstênio. Os resultados podem ser observados nas Figuras 55 e 56.

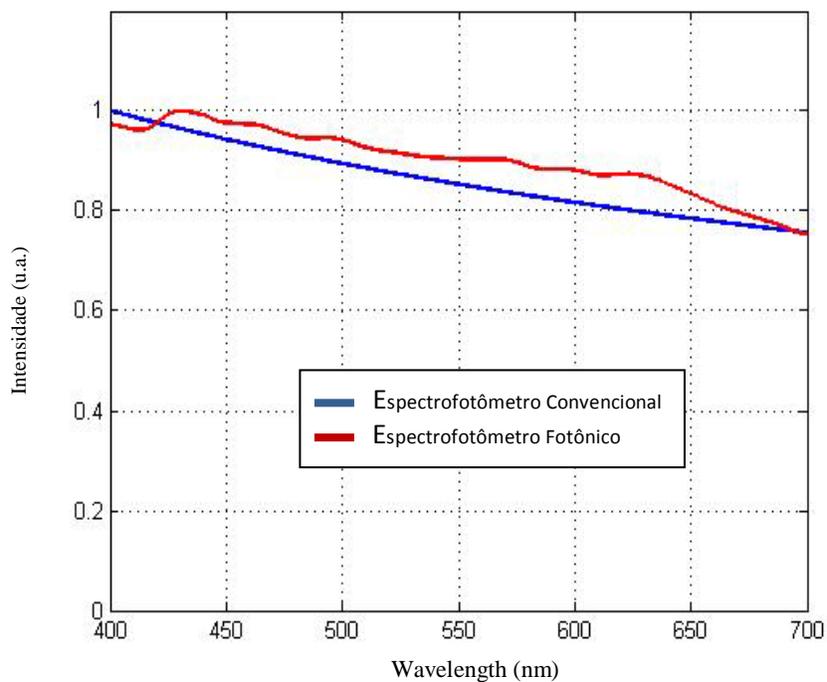


Figura 55. Comparação entre o espectrofotômetro fotônico e o espectrofotômetro óptico (grade de difração) convencional. Curvas do espectro medido com a utilização de lâmpada de tungstênio no espectrofotômetro convencional.

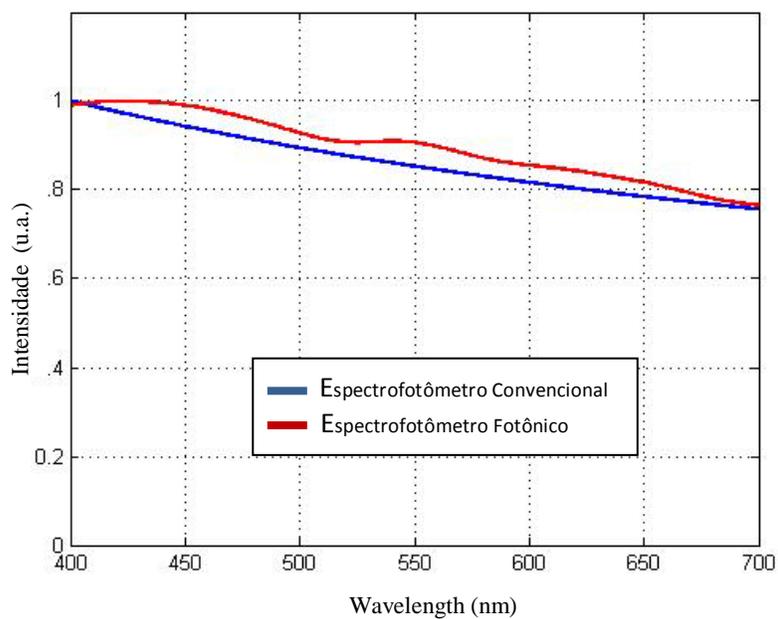


Figura 56. Efeito do número de elementos base sobre a resposta do espectrofotômetro fotônico. Projeção de luz de espectro branco ideal sobre 30 funções de base.

CAPÍTULO 5

WAVELETS HOLOGRÁFICAS

Este capítulo trata de uma nova relação para wavelets de suporte compacto. Apesar de serem wavelets contínuas, falta formulação analítica para tais wavelets. São apresentadas aqui expressões analíticas para daublets (Daubechies wavelets) e seus espectros. De modo a avaliar as propriedades destas novas expressões para daublets, as mesmas são aplicadas na fusão de imagens holográficas e os resultados são comparados com aqueles obtidos aplicando-se a transformada discreta de wavelets (DWT) para a mesma imagem holográfica. Estas quase-daublets foram implementadas no wavelet toolbox MatlabTM para efetuar esta aplicação.

5.1 Expressões Analíticas para Daublets e seu Espectro

Wavelets tem tido prolíferas aplicações em diversas áreas do conhecimento, especialmente na Física e Engenharia [125]. Tanto a transformada contínua ou a discreta de *wavelet* têm emergido como uma técnica poderosa de análise em processamento de sinais e têm provado serem superiores em muitas situações, à análise clássica de Fourier [64, 90, 125]. A transformada de *wavelet* contínua fornece informações precisas sobre irregularidades locais e globais de sinais [92] e é eficaz na eliminação de ruídos que contaminam os sinais. Também tem sido usada na identificação de amortecimentos [126], análise de sinais sísmicos [127] e detecção de singularidades [92], entre outras aplicações.

Existem diversas *wavelets* contínuas que têm expressões analíticas, tais como Morlet, Meyer, chapéu mexicano, Shannon, beta, etc. [64, 91]. No entanto, uma característica bem estabelecida de *wavelets* é a de que, em muitos casos, a análise do sinal pode ser realizada sem o conhecimento da expressão analítica da *wavelet* mãe. Este fato é particularmente verdade para a maioria das *wavelets* de suporte compacto [91]. A obtenção da forma de onda, tanto da função de wavelet ou de escala, é sempre realizada por uma abordagem iterativa numérica (algoritmo cascata). Como alguém poderia gerar a forma de onda das *wavelets Daubechies (db)* sem explorar aproximações numéricas sucessivas? Nesta seção apresentamos uma solução analítica, o que torna simples lidar com *wavelets* tipo *db* (por exemplo, *coiflets*).

5.1.1 Análise da série não harmônica

Uma wavelet é dita ser de suporte compacto se a energia desta wavelet está restrita a um intervalo finito $[0, T]$, e se a função é igual zero fora deste intervalo.

Seja uma *wavelet* $\psi(t)$ de suporte compacto definida no intervalo $[0, T]$, em que

$$T := \text{comprimento}(\text{supp } \psi(t)), \quad (99)$$

é o comprimento do suporte da *wavelet* [125]. O modelo clássico (Fourier) para representar um sinal [90] dentro de uma janela de comprimento T é dado por:

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{sen} \left(\frac{2\pi}{T} k t + \theta_k \right). \quad (100)$$

Observe-se que existem componentes harmônicas com frequência fundamental $2\pi/T$. Em vez deste modelo padrão bem conhecido, tratar-se-á com uma representação de wavelet (semelhante a Fourier), inicialmente sem suporte compacto,

$$\psi_{\text{long}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{sen}(\omega_k t + \theta_k), \quad (101)$$

em que as frequências ω_k não mais representam frequências harmônicas. Ao se introduzir suporte na representação acima, $\psi_{long}(t) = \psi(t)$, em que $\psi(t)$ é a *wavelet* de suporte compacto (a demonstração será realizada na seção 5.1.2). Impondo agora a condição de oscilação para a *wavelet* [50], segue-se que,

$$\int_0^T \psi(t) dt = \int_0^T \psi_{long}(t) dt = 0, \quad (102)$$

a qual produz

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^T \text{sen}(\omega_k t + \theta_k) dt = 0. \quad (103)$$

A fim de assegurar média zero para a *wavelet*, devido a condição de ortogonalidade, deve ser estabelecida a condição de que cada integral na equação anterior seja igual à zero, ou seja,

$$\int_0^T \text{sen}(\omega_k t + \theta_k) dt = \int_{\theta_k}^{\omega_k T + \theta_k} \text{sen}(\zeta) d\zeta = 0, \quad (104)$$

que pode ser reescrita na forma

$$(1 - \cos(\omega_k T_k)) \cdot (\cos(\theta_k) + \text{sen}(\omega_k T_k)) \cdot (\text{sen}(\theta_k) = 0, \forall k).$$

Aqui, algumas restrições de fase são introduzidas, a saber,

$$\theta_k \neq \frac{2\pi}{T_k} l \quad \therefore l \in \mathbb{Z}.$$

A partir da restrição acima, podem ser obtidas as seguintes relações:

- 1) Ângulos de fase θ_k em termos das componentes de frequência ω_k ,

$$\theta_k = -tg^{-1} \left(\frac{1 - \cos(\omega_k T_k)}{\sqrt{1 - \cos^2(\omega_k T_k)}} \right). \quad (105)$$

- 2) O recíproco também é verdadeiro, ou seja, as frequências ω_k em termos de θ_k . Assim segue-se que:

$$(1 + tg^2(\theta_k)) x_k^2 - 2x_k + (1 - tg^2(\theta_k)) = 0, \quad (106)$$

em que $x_k := \cos(\omega_k T_k)$. A solução de interesse (não trivial) é

$$\omega_k = \pm \frac{1}{T_k} \cos^{-1} \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2(\theta_k)}{1 + \operatorname{tg}^2(\theta_k)} \right). \quad (107)$$

Com isso, um modelo analítico inédito é proposto para representar *wavelets* de suporte compacto no intervalo $[0, T]$, o qual será referido como série não harmônica de uma *wavelet*,

$$\psi_{long}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen} \left[\left(\frac{2\pi}{T} k \pm \frac{1}{T_k} \cos^{-1} \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2(\theta_k)}{1 + \operatorname{tg}^2(\theta_k)} \right) \right) t + \theta_k \right]. \quad (108)$$

As frequências não igualmente espaçadas da decomposição são

$$\frac{2\pi}{T} k \pm \frac{1}{T_k} \cos^{-1} \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2(\theta_k)}{1 + \operatorname{tg}^2(\theta_k)} \right). \quad (109)$$

As frequências presentes nesta expansão em série não são mais frequências harmônicas tais como $(\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots, \omega_0 := 2\pi/T)$, mas sim perturbações inseridas para garantir média zero para a *wavelet*. Isto pode ser chamado de decomposição não harmônica de uma *wavelet*.

5.1.2 Expressões Analíticas nos domínios do tempo e frequência das *Wavelets Daubechies*

Nesta seção são calculadas expressões analíticas das *wavelets dbN* e de seus respectivos espectros de frequência.

5.1.2.1 Análise no Domínio do Tempo

A expressão analítica para implementar uma *wavelet Daubechie (daublet)* no domínio do tempo, partindo-se de (101), é

$$\psi_{long\ db6}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(b_k t + c_k). \quad (110)$$

A Tabela I mostra os coeficientes a_k , b_k , c_k requeridos para implementar as expressões das *daubelets* $db4$, $db6$ e $db8$. Uma descrição mais detalhada de tais *wavelets* pode ser encontrada em [91, 125]. A Figura 57 mostra o sinal da $\psi_{long}(t)$ para $db6$, como exemplo de aplicação dos coeficientes da Tabela I.

TABELA I. COEFICIENTES CALCULADOS DAS FUNÇÕES DE WAVELET DAUBECHIES DE ACORDO COM (108) PARA WAVELETS ψ_{DB4} , ψ_{DB6} , E ψ_{DB8} .

k	ψ_{db4}			ψ_{db6}			ψ_{db8}		
	a_k	b_k	c_k	a_k	b_k	c_k	a_k	b_k	c_k
1	0.3452	4.586	-2.316	0.2623	4.850	-1.655	-0.2054	5.066	-17.48
2	0.2783	3.460	1.413	0.2520	3.993	3.014	0.1334	3.116	-6.671
3	0.3015	5.770	-0.373	0.2287	5.724	0.649	0.1926	3.720	-10.66
4	0.2129	6.960	-4.943	0.1778	3.197	0.649	-0.0622	2.532	-12.39
5	0.1293	2.414	-1.794	0.1729	6.590	-5.635	0.2145	4.379	-15.39
6	0.1120	8.161	-3.225	0.1098	7.459	-4.613	0.1768	5.750	-26.04
7	0.0295	9.366	-7.567	0.0820	2.436	4.117	0.1360	6.419	-25.21
8	0.0223	1.372	1.102	0.0504	8.333	-9.828	-0.0917	7.081	-27.53
9	-	-	-	-	-	-	-0.0468	7.740	-32.94

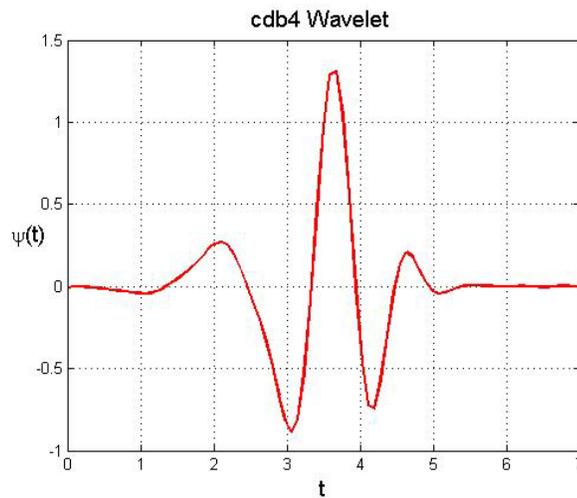


Figura 57. Sinal da $\psi_{long}(t)$ para $db6$.

Análise idêntica pode ser usada na construção das funções de escala das daublets ($\phi(t)$), apenas usando outro conjunto de coeficientes.

Os coeficientes associados às funções de escala de *Daubechies* são mostrados na Tabela II. Pode ser observado que as expressões das funções de escala mantêm as mesmas características como descrito anteriormente para gerar aproximações para funções wavelet de suporte compacto. A Figura 58 mostra o sinal da $\phi_{long}(t)$ para *db4*, como exemplo de aplicação dos coeficientes da Tabela II.

TABELA II. COEFICIENTES CALCULADOS DAS FUNÇÕES DE ESCALA DE DAUBECHIES DE ACORDO COM (108) PARA FUNÇÕES ϕ_{db4} , ϕ_{db6} E ϕ_{db8} .

k	ϕ_{db4}			ϕ_{db6}			ϕ_{db8}		
	a_k	b_k	c_k	a_k	b_k	c_k	a_k	b_k	c_k
1	0.3762	0.672	0.171	0.2247	0.648	1.540	0.1417	-0.004	1.617
2	0.2113	3.226	-2.404	0.1244	1.323	-0.241	0.1214	1.697	-1.584
3	0.3900	1.204	0.939	0.3148	2.333	-1.329	0.1480	2.174	-2.969
4	0.0770	4.193	2.098	0.0111	0.032	0.8670	0.1840	-0.271	0.929
5	0.2661	2.384	-1.379	0.3007	2.084	-2.628	0.1603	2.544	-3.420
6	0.0081	5.586	-1.379	0.0489	4.087	-5.627	0.1057	2.934	-4.170
7	0.0226	8.537	-1.184	0.1224	3.019	2.881	0.1136	3.586	-1.468
8	0.0205	9.424	3.346	0.0935	3.728	0.425	0.0877	3.759	-0.154
9	-	-	-	0.0296	0.338	0.208	0.1234	0.907	-0.523
10	-	-	-	0.2088	0.342	0.735	0.1419	1.239	-0.457

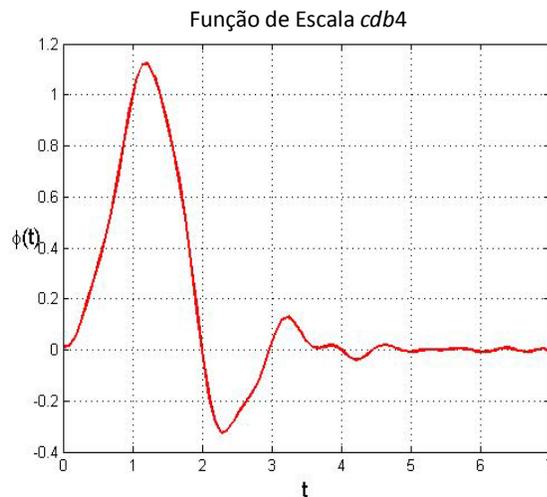


Figura 58. Sinal da $\phi_{long}(t)$ para *db6*.

Agora, tomando-se os coeficientes de ψ_{db4} como referência e rearrumando b_k em ordem crescente, pode-se aplicar (108) de modo a obter os termos de correção em torno de $k\omega_0$ correspondentes aos $db4$ não harmônicos (104). A Tabela III mostra estes termos de correção flutuantes sobre as componentes harmônicas da série. Os valores de k , em contraste àqueles da Tabela I, agora correspondem à ordem das componentes harmônicas na série, com $\omega_0 = 2\pi/7$.

TABELA III. COEFICIENTES ω_k REQUERIDOS PARA APROXIMAR A WAVELET DAUBECHIE PARA A WAVELET ψ_{db4} DE ACORDO COM (108).

	ψ_{db4}	Harmônico	Não harmônico
k	b_n	$k.\omega_0$	ω_k
1	1.372	0.898	0.474
2	2.414	1.795	0.619
4	3.460	3.590	-0.130
5	4.586	4.488	0.096
6	5.770	5.386	0.384
7	6.960	6.283	0.677
9	8.161	8.078	0.083
10	9.366	8.976	0.390

5.1.2.2 Análise no Domínio da Frequência.

A expressão analítica para *wavelets Daubechies* no domínio da frequência é dada por

$$\Psi_{long}(\omega) = j\pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[e^{-jc_k} \delta(\omega + b_k) - e^{jc_k} \delta(\omega - b_k) \right]. \quad (111)$$

Esta expressão é a transformada de Fourier da *série não harmônicas* $\psi_{long}(t)$. Claramente, surgem no espectro apenas impulsos de Dirac representando funções de senos da aproximação periódica da wavelet analisada [90]. Como exemplo, seja a expansão não

harmônica de uma *wavelet* padrão tal como *db6*. O espectro banda larga da *wavelet* *long db6* periódica (aproximada) é mostrada na Figura 59.

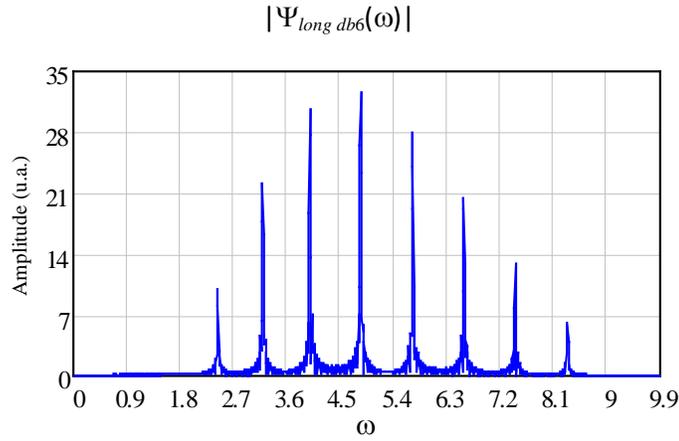


Figura 59. Espectro da expressão, *long db6*, usada como modelo para *db6*. $\Psi_{long\ db6}(\omega)$ é a transformada de Fourier da série não harmônica $\psi_{long}(t)$ para *db6*.

A fim de determinar o espectro “verdadeiro” da *db6*, a *wavelet* $\psi_{long\ db6}(t)$ deve ser confinada em seu suporte, da seguinte forma:

$$\psi_{db6}(t) = \psi_{long\ db6}(t) \cdot \Pi\left(\frac{t-5.5}{11}\right), \quad (112)$$

em que Π denota a função padrão porta e $T := 2N - 1 = 11$ é o comprimento do suporte da *wavelet db6* [125], com $N = 6$ (índice da *daublet*).

O espectro de $\psi_{db6}(t)$ é facilmente deduzido pelo uso do teorema da convolução [39], e partindo-se do princípio de que o cálculo de $\Psi_{long\ db6}(\omega)$ envolve somente impulsos, o sinal final corresponderá à superposição de funções *sinc* (Figura 60).

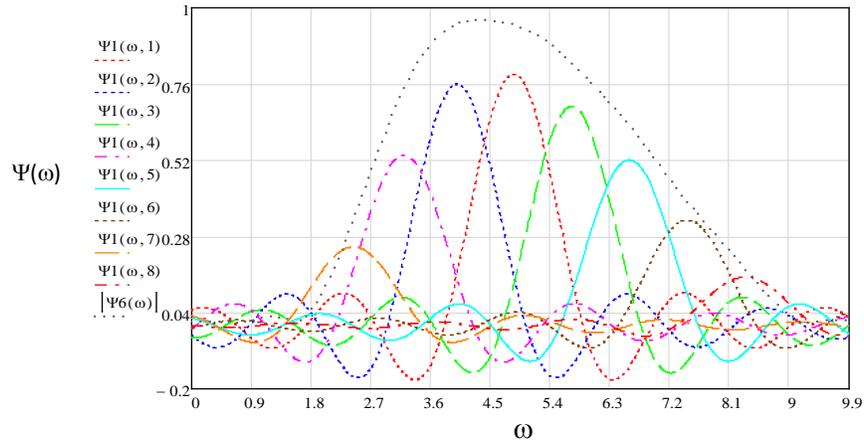


Figura 60. Espectro da onda *short db6*: os pulsos *sinc* são superpostos de modo a construir o espectro contínuo da wavelet, a qual refere-se ao confinamento do suporte (truncamento no domínio do tempo).

Então, uma expressão analítica para o espectro da *db6*, a qual está confinada no seu suporte compacto é dada por

$$\Psi_{short}(\omega) = \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sinc}\left[\left(\omega - b_k\right) \frac{T}{2\pi}\right] = |\Psi_{db}(\omega)|. \quad (113)$$

Aqui, T é o comprimento do suporte da *db-wavelet* e as constantes a_k e b_k são obtidas das aproximações relacionadas na Tabela I. Esta é uma expressão analítica natural para se obter o espectro das *doublet*. O formato do espectro da *db6* é mostrado na Figura 61.

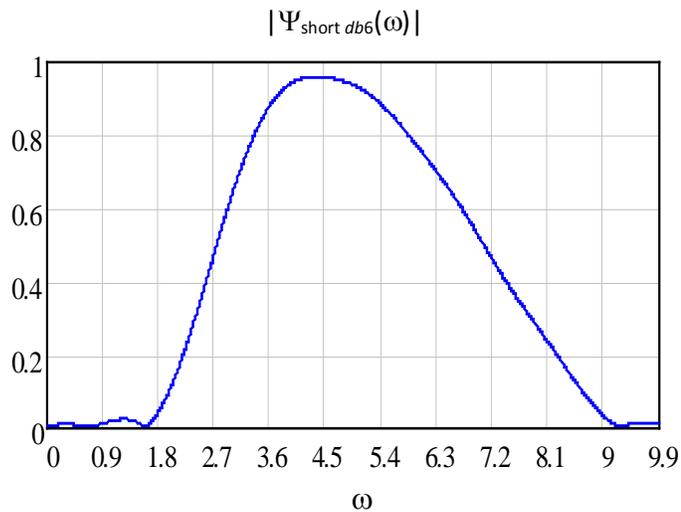


Figura 61. Resultado da superposição de *sinc*, vistos na Figura 60: este é o mesmo espectro da *wavelet db6*.

5.1.2.3 Construindo *cdbN* na caixa de ferramentas *wavelet* do MatlabTM.

As expressões analíticas calculadas devem ser escritas ou embutidas em software de processamento de sinais com o objetivo de investigar algumas aplicações potenciais de tais *wavelets*. Atualmente, um dos mais poderosos software de suporte à análise de *wavelets* é o MatlabTM, especialmente quando vem embutida a interface gráfica de *wavelets*.

Existem cinco tipos de *wavelets* na caixa de ferramentas *wavelet* do MatlabTM [128] (podem ser obtidas digitando-se o comando *waveinfo* no *prompt*):

- (i) *Wavelets* cruas;
- (ii) *Wavelets* infinitamente regulares;
- (iii) *Wavelets* ortogonais e de suporte compacto;
- (iv) Par de *wavelets* biortogonais e de suporte compacto;
- (v) *Wavelets* complexas.

As *wavelets* tipo (iii) apresentam como regra uma função de escala e possuem expressões aproximadas. Contudo, poucas *wavelets*, dentro da função “*standard 1-D wavelet ensemble*”, (haar, db, sym, coif, bior, rbior, meyr, dmey, gaus, mexh, morl) detêm esta característica. Apenas assume-se a *wavelet* Meyer como *wavelet* do tipo 3, mas ela não possui suporte compacto. Apesar de existir função de escala para “*dbN*”, essas *wavelets* não estão disponíveis como *wavelets* do tipo 3, desde que não existem expressões analíticas.

Este trabalho preenche esta lacuna fornecendo expressões analíticas simples, tanto para a *wavelet* como para a função de escala de *dbN*. As expressões das *doublet* (*wavelets* e funções de escala) foram embutidas dentro da caixa de ferramentas do MatlabTM [128] como ilustrado nas Figuras 62 e 63, com o nome de família *cdbN*. Na verdade, *cdbN* corresponde a mesma família de *dbN*, só que a única com expressão analítica. No entanto, por uma questão de conveniência, *cdbN* é usado como uma notação para designar aproximações contínuas que são utilizados na implementação das *dbN*. Aplicações potenciais de *dbN* (aproximadas) são apresentadas na seção 5.1.3.

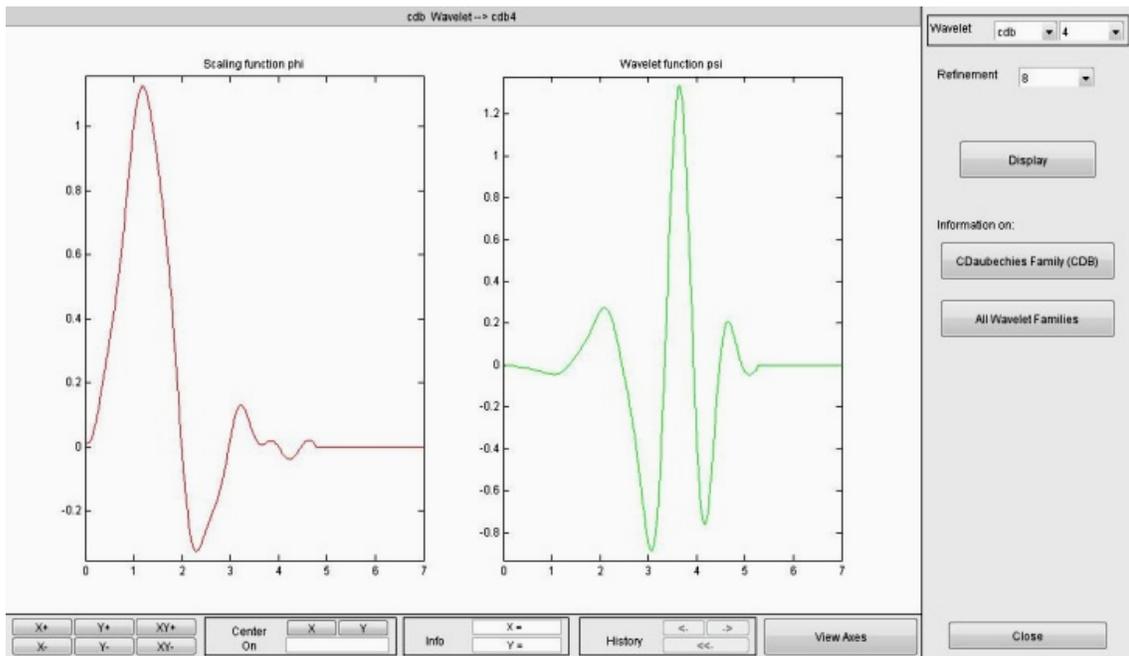


Figura 62. Tela mostrando a *cdb4* doublet implementado na caixa de ferramentas do Matlab™.

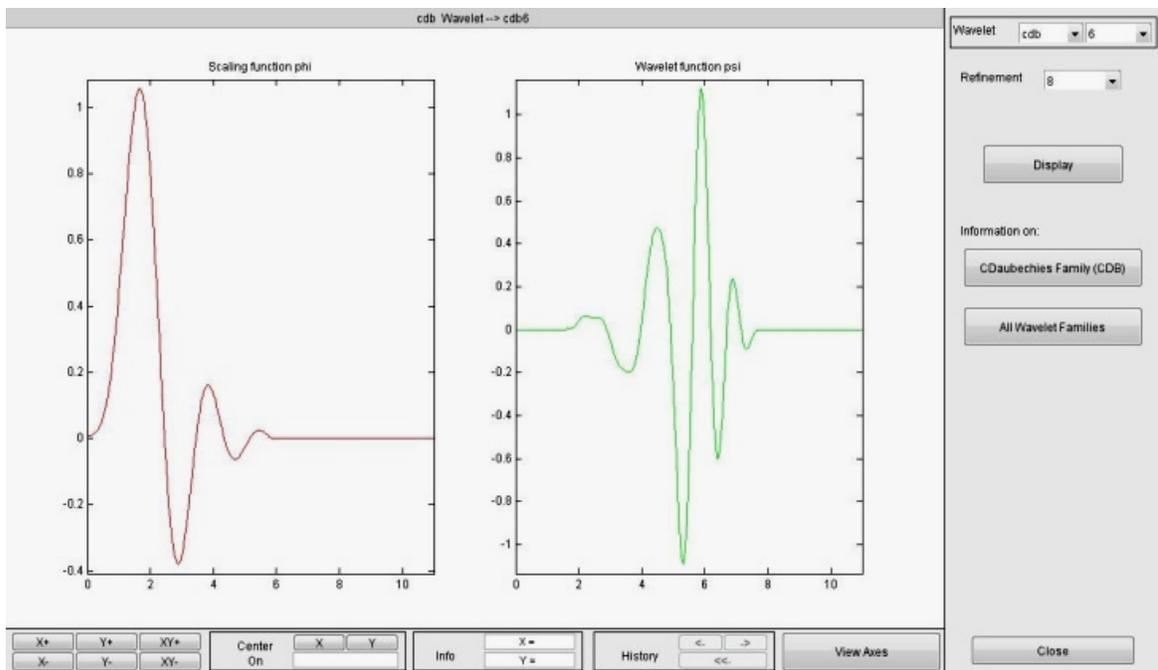


Figura 63. Tela mostrando a *cdb6* doublet na caixa de ferramentas do Matlab™.

Essas telas de *wavelet* fornecem formas de onda indistinguíveis, quando comparadas com aquelas geradas pelo algoritmo de cascata (com mais de 8 iterações). A Seção 5.1.5 mostra um exemplo a título ilustrativo e comparativo de um processo iterativo utilizado para gerar as Daubelets no domínio do tempo.

5.1.3 Potenciais Aplicações da abordagem analítica das *Daublet*

Apesar do fato de expressões analíticas no tempo e frequência de *wavelets* contínuas serem conhecidas [64, 125] tanto para *wavelets* de suporte infinito (Shannon, Morlet, Mexhat, Meyer, de Oliveira) quanto para *wavelets* de suporte compacto (Haar, hat, beta), *wavelets* muito úteis e poderosas como as *daubelets* (*coifflets* e *symlets*) não apresentam este recurso. *Wavelets* tem sido muito utilizadas como uma ferramenta poderosa e profundamente enraizada na análise de sinais com aplicações em diversos campos tais como medicina, controle de energia, compressão de imagem, codificador de voz. Uma extensa lista de aplicações em Telecomunicações pode ser encontrada em [130]. Entre eles, pode ser mencionado um sistema de espalhamento de espectro com base na *wavelets* campo finito [129], uma modulação digital baseada em *wavelet* (*wavelet-shift keying*) [131], uma multiplexação por divisão de multiresolução [132]. O teorema de modulação (AM) é um dos resultados mais celebrados e amplamente aplicado da Teoria da Comunicação [133]. Da mesma forma como modulações analógicas padrão, dois tipos de "modulação *wavelet*" entre um sinal $f(t)$ e uma *wavelet* contínua $\psi_{a,b}(t)$ utilizados como portadora (de pulsos curtos) [134] podem ser concebidos usando as expressões analíticas propostas neste Capítulo.

Pesquisas recentes focadas em técnicas de transmissão com multi-portadoras [135, 136], destacam que alguns dos inconvenientes inerentes a sistemas OFDM podem ser fortemente neutralizados usando portadoras *wavelet* ao invés de formas de onda exponenciais complexas OFDM. Devido ao fato de estas portadoras *wavelet* fornecerem ortogonalidade entre as subportadoras e o confinamento espectral, elas podem ser separadas no receptor por técnicas de correlação [137, 138]. As aplicações relatadas acima, já fazem uso de portadoras *wavelet* como as da família Haar e Daubechies, mas precisam primeiramente de processos de

iteração para implementar aquelas *wavelets*. Os mesmos processos são requeridos também em aplicações com canais de comunicação tais como bloqueio (*jamming*), interferência intersimbólica (ISI), interferência ao canal adjacente [130].

Outra área de grande aplicação da WT é o processamento digital de imagens [62], especificamente na análise de textura [139], compressão de imagens [103], reconhecimento e fusão de imagens [140]. Na seção a seguir será feita uma aplicação conjunta das *wavelets Daubechie* e *chirplet* óptica baseada na técnica de fusão de imagem do MatlabTM.

5.1.4 Aplicação da abordagem analítica das *Daublet* em conjunto com a Chirplet óptica: Wavelets Holográficas

Nesta subseção, para melhor entendimento do conceito e procedimento da técnica de fusão baseada em wavelet, um diagrama esquemático é dado na Figura 64. Geralmente, a idéia básica é apresentar uma decomposição de multiresolução em cada imagem. Os coeficientes de baixa-frequência e alta-frequência são processados através de uma regra de fusão. Neste caso específico, será utilizada a caixa de ferramentas de imagem do MatlabTM [128] com a *cdb6 daublet* embutida. Esta caixa de ferramentas, seleciona o maior coeficiente wavelet em cada local a partir das imagens de entrada como o coeficiente no local correspondente na imagem da fusão. A seguir, a imagem da fusão é obtida aplicando-se a IDWT nos coeficientes selecionados em cada local da imagem. Ao final para obter a imagem 3D é aplicada a transformada de wavelet Chirplet óptica.

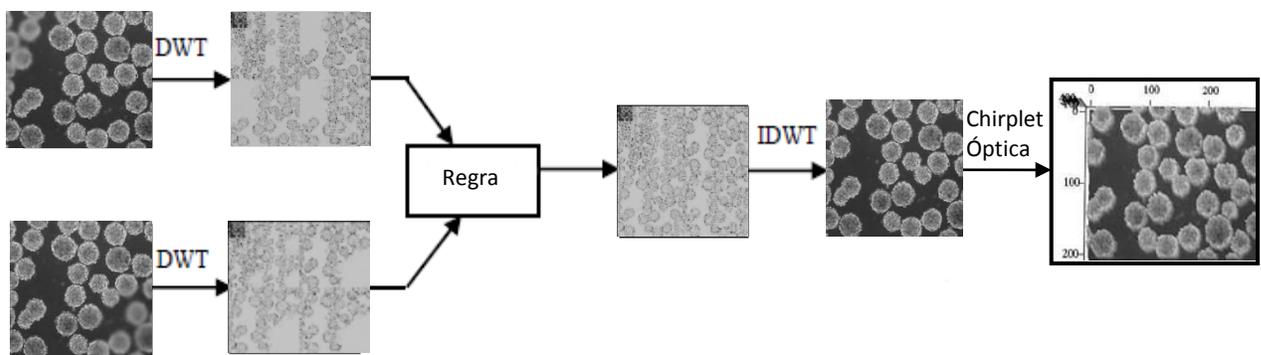


Figura 64. Diagrama mostrando a fusão de imagem com a *cdb6 daublet* na caixa de ferramentas do MatlabTM em conjunto com a aplicação da 2D-ICWT Chirplet Óptica.

5.1.5 Processo iterativo de construção das *Daublet*

À física e matemática Ingrid Daubechies credita-se a criação das wavelets que levaram seu nome. Os coeficientes dos filtros foram calculados através de fatorização espectral de um filtro. A seguir é mostrado um processo de reconstrução de Daublet [6].

Os coeficientes do filtro passa-faixa ou função wavelet *db4* são dados por

$$\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\sqrt{3}) \quad -\frac{1}{4\sqrt{2}}(3-\sqrt{3}) \quad \frac{1}{4\sqrt{2}}(3+\sqrt{3}) \quad -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}) \right]$$

Os coeficientes do filtro passa-baixa ou função de escala *db4* são dados a seguir.

$$\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}) \quad \frac{1}{4\sqrt{2}}(3+\sqrt{3}) \quad \frac{1}{4\sqrt{2}}(3-\sqrt{3}) \quad \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\sqrt{3}) \right]$$

Observe-se que os 04 números não mudam, mas somente a posição e os sinais. A Figura 65 mostra dois gráficos em que se traçaram esses coeficientes.

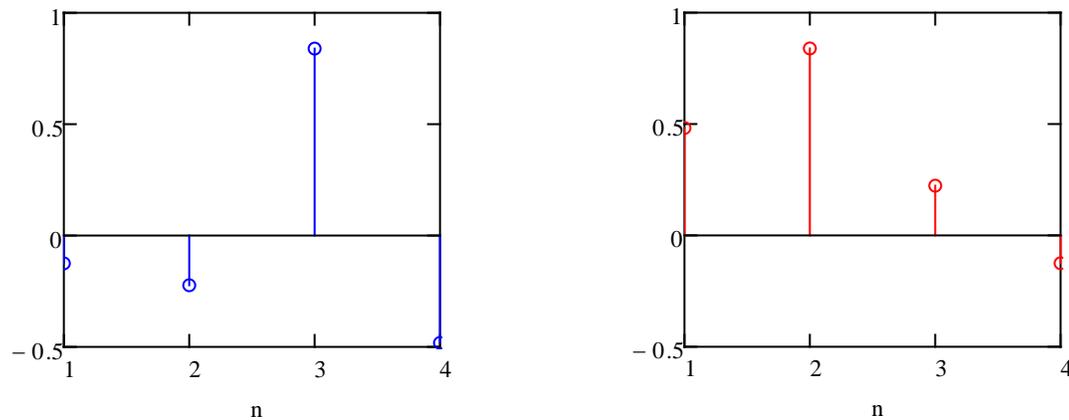


Figura 65. Coeficientes dos filtros da wavelet Daubechies 4 e da função de escala correspondente, respectivamente.

Nos passos seguintes, são efetuados uma série de interpolações e filtragens passa-baixa numa tentativa de reconstruir a wavelet Daubechie db4 (Daublet4). A Figura 66 mostra o filtro básico da Daublet4 interpolado com zeros entre os pontos existentes. O resultado é filtrado pela função de escala db4 de 4 coeficientes, mostrada na Figura 65.

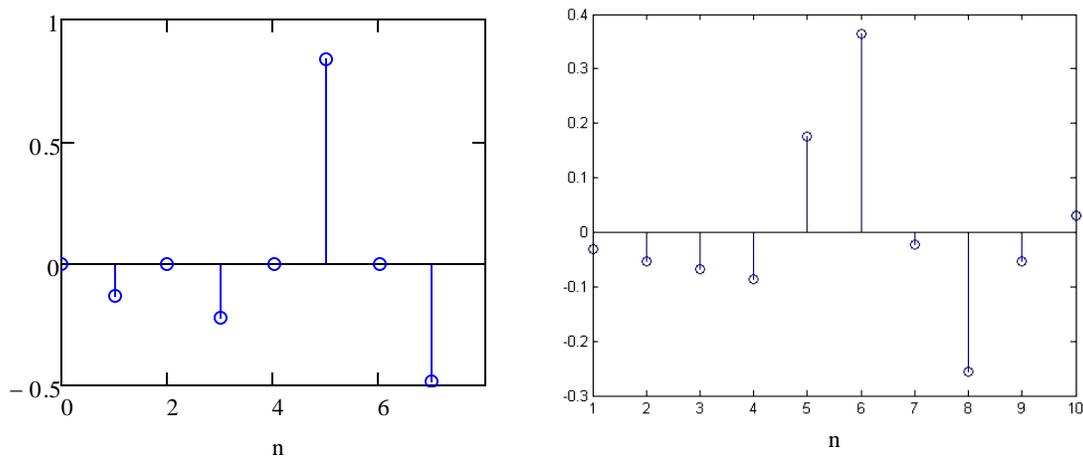
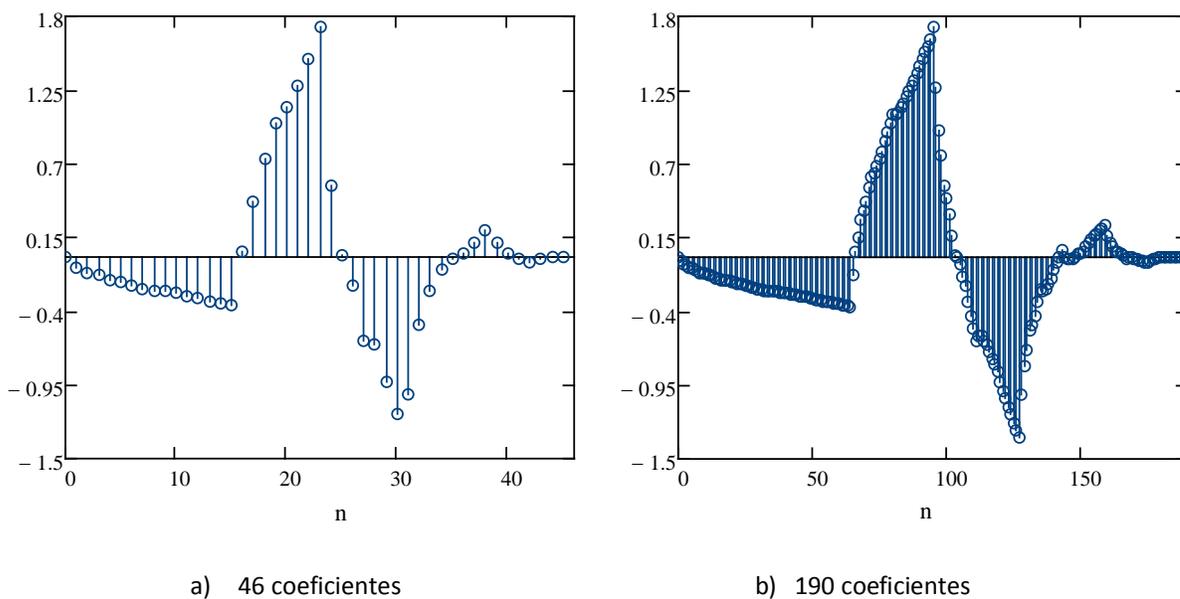


Figura 66. a) Os 4 coeficientes do filtro da wavelet db4 são interpolados (7 coeficientes). b) realizada uma filtragem passa baixa através da função de escala (de 4 coeficientes) para produzir um filtro db4 de 10 coeficientes ($7+4-1=10$).

Continuando-se o processo para produzir filtros wavelets cada vez mais extensos, foram construídos com 46, 94, 190 e 766 coeficientes. Este último estágio é suficiente para estimar uma função contínua. As extensões para 46, 190, e 766 pontos são mostradas, a seguir, na Figura 67.



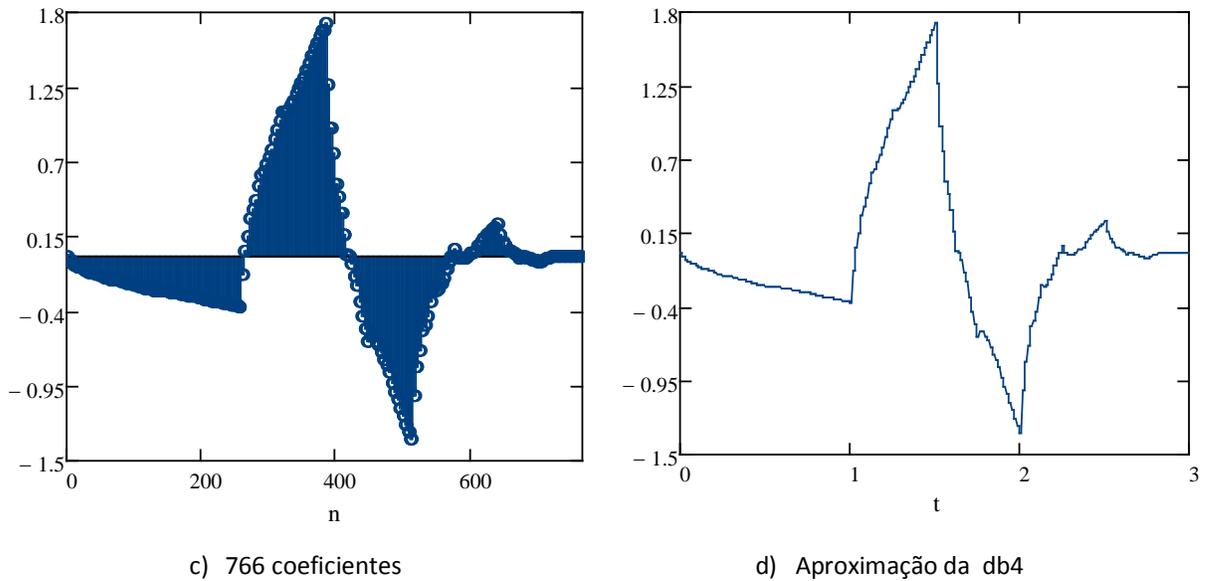


Figura 67. Representação da db4 durante o processo de reconstrução. a) db4 com 46 coeficientes. b) db4 com 190 coeficientes. C) db4 com 766 coeficientes. d) Estimativa de uma função wavelet db4 a partir de 766 pontos, mapeada no intervalo de 0 to 3.

Se forem conectados os 766 pontos, surgirá uma aproximação ou estimativa de uma função wavelet db4 "contínua" construída a partir dos 4 pontos originais. Restando somente mapear os 766 pontos dentro de um intervalo de 0 to 3. A Figura 67d mostra a função nesse intervalo.

A literatura descreve a db4 ou ψ (ψ) como tendo "comprimento" 3 unidades de tempo, iniciando em $t = 0$. Este é o intervalo designado como de suporte compacto da db4. Fora desse intervalo a função wavelet é igual a zero.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Esta Tese apresentou o desenvolvimento de novas wavelets que tem aplicação em áreas da ciência que estão submetidas ao fenômeno da difração óptica.

O Capítulo 3 reapresentou as expressões analíticas de Fresnel, Fraunhofer e de espectro angular do princípio de Huygens para a difração escalar. A partir das *chirplets* e das propriedades de *wavelets* finalizou com a representação da difração escalar na forma da 2D-CWT. Além disso, este capítulo apresentou a transformada de Fourier do núcleo de transformação da nova representação da difração escalar.

O Capítulo 4 apresentou uma nova topologia fotônica para a grade de difração de espectrofotômetros. Associando a nova representação da difração escalar com a nova grade de difração desenvolveu-se a expressão analítica do fenômeno de difração com aberturas nanofotônicas, de espectros independentes.

O Capítulo 5 apresentou o desenvolvimento das expressões analíticas das daublets (wavelets Daubechies) no tempo e seu espectro. Em conjunto com a wavelet *chirplet* óptica foi possível realizar a fusão de imagens na microscopia holográfica e gerar imagens 3D.

6.1 Wavelets Ópticas

A literatura sobre óptica apresenta na teoria da difração escalar, equações bem estabelecidas. Apesar disso, seja no campo próximo ou no campo distante, as equações apresentam-se como integrais de difícil manipulação. Principalmente porque seu núcleo de transformação não é um filtro no espectro de frequência.

E isso tem repercussão direta na difração inversa. Já que em áreas como holografia, tomografia e ultrassonografia a ideia principal é a reconstrução do objeto gerador da difração. Por isso, principalmente na área biomédica, há sérias implicações tecnológicas e de custos na implementação física dos dispositivos ópticos, na tentativa de superar diversas barreiras causadoras de erros e interferências na difração inversa.

Apresentou-se a *wavelet chirplet* óptica, inédita para a análise de ondas 2D que constrói uma ponte entre as equações de ondas esféricas introduzidas em 1678 por Christian Huygens e a 2D-CWT. Inclusive, as wavelets introduzidas atendem aos princípios de ondas e as propriedades de wavelets com o fato notório de possuir um filtro passa-faixa no espectro.

A contribuição dessas novas wavelets é a sensível diminuição de custos, pois são realizadas apenas operações matemáticas nas suas aplicações. Uma visão geral de resultados preliminares experimentais ilustra esse fato. Ao mesmo tempo são eliminados o efeito do termo de ordem zero, obscurecimentos de borda e o termo de imagem gêmea, sem filtros espaciais. Uma das principais contribuições da solução aqui apresentada é que ela pode ser aplicada na análise dinâmica de imagens espécimes biológicos vivos. Principalmente se provenientes de microscopia digital holográfica [105]. Esta análise também pode ser aplicada em estruturas microbiológicas tais como células de câncer e espécimes botânicas.

6.2 Wavelets Cromáticas

Historicamente os espectrofotômetros sempre foram equipamentos de bancada. Primeiramente, devido aos seus componentes robustos elevarem demasiadamente seu peso. E segundo, porque a relação entre o ângulo de incidência do feixe de luz e a grade de difração, no monocromador, exige dimensões elevadas. O lançamento de módulos eletrônicos compactos para implementação de espectrofotômetros resolvem somente em parte a sua portabilidade.

A nova topologia apresentada nesta tese diminui drasticamente as dimensões do monocromador. Os cristais fotônicos foram alinhados de forma similar a uma grade de difração, a uma distância de 15 mm do detector CCD. Uma contribuição notável nas

dimensões de espectrofotômetros ao se considerar as dimensões médias de monocromadores que é de 20 X 20 cm.

A resposta difrativa da nova grade fotônica foi implementada com auxílio das expressões analíticas da 2D-CWT com as wavelets *chirplet* óptica. O diferencial aqui em relação às formulações tradicionais é que cada abertura fotônica transmite em um único comprimento de onda. A contribuição que se destaca aqui é o cálculo da resposta difrativa 2D de grades independente do formato.

Foram apresentados resultados comparativos de um espectrofotômetro convencional, e um com grade de cristais fotônicos. Ainda com o intuito de portabilidade, foram utilizadas fonte de luz com lâmpadas de tungstênio e LED de espectro branco. Os resultados foram similares e ficou claro que quanto mais tiras fotônicas melhor será a resposta.

O componente de maior custo neste espectrofotômetro é a câmera. Câmeras compactas presentes em telefones celulares e laptops têm um custo bastante reduzido; câmeras CMOS modulares podem ser obtidas no varejo por menos de R\$40,00.

Uma contribuição do espectrofotômetro à base de cristais fotônicos é que ele pode ser levado a campo com o uso de baterias, devido sua portabilidade e tamanho compacto. Além disso, reduzirá as leituras falsas devidas a contaminações decorrentes do transporte das amostras.

6.3 Wavelets Holográficas

Este trabalho oferece uma nova leitura de wavelets de suporte compacto, a qual foi implementada através de algoritmo robusto que garante aproximações acima de 99,9 % de precisão. Foram desenvolvidas expressões fechadas no domínio do tempo e da frequência para as wavelets Daubechies. Manteve-se as propriedades das Daubechies tanto na função de escala quanto na wavelet mãe. Portanto, este novo enfoque na família de wavelet Daubechies contribuirá em aplicações onde as expressões analíticas são indispensáveis. Com esse fim, estas wavelets foram implementadas no MatlabTM (*wavelet toolbox*).

Esta nova abordagem de wavelet mostrou-se uma candidata natural para substituir as daublets onde elas têm bom desempenho. Como exemplo, destacamos as wavelets-OFDM (sistemas envolvendo e/ou baseados em wavelets contínuas), mas requerem recursos computacionais adicionais para gerá-las. A contribuição se mostra clara aqui: a redução da complexidade computacional requerida para geração das daublets.

Uma outra área em que as *daublet* tem uso consagrado é a decomposição e a fusão de imagens. A utilização em conjunto das *cdbN* e as wavelets *chirplet* óptica na fusão de imagens apresentou a contribuição de obter imagens holográficas 3D.

6.4 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões para trabalhos futuros relativos aos temas apresentados nesta Tese, podemos indicar:

- Investigação da análise de séries quase harmônicas de Fourier;
- Aplicação e investigação das novas formulações (*daublets* e *chirplet* óptica) em áreas de imagens biomédicas (ultrassonografia e tomografia);
- Projeto e Implementação de grade de difração com topologia OLED para espectrofotômetro na faixa visível;
- Projeto e Implementação de grade de difração com topologia nanofotônica para espectrofotômetro na faixa ultravioleta e infravermelho.
- Investigação e aplicação da CWT em filtragem adaptativa na área financeira;
- Investigação e aplicação da CWT no projeto de antenas a partir do diagrama de irradiação;
- Processo contínuo no desenvolvimento de wavelets (orbitais, topográficas, symlet, coiflet).
- Pedido de patente da grade fotônica e OLED;

REFERÊNCIAS

- [1] M. Nielsen, I. L. Chuang, *Computação Quântica e Informação Quântica*, Book-man, 2005.
- [2] J. C. Hebden, D. A. Boas, J. S. George, “Topics in biomedical optics: introduction”, *Applied Optics*, Vol 42 nº 16, pp. 2869-2870, 2003.
- [3] D. H. Towne, *Wave Phenomena*, New York: Dover 1988.
- [4] H. M. de Oliveira, *Análise de Fourier e Wavelets: Sinais Estacionários e não Estacionários*, 1ª edição, Recife-PE, Editora Universitária da UFPE, 2007.
- [5] R. Navarro, A. Vargas, and J. Campos. “A parallel implementation of the optical Gabor-wavelet transform”, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 1, pp. 116-120, 1999.
- [6] D. L. Fugal, *Conceptual Wavelets in Digital Signal Processing*, Space & Signals Technologies LLC, 2006.
- [7] E. G. Steward, *Fourier Optics*, Mineola, New York: Dover Publications, INC, 2004.
- [8] Y. LI, H. H. Szu, Y. Sheng and H. J. Caufield, “Wavelet Processing and Optics”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 84, nº 5, 1996.
- [9] R. S. C. Cobbold, *Foundations of Biomedical Ultrasound*. Oxford University Press. 2007.
- [10] G. T. Herman, *Fundamentals of computerized tomography: Image reconstruction from projection*, 2nd Ed, Springer, 2009.
- [11] W. L. Stutzman, G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, 3rd Ed., John Wiley & Sons, 2012.
- [12] U. Sahoo, A. K. Seth, R. Chawla, *UV/Visible Spectroscopy – Absorption Spectroscopy*, LAMBERT Academic Publishing, 72 p., 2012.
- [13] M. K. Kim, “Principles and techniques of digital holographic microscopy”, *SPIE Reviews*, Volume 1, 2010.

- [14] S. Annadurai, *Fundamentals Of Digital Image Processing*, Pearson, 440 p.,2007.
- [15] M. O. Freeman, “Wavelet signal representations with important advantages”. *Optics and Photon, News*, 1993.
- [16] Y. Zhang et al., “Optical realization of wavelet transform for a one-dimensional signal,” *Optical Letters*, vol. 17, pp. 210-212, 1992.
- [17] D. Mendlovic and N. Konforti, “Optical realization of the wavelet transform for two-dimensional objects,” *Appl. Opt.*, vol. 32, pp. 6542-6546, 1993.
- [18] V. Ronchi, “L’ottica del P. Francesco Maria Grimaldi.” *Bollettino di geodesia e scienze affini*, , vol. 14, n° 1, pp. 1970-1979, 1955.
- [19] P. Fara, “A microscopic reality tale,” *Nature* 459, pp. 642–644, 2009.
- [20] A. E. Bell, *Christian Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century*, London, Arnold Publisher, pp. 220, 1947.
- [21] T. Young, “Bakerian Lecture: Experiments and calculations relative to physical optics,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 94, pp. 1–16, 1804.
- [22] G. A. Boutry, “Augustin Fresnel: His Time, Life and Work 1788-1827”, *Science Progress* 36, pp. 587-604, 1948.
- [23] M. W. Jackson, *Spectrum of Belief: Joseph von Fraunhofer and the Craft of Precision Optics*, MIT Press, 2000.
- [24] J. C. Maxwell, “A dynamical theory of the electromagnetic field”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155, pp. 459–512, 1865.
- [25] M. Eckert, “Mathematics, experiments, and theoretical physics: the early days of the Sommerfeld school”, *Phys. Perspect.* 1 (3), pp. 238-252, 1999.
- [26] A. Haar, “Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen-Systeme,” *Math. Ann*, 69, pp. 331-371, 1910.
- [27] D. Gabor, (1900-1979). “A new microscopic principle”, *Nature* 280 (5721), pp. 431–433, 1979.
- [28] P. Goupillaud, "Biographies: Jean P. Morlet". *Virtual Geoscience Center. Society of Exploration Geophysicists*, 1997.

- [29] I. Daubechies, “Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets”, *Comm. Pure and Applied Math.*, vol. 41, pp. 909-996, 1988.
- [30] S. Mallat, “A Theory for multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet representation”, *IEEE Trans. Pattern Analysis and machine Intelligence*, vol. 11, n° 7, pp. 674-693, 1989.
- [31] Y. Sheng, D. Roberge, and H. H. Szu, “Optical wavelet transform” *Opt. Eng.* 31, pp. 1840–1845, 1992.
- [32] L. Onural, “Diffraction from a wavelet point of view”, *Opt Lett*, Vol. 18, No. 11, pp. 846-848, 1993.
- [33] H. M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic and L. Onural, “Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms”, *J. Opt. Soc. Am. A*/Vol. 11, No. 2, pp. 547-559, 1994.
- [34] S. Deschenes, Y. Sheng, “Physical wavelets: applications in optics”, *Proc. of SPIE*, Vol. 4738, pp. 371-381, 2002.
- [35] C. Palmer, *Diffraction Grating Handbook*, Spectra-Physics, 204 p., 2002.
- [36] M. Liebling, t. Blu, “Fresnelets: New Multiresolution Wavelet Bases for Digital Holography”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 12, no. 1, pp. 29-43, 2003
- [37] O. K. Ersoy, *Diffraction, Fourier Optics and Imaging*, Wiley InterScience, 1st Ed., New Jersey, USA, pp.65, 2007.
- [38] P. P. Benerjee, T. C. Poon, *Principles of Applied Optics*, Irwin - Boston, 347 p., 1991.
- [39] J. G. Proakis, D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, Pearson-Prentice Hall, 4th Ed., New Jersey, 1084 p., 2007.
- [40] A. D. Poularikas, S. Seely, *Signals and Systems*, Krieger Pub Co, 2nd Ed., Boston, 1994.
- [41] H. E. Hwang, P. Han, “Signal reconstruction algorithm based on a single intensity in the Fresnel domain”, *Optics Express*, Vol. 15, No. 7, pp. 3766-3776, 2007.
- [42] R. Barakat, “Application of the Sampling Theorem to Optical Diffraction Theory”, *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 54, No. 7, pp. 920-930, 1964.

- [43] B. Widrow, S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, 1985.
- [44] J. C. Lee, C. K. Un, "Performance of Transform-Domain LMS Adaptive Digital Filters," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 34, pp. 499-510, 1986.
- [45] S. S. Narayan, A. M. Peterson, and M. J. Narashimha, "Transform domain LMS algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 31, pp. 609-615, 1983.
- [46] B. Widrow, E. Walach, "On the Statistical Efficiency of the LMS Algorithm with Nonstationary Inputs," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 30, pp. 211-221, 1984.
- [47] M. Karrakchou, M. Kunt, "New Structures for Multirate Adaptive Filtering: Application to Interference Canceling in Biomedical Engineering," *presented at Engineering Advances: New Opportunities for Biomedical Engineers, Proc. of the 16th Annual International Conference of the IEEE*, 1994.
- [48] U. Iyer, M. Mayeri, H. Ochi, "IIR Subband Adaptive Filtering," *presented at The 36th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 1993.
- [49] M. J. T. Smith, T. P. Barnwell, "Exact Reconstruction for Tree-Structured Subband Coders," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 34, pp. 434-441, 1988.
- [50] J. J. Shynk, "Frequency-Domain and Multirate Adaptive Filtering," in *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 9, pp. 14-37, 1992.
- [51] S. Hosur, A. H. Tewfik, , "Wavelet Transform Domain LMS Algorithm," ICASSP-93, Minneapolis, 1993.
- [52] N. Erdol, F. Basbug, "Performance of Wavelet Transform Based Adaptive Filters," ICASSP-93, Minneapolis, Minnesota, USA, 1993.
- [53] M. I. Doroslovacki, H. Fan, "Wavelet-Based Linear System Modeling and Adaptive Filtering," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, pp. 1156-1167, 1999.
- [54] C. Torrence, G. P. Compo, "A Practical Guide to Wavelet Analysis," *Bulletin of the American Meteorological Society*, Vol. 79, No. 1, pp. 61-78, 1998.

- [55] J. E. W. Moreira, V. E. Vermehren, H. M. de Oliveira, “Adaptive Filter Design for Stock Market Prediction Using a Correlation-based Criterion”, XLIII SBPO, p. 5, 2011.
- [56] P. Ghorbanian, A. Ghaffari, A. Jalali, C. Nataraj, “Heart Arrhythmia detection Using Continuous Wavelet Transform and Principal Component Analysis with Neural Network Classifier”, Villanova University, PA, USA, K.N.Toosi University of Technology, Tehran, Iran, p. 4, 2010.
- [57] G. D’Elia, “Fault detection in rotating machines by vibration signal processing techniques”, Doctoral thesis, Università degli Studi di Bologna, p.113, 2008.
- [58] X. Wang et al, “On the Method of Detecting the Discontinuity of Seismic Data via 3D wavelet transform”, IEEE-IGARSS, pp. 3945-3947, 2010.
- [59] J. A. Woiselle, J. J. L. Starck, “3D Curvelet Transforms and Astronomical Data Restoration”, *Appl. Comput. Harmon. Analysis*, Vol. 28, pp. 171–188, 2010.
- [60] A. A. Lonkar, R. K. Sirivastava, “Crack Detection in Structure Using Wavelet Transform and Higher Order Differentiated Mode Shapes”, *MIT International Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 1, No. 1, pp. 26-34, 2011.
- [61] M. Farge, G. Pellegrino, K. Schneider, “Coherent Vortex Extraction in 3D Turbulent Flows Using Orthogonal Wavelets”, *Physical Review Letters*, Vol. 87, No. 5, 2001.
- [62] R. C. Gonzalez, R. E. Woods, *Processamento Digital de Imagens*, Ed. Edgard Blucher, 3ª Ed., São Paulo, pp. 218-291, 2007.
- [63] P. S. Addison, “Wavelet Transforms and the ECG: a Review”, *Physiological Measurement*, Vol. 26: pp. 155-199, 2005.
- [64] H. M. de Oliveira, *Análise de Sinais para Engenheiros: Uma Abordagem via Wavelets*, Editora Brasport, Rio de Janeiro, p. 250, 2007.
- [65] E. Hecht, *Óptica*, Fundação Calouste Gulbenkian, 2ª edição, pp. 696-714, 2002.
- [66] S. D. Mellin, G. P. Nordin, “Limits of Scalar Diffraction Theory and an Iterative Angular Spectrum Algorithm for Finite Aperture Diffractive Optical Element Design”, *Optics Express*, Vol. 8, No. 13, pp. 705-722, 18 June, 2001.

- [67] O. K. Ersoy, *Diffraction, Fourier Optics and Imaging*, Wiley Inter-Science, USA, 413p., 2007.
- [68] W. C. Elmore, M. A. Heald, *Physics of Waves*, Dover Ed., 494 p., 1985.
- [69] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw Hill, 457 p., 2004.
- [70] J. C. Webster, *Medical Instrumentation: Application and Design*, NY, Wiley & Sons, 1998.
- [71] V. Lamoglia, “Espectrofotômetro acadêmico”, Centro Universitário Positivo, Monografia de TCC, Curitiba, 103p., 2005.
- [72] D. B. Gordon, *Spectroscopic Techniques, in Principles and Techniques in Practical Biochemistry*. K. Wilson & J. Walker Eds., *Cambridge University Press, Cambridge*, pp. 324-344, 1995.
- [73] Analytik Jena Group, “Fundamentals, Instrumentation and Techniques of UV VIS Spectroscopy”, Germany, pp. 26-34, 2009.
- [74] K. R. Spring, T. J. Fellers, M. W. Davison, “Fundamentals of Digital Imaging - Introduction to Charge-Coupled Devices (CCDs)”, Nikon Microscopy, pp. 1-11, 2013.
- [75] U. Schnars, W. Jueptner, *Digital Holography*, Springer, Germany, 165 p., 2005.
- [76] N. H. Farhat, “Advances in Holography”, Marcel Dekker, New York, 1975.
- [77] G. W. Stroke, “An Introduction to Coherent Optics and Holography”, Academic Press, New York, 1975.
- [78] D. Gabor, “A new microscopic principle”, *Nature*, 161, pp. 777-778, 1948.
- [79] E. N. Leith, J. Upatnieks, “Reconstructed wavefronts and communication theory,” *J. Opt. Soc. Am.* 52, pp. 1123–1130, 1962.
- [80] U. Schnars, W. Jüptner, *Digital Holography*, Springer, 2004.
- [81] U. Schnars, W. Jüptner, “Direct recording of holograms by a CCD target and numerical reconstruction”, *Appl. Opt.* 33, 179–181, 1994.
- [82] E. CuChe, P. Marquet, and C. Depeursinge, “Simultaneous amplitude-contrast and quantitative phase-contrast microscopy by numerical reconstruction of Fresnel off-axis holograms,” *Appl. Opt.* 38, 6994–7001, 1999.

- [83] B. Kemper, D. Carl, A. Höink, G. von Bally, I. Bredebusch, J. Schnekenburger, “Modular digital holographic microscopy system for marker-free quantitative phase contrast imaging of living cells,” *Proc. SPIE*, Vol. 6191, pp. 1116-1127, 2007.
- [84] M. Liebling, T. Blu, M. Unser, “Complex wave retrieval from a single off-axis hologram”, *J. Opt. Soc. Am. A* 21, pp. 367 – 377, 2004.
- [85] B. Kemper, D. Carl, J. Schnekenburger, I. Bredebusch, M. Schäfer, W. Domschke, G.von Bally, “Investigations on living pancreas tumor cells by digital holographic Microscopy”, *J. Biomed. Opt.* 11, A52-A61, 2006.
- [86] G. Pedrini, P. Froning, H. Fessler, and H. J. Tiziani, “In-line digital holographic interferometry,” *Applied Optics* 37, pp. 6262–6269, 1998.
- [87] G. Liu and P. D. Scott, "Phase retrieval and twin-image elimination for in-line Fresnel holograms," *J. Opt. Soc. Am. A* 4, pp. 159-165, 1987.
- [88] L. B. Lesem, P.M. Hirsch, and J.A. Jordan, "Computer synthesis of holograms for 3-D display". *Jr. Commun. (ACM)* 11, pp. 661–674, 1968.
- [89] U. Schnars, T. M. Kreis, and W. P. O. Jueptner, “Digital recording and numerical reconstruction of holograms: Reduction of the spatial frequency spectrum” *Opt. Eng.* 35, pp. 977–982, 1996.
- [90] A. Boggess, F.J. Narcowich. *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, Prentice-Hall, NJ, 283 p., 2002.
- [91] M.C.S. Burrus, R.A. Gopinath, H. Guo, *Introduction to Wavelets and the Wavelet Transform*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1998.
- [92] S. Mallat, W.L. Hwang, “Singularity Detection and Processing with Wavelets,” *IEEE Transaction on Information Theory*, vol.38, No.2, pp. 617-643, 1992.
- [93] G. Shabtay, D. Mendlovic, Z. Zalevsky, “Optical Implementation of the Continuous Wavelet Transform”, *App Opt.*, Vol. 37, No. 14, pp. 2964-2966, 1998.
- [94] S. Nicola et al, “Infrared Holography for Wavefront Reconstruction and Interferometric Metrology”, *Advanced Holography-Metrology and Imaging*, pp. 167-171, 2011.

- [95] S. Mann, S. Haykin, “The adaptive chirplet: An adaptive wavelet like transform”, *Adaptive Signal Processing*, SPIE vol. 1565, pp. 402-413, 1991.
- [96] H. P. Hsu, “Fourier Analysis”, Simon & Schuster Tech Outlines N.Y., USA, 1970.
- [97] J. Antoine and al, “Two-Dimensional Wavelets and Their Relatives,” Cambridge U. press, 2004.
- [98] P. S. Addison, *The Illustrated Wavelet Handbook: Introductory Theory and Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance*. Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 2002.
- [99] C. B. Lefebvre, S. Coetmellec, D. lebrun, C. Ozkul, “Application of wavelet transform to hologram analysis: three-dimensional location of particles”, *Optical and lasers in Eng.* 33, pp. 409-421, 2000.
- [100] M. Young, E. Lebed, “Real-time high-speed volumetric imaging using compressive sampling optical coherence tomography”, *Biomedical Optics Express*, Vol. 2, n° 9, pp. 2690-2697, 2011.
- [101] R. Congo, M. Cherkaoui, “A Combined Dual-Tree Complex Wavelet (DT-CWT) and Bivariate Shrinkage for Ultrasound Medical Images Despeckling”, *International Journal of Computer Applications*, Volume 49, n° 14, pp. 32-49, 2012.
- [102] M. D. Santos, A. D. Neto, J. P. Silva, W. Mata, “New Antenna Modelling Using Wavelets for Heavy Oil Thermal Recovery”, *PIERS Proceedings*, Xi'an, China, pp. 558-562, 2010.
- [103] N. Kingsbury, “The dual_tree complex wavelet transform: A new efficient tool for image Restoration and enhancement”, Signal Processing Group Dept. of Engineering Univ. of Cambridge, UK, 1998.
- [104] J. G. Sucerquia at al, “Digital in-line Holographic Microscopy”, *Applied Optics*, vol. 45, n° 5, pp. 836-850, 2006.
- [105] B. Kemper, G. Bally, “Digital holographic microscopy for live cell applications and technical inspection”, *Applied Optics*, vol. 47, n° 4, pp. A52-A61, 2008.
- [106] R. F. Wolffenbuttel, “State-of-the-Art in Integrated Optical Microspectrometers” , *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 53, No.1, pp. 197–202, 2004.

- [107] I. Avrutsky, K. Chaganti, I. Salakhutdinov, G. Auner, “Concept of a miniature optical spectrometer using integrated optical and micro-optical components”, *App. Opt.*, vol. 45, No. 30, pp. 7811-7817, 2006.
- [108] UVOIR Spectroscopy, Univ. of Virginia, “ASTR 511/O’Connell”, Lec 8, 2009.
- [109] B. J. Berg, T. J. Boes, M. A. Cargill, P. S. Rood, “Portable spectrometer,” US Patent Number 5369481, 1994.
- [110] M. L. Adams, M. Enzelberger, S. Quake, A. Scherer, “Microfluidic integration on detector array for absorption and fluorescence microspectrometers”, *Sens. Actuat. A. Phys.*, vol.104, pp. 25–31, 2003.
- [111] S. Grabarnik, A. Emadi, E. Sokolova, G. Vdovin, “Optimal implementation of a microspectrometer based on a single flat diffraction grating”, *App. Opt.*, vol. 47, No. 12, pp. 2082-2090, 2008.
- [112] D. Sander, O. Blume, J. Mueller, “Microspectrometer with slab-waveguide transmission gratings”, *App Opt*, vol. 35, No. 21, pp. 4096-4101, 1996.
- [113] B. Momeni, E. S. Hosseini, A. Adibi, “Planar photonic crystal microspectrometers in silicon-nitride for the visible range”, *Opt. Express*, vol. 17, pp. 17060–17069, 2009.
- [114] D. R. Webster, “Spectrophotometer with light source in the form of a LED array”, *US Patent Number 5477322, Free Patent Online*, 1995.
- [115] N. Pervez, et al, “Photonic Crystal Spectrometer”, *Opt. Exp.*, vol. 18, n° 8, pp. 8277-8255, 2010.
- [116] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade, *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*, 2nd Ed., Princeton Univ. Press, Princeton, 2008.
- [117] K. Ishihara, M. Fujita, I. Matsubara, T. Asana, S. Noda, “Direct fabrication of photonic crystal on glass substrate by nanoimprint lithography”, *J. Appl. Phys.*, vol. 45, pp. L210–L212, 2006.
- [118] M. Rattier, H. Benisty, E. Schwoob, C. Weisbuch, T. F. Krauss, C. J. M. Smith, R. Houdre, U. Oesterle, “Omnidirectional and compact guided light extraction from Archimedean photonic lattices”, *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 83, pp. 1283–1285, 2003.

- [119] M. Boroditsky, T. F. Krauss, R. Coccioli, R. Vrijen, R. Bhat, E. Yablonovitch, “Light extraction from optically pumped light-emitting diode by thin-slab photonic crystals,” *Applied Physics Letters*, Vol. 75, pp. 1036–1038, 1999.
- [120] K. D. Moller, *Optics*, Springer, NJ, 2nd. Ed., 453 p., 2002.
- [121] E. Hecht, *Optics*, McGrawHill, 2nd Ed., 242 p., 2004
- [122] *Philips Lumileds Lighting Company*, “Technical Datasheet DS51 L XK2-PW12-R00”, pp. 5, 2011.
- [123] OSRAM minicatalog, “Halogens, HALOSTAR”, sec. 2.14, 2010.
- [124] Sparkfun Electronics-Light/Imaging
<http://www.sparkfun.com/commerce/categories.php?c=102>, pp. 1, 2011. Acesso: em fev.2011.
- [125] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Courant Institute, 2nd Ed., New York University, 1999.
- [126] J. Slavič, I. Simonoski, M. Boltežar, “Damping Identification using Continuous Wavelet Transform: Application to Real Data,” *Journal of Sound and Vibration*, vol.262, N.2, pp. 291-307, 2003.
- [127] Z. Chik, T. Islam, S. A. Rosyidi, H. Sanusi, M. R. Taha, M. M. Mustafa, “Comparing the Performance of Fourier Decomposition and Wavelet Decomposition for Seismic Signal Analysis,” *European Journal of Scientific Research*, vol.32 N.3 pp.314-328, 2009.
- [128] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, J. M. Poggi, *Wavelet Toolbox™ 4 User’s Guide*, The MathWork Inc., MA, 2008.
- [129] H. M. de Oliveira, T. H. Falk, R. G. F. Távora, “Decomposição Wavelet sobre Corpos Finitos”, *Revista da Soc. Bras. de Telecomunicações*, Campinas, SP, vol. 17, pp. 38 – 47, 2002.
- [130] S. W. Lee, B. H. Nam, “A Review of Wavelets for Digital Wireless Communication”, *Wireless Personal Communications*, vol. 37, pp. 387–420, 2006.

- [131] H. M. de Oliveira, H. A. N. Silva, E. A. Bouton, “Wavelet Shift-Keying: A New Digital Modulation”, Proc. of the XX Simpósio Bras. de Telecomunicações, Rio de Janeiro, pp. 1-4, 2003.
- [132] H. M. de Oliveira, and E. A. Bouton, “Multiresolution Division Multiplex (MRDM): A New Wavelet-based Multiplex System,” VI Intern. Telecomm. Symp. (ITS2006), Fortaleza, Brazil, pp. 161-165, 2006.
- [133] B. P. Lathi, and Z. Ding, “Modern Digital and Analog Communication Systems”, 4th Ed., Oxford University press, USA, 1004 p., 2009.
- [134] G. A. A. Araújo, H. M. de Oliveira, “A Wavelet Modulation Theorem for Bandlimited Signals”, XXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Blumenau, Brazil, pp. 1-6, 2009.
- [135] F. Zhao, H. Zhang, D. Yuan, “Performance of COFDM with different orthogonal Basis on AWGN and frequency Selective Channel,” in Proc. of IEEE International Symposium on Emerging Technologies, Shanghai, China, pp. 473-475, 2004.
- [136] Rainmaker Technologies Inc., "RM Wavelet Based PHY Proposal for 802.16.3", Acesso: maio.10, http://www.ieee802.org/16/tg3/contrib/802163c-01_12.pdf
- [137] M. Oltean, “Wavelet OFDM Performance in Flat Fading Channels”, *Transactions on Electronics and Communications*, vol.2, pp. 52-66, 2007.
- [138] D. Gupta et al., “Performance Analysis of DFT-OFDM, DCT-OFDM, and DWT-OFDM Systems in AWGN Channel”, *Fourth Int. Conf. on Wireless and Mobile Communications*, Athens, Greece, pp. 214-216, 2008.
- [139] M. N. Do, M. Veterli, “Wavelet-Based Texture Retrieval Using Generalized Gaussian Density and Kullback–Leibler Distance”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 11, no. 2, pp. 146-158, 2002.
- [140] G. Pajares, J. M. de la Cruz, “A wavelet-based image fusion tutorial”, *Journal of the Pattern Recognition*, vol. 37, pp. 1855 – 1872, 2004.

TRABALHOS DESENVOLVIDOS COM
APLICAÇÕES WAVELETS, DURANTE O
TRANSCORRER DA ELABORAÇÃO DA TESE
QUE FORAM SUBMETIDOS E ACEITOS EM
PERIÓDICOS.

Aplicação da 2D-CWT Potencializada em Imagens Topográficas no Mapeamento de Áreas de Risco de Deslizamento na Região Serrana - RJ

Victor Vermehren Valenzuela, Rafael Dueire Lins, Helio Magalhães de Oliveira

1. INTRODUÇÃO

O deslizamento de terra é um fenômeno provocado pelo escorregamento de materiais sólidos, como solos, rochas, vegetação e/ou material de construção ao longo de terrenos inclinados, denominados de encostas. Ocorre em áreas de relevo acidentado, da qual foi retirada a cobertura vegetal original que é responsável pela consistência do solo e que impede, através das raízes, o escoamento das águas. O deslizamento de terra se difere dos processos erosivos pela quantidade de massa transportada a uma grande velocidade. Esses fenômenos naturais e/ou antrópicos, causam problemas imediatos para a população, independente de sua condição social, e também para o meio ambiente.

O Brasil, pelo fato de ter predominância de clima tropical, possui grandes índices pluviométricos no verão, que corresponde ao período chuvoso, com isso as encostas naturalmente são locais de risco ao deslizamento de terra. É notório que os deslizamentos em encostas e morros urbanos vêm ocorrendo com uma frequência alarmante nestes últimos anos, devido ao crescimento desordenado das cidades, com a ocupação de novas áreas de risco, principalmente pela população mais carente. Muitas cidades, em sua expansão, avançam para terrenos topograficamente mais inclinados e geologicamente instáveis. É o caso da ocupação de vertentes de morros ou de

obras efetuadas em áreas extremamente suscetíveis as intempéries intensas ou solos fragilizados.

Diante desses fatos a criação de um inventário detalhado com mapeamento de áreas de risco de deslizamentos é o primeiro passo para implementação de políticas públicas de ocupação urbana [1]. Métodos tradicionais de mapeamento de encostas incluem digitalização de mapas topográficos para contornos irregulares e regulares, interpretação de fotografias aéreas, e observação direta no campo de aspectos da morfologia das encostas [2]. Contudo, cada um desses métodos tem limitações que podem gerar erros e comprometer a precisão do mapa resultante. Essas limitações são a resolução, vegetação, terreno acidentado, pessoas diferente desenhando o mapa, falta de padrões espaciais e temporais [3].

Atualmente tem aumentado a demanda de modelos de mapeamento terrestres de alta resolução produzidos através de medidas com transporte aéreo. Apesar de o laser não ser uma tecnologia nova, sua utilização na aquisição de dados geográficos é relativamente recente. Seu uso em sistemas LiDAR (Light Detection And Ranging) vem demonstrando uma excelente capacidade para a aquisição de uma grande quantidade de informações, em pequeno intervalo de tempo. É uma tecnologia de sensoriamento remoto com o objetivo de medir a distância de um alvo ou objeto de interesse, usando pulsos a laser. Ele pode ser utilizado no levantamento de dados para a elaboração de modelos terrestres digitais (DTM) e modelos de elevação digitais (DEM) em que os métodos tradicionais não eram suficientes, principalmente em áreas de difícil acesso [4].

Wavelets tem ultimamente tido prolíferas aplicações em diversas áreas do conhecimento, especialmente na Física e Engenharia. Tanto a Transformadas Contínua e Discreta de Wavelet (CWT and DWT, respectivamente) tem emergido como uma ferramenta definitiva de análise em processamento de sinais e tem provado ser superior em muitas situações à clássica análise de Fourier. A análise de Wavelet pela sua habilidade em examinar o sinal simultaneamente no tempo e frequência tem gerado uma série de sofisticados métodos baseados em wavelets, e dentre eles aqueles que estudam a morfologia de superfície dos mares [5] e da terra [6]. Neste último, apesar de ter normalizado a energia dos terrenos, a wavelet utilizada careceu de normalização de energia para maior precisão nos resultados. Neste trabalho, pretende-se aplicar transformada contínua de wavelet (CWT) com a wavelet normalizada para extrair os aspectos topográficos de encostas de dados topográficos de alta resolução através das

variações de potência espectral dentro de faixas de frequência espaciais específicas e comparadas com a transformada de Fourier [7-8].

A área selecionada, devido ao seu histórico, foi a região serrana do Rio de Janeiro, as quais possuem disponíveis inventários de mapas de alta resolução DEM, obtidos por LiDAR em [9]. Também existem sites com detalhamento dessa região compilados independentemente. Fig. 1 mostra o mapa das áreas de estudo.



Figura 1. Mapa de alta resolução DEM da Região Serrana – RJ - obtida com LiDAR, Banco de Dados do INPE, área 22S435 [9].

2. APLICATIVO DE SOMBREAMENTO E A TRANSFORMADA CONTÍNUA DE WAVELETS BIDIMENSIONAL POTENCIALIZADA

A aplicação do processamento digital de imagens, neste estudo, está dividida em duas partes. Primeiro, aplicação da transformada contínua de wavelet bidimensional (2D CWT) para quantificar as expressões topográficas de encostas profundas e geologicamente instáveis e com isso mapear suas localizações em nossas áreas de estudo. A 2D CWT transforma dados espaciais em posição de frequência-espço, fornecendo informações a respeito de como a amplitude é distribuída sobre frequência espacial em cada posição nos dados. Devido a transformada 2D DFT do domínio espacial para o frequencial também fornecer informações consolidadas de como a amplitude da

superfície topográfica é distribuída sobre um espectro de frequências será usada como referência para comparação dos resultados [10].

A outra técnica aplicada é o de sombreamento de encostas [11], cujo objetivo é melhorar a resolução de visualização melhorando grandemente a percepção de uma superfície para análise ou exibição gráfica. O fundamento deste processamento é de aplicar o gradiente não ponderado entre pontos vizinhos da imagem (neste caso, um mapeamento topográfico). O resultado é uma coleção de vetores apontando na direção de valores crescentes da função F (valores altimétricos). A equação de gradiente usada em funções embutidas (do MatLabTM [12], por exemplo) é

$$\nabla F = \frac{\delta F}{\delta x} \hat{i} + \frac{\delta F}{\delta y} \hat{j}. \quad (1)$$

Esta informação é aplicada a uma função que obtém a iluminação hipotética da superfície pela determinação de valores de iluminação para cada célula de uma matriz. Isso é feito através da criação de uma posição para a fonte de luz hipotética e calculando os valores de iluminação de cada célula em relação às células vizinhas seguindo parâmetros de altitude e azimuth escolhidos. A função de sombreamento (h) é dada a seguir.

$$h = 255.((\cos(\text{zenith}).\cos(\text{slope})) + \sin(\text{zenith}).\sin(\text{slope}).\cos(\text{azimute}))) \quad (2)$$

O mapa de alta resolução DEM da região de estudo com azimuth 235° e altitude 45° é mostrado na Fig. 2.

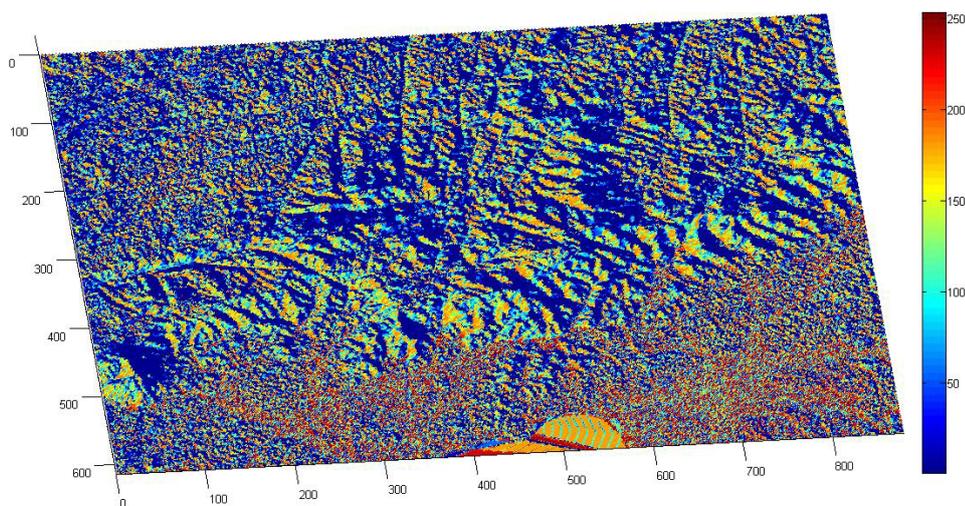


Fig. 2. Região serrana do Rio de Janeiro com aplicação do algoritmo de sombreamento.

A equação da 2D CWT de um sinal contínuo, $g(x,y)$, com relação a função wavelet é definida como [13]

$$CWT(a,b,s) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \psi_{abs}^*(x,y) dx dy, \quad (3)$$

em que ψ representa a família de *wavelets* com parâmetro de escala s e localização (a, b) . A 2D-CWT é a convolução de g e ψ , e assim os coeficientes da transformada $CWT(a,b,s)$ fornecem uma medida do grau de correlação entre a wavelet ψ e os dados de g em cada ponto. Quando s é grande, ψ está dispersa e leva em conta as características de comprimento de onda de g ; quando s é pequeno, ψ é mais bem localizada no espaço e consegue uma melhor correlação com os contornos de g .

A 2D CWT também pode ser estimada dentro de um espectro de potência calculando sua variância sobre pontos $N_a \times N_b$ de cada função de escala de wavelet [13]:

$$\sigma_{CWT}^2(s) = \frac{1}{2N_a N_b} \iint |CWT(a,b,s)|^2 dadb. \quad (4)$$

A Equação (4), similar ao espectro de potência de Fourier, fornece uma medida geral de como a amplitude de aspectos topográficos muda com a frequência em todo o conjunto de dados. Contudo, uma wavelet como o da Figura 3, de uma dada escala analisa tipicamente um passa-faixa de frequências centrada em uma frequência principal. Por outro lado, a transformada DFT analisa separadamente cada frequência. Isto tem o efeito de suavizar os picos no espectro de potência wavelet se comparado a seu similar DFT [14].

Nas análises feitas, devido sua forma se assemelhar aos contornos da topografia, foi usada a wavelet 2D Chapéu Mexicano, cujas expressões analíticas são dadas nas equações a seguir (domínio do tempo e frequência). Observe-se que para garantir que as transformadas wavelet, Equação (3), em cada escala s sejam diretamente comparáveis entre si e para transformações de outras séries temporais, a wavelet 2D Chapéu Mexicano foi normalizada para ter energia unitária:

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2.507} (2 - x^2 - y^2) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad \text{e} \quad \Psi(u,v) = \frac{2}{\sqrt{3} \sqrt[4]{\pi}} \sqrt{32\pi^2} (u^2 + v^2)^{\frac{5}{2}} e^{-2\pi(u^2+v^2)} \quad (5)$$

A seguir na Figura 3, estão ilustrados os gráficos no domínio do tempo e da frequência da wavelet 2D Chapéu Mexicano normalizada ($E = \sigma^2 = s = 1$).

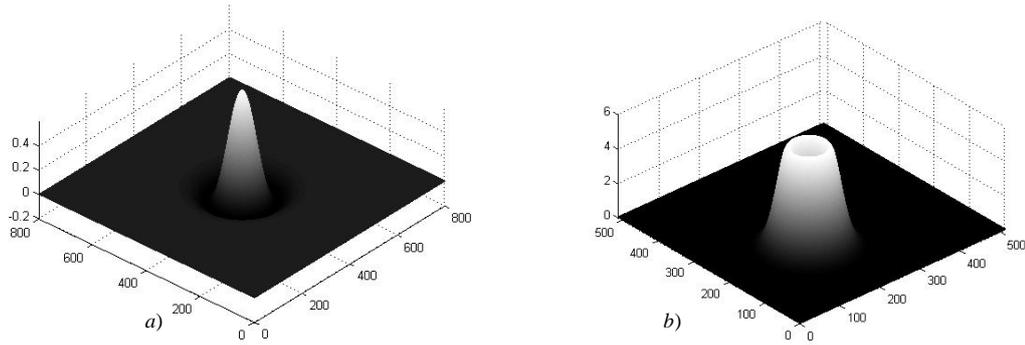


Fig. 3. (a) Wavelet 2D Chapéu Mexicano (tempo/espaco), e (b) sua transformada de Fourier (frequência).

O chapéu mexicano é obtido através da derivada segunda de uma função Gaussiana e tem comprimento de onda de $2\pi s / \sqrt{5/2}$ vezes o espaçamento de grade [15]. Realizando a convolução da wavelet 2D mexicana com os dados topográficos mapeia-se valores de amplitude e comprimentos de onda específicos, incluindo aspectos característicos de encostas.

A análise de Fourier bidimensional de imagens topográficas fornece informação quantitativa a respeito de amplitude, orientação, e contorno de informações periódicas sobre uma faixa de frequências espaciais [10]. A 2D DFT de um conjunto de dados $f(x,y)$ com nós $M \times N$ uniformemente espaçados e seu respectivo espectro de potência estimado através do periodograma da DFT [16]

$$F(k,l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) e^{-j2\pi(\frac{k}{M}m + \frac{l}{N}n)} \quad \text{e} \quad p_{DFT} = \frac{1}{M^2 N^2} |F(k,l)|^2 \quad (6)$$

Considerando mapeamento de deslizamentos, o periodograma fornece uma medida de amplitude das características topográficas dentro de um DEM, em orientações e comprimento de onda específicos.

3. RESULTADOS

3.1. Altimetria através da potência espectral

Na área de estudo para determinar o comprimento de onda característico de encostas profundas, primeiro selecionaram-se pequenas áreas representativas de terrenos acidentados e terrenos sem falhas (planos). Na região serrana - RJ, utilizou-se a porção a noroeste de Petrópolis com claras montanhas e encostas e a oeste do Rio de Janeiro por apresentar uma região praiana mais plana (Figuras 4a e b).

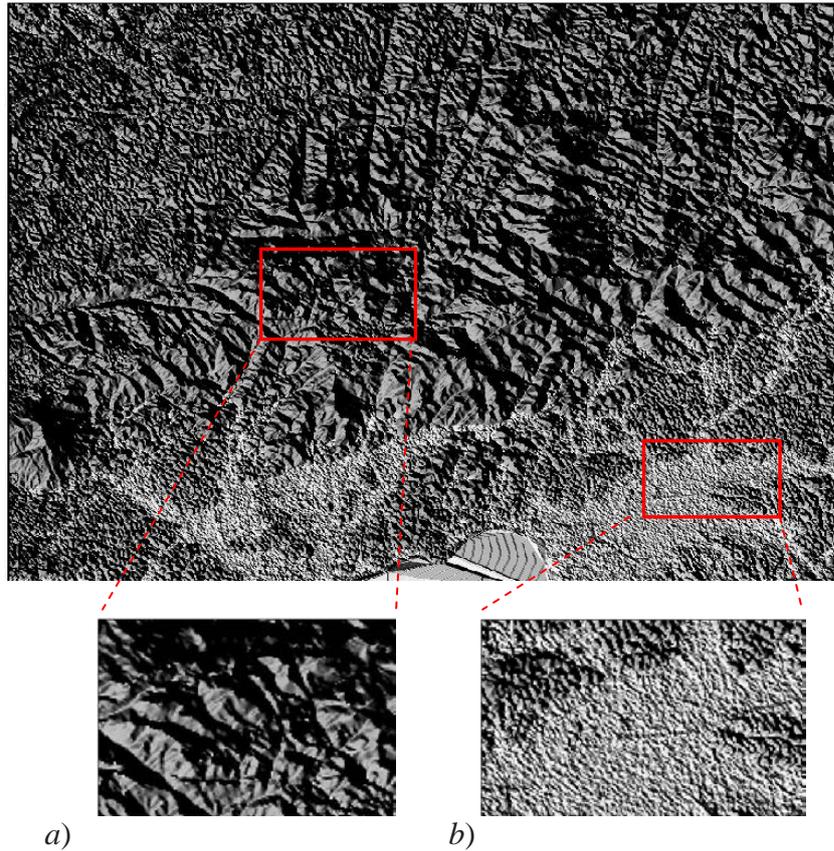


Figura 4. Mapa DEM-LiDAR + sombreamento. (a) porções de encostas montanhosas e (b) terreno relativamente plano.

A seguir, foram gerados os espectros de potência CWT e de referência Fourier de cada área de terreno usando Equações (4) e (6). O próximo procedimento foi normalizar o espectro dessas encostas por seu correspondente espectro em terras estáveis com o objetivo de destacar mais claramente as bandas de frequências sobre as quais encostas profundas tendem a concentrar energia espectral. Os dois espectros normalizados produzem picos bem definidos que indicam o comprimento de onda característico de encostas com riscos de deslizamentos em substratos similares. Os picos do espectro indicam um comprimento de onda de ~ 2222 m para a área serrana do RJ, com diferença desprezível na posição dos picos entre os espectros CWT e de Fourier (Figuras 5a e 5b).

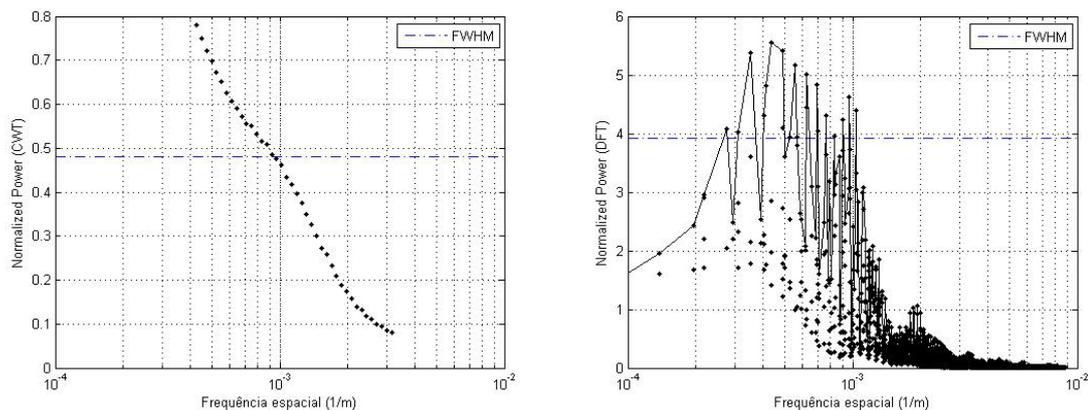


Figura 5. Energia Espectral indicando as bandas de frequência características da área de estudo. (a) na potência espectral CWT e (b) no espectro de potência Fourier.

Devido os traços das encostas na área de estudo estarem contidos em uma faixa de comprimentos de onda, como observado na Figura 5, tomou-se a largura à meia altura (FWHM) de cada pico como uma medida simples de espalhamento do espectro e usou-se a banda característica de frequências espaciais obtidas nos gráficos. Na Região Serrana do Rio de Janeiro, os espectros de Fourier e CWT indicam faixas de frequências de ~ 0.00029 a 0.001 m^{-1} e ~ 0.00045 a 0.0001 m^{-1} , respectivamente. Ou seja, no espectro de Fourier comprimentos de onda de ~ 1000 a 3333 m e espectro CWT comprimentos de onda de ~ 1000 a 2222 m . A FWHM é mais larga no espectro Fourier normalizado por causa do cruzamento das curvas do espectro de potência dos terrenos de alta declividade e os estáveis. Extraíndo em Google EarthTM as altitudes máximas na região verificou-se que o maior valor é de 2105 m . Portanto, a 2D CWT obteve maior precisão (desvio de $5,5\%$).

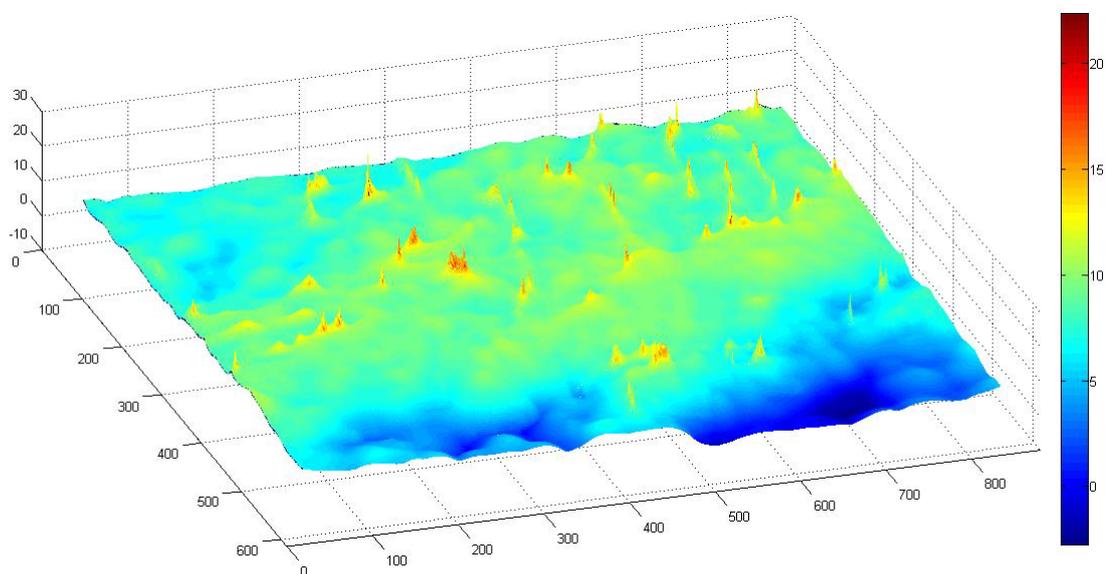
3.2. Mapeamento das áreas de risco

A fim de mapear terrenos com características indicativas de risco, analisaram-se padrões espaciais de potência espectral contidos nas faixas de frequências determinadas a partir da Figura 5 usando as transformadas da Seção 2.

Devido a análise wavelet preservar informações sobre escala e posição, a Equação (1) foi implementada diretamente para mapear padrões espaciais de potência espectral com a 2D-CWT. O algoritmo primeiro calcula um coeficiente wavelet em cada ponto do DEM para cada escala wavelet especificada. Em seguida, faz a soma quadrática dos coeficientes wavelet calculados em cada ponto e exibe o resultado no gráfico. Um ponto

com um alto valor indica uma característica topográfica de deslizamento de terra profundo naquela área.

As matrizes produzidas pela aplicação dos algoritmos 2D CWT e 2D DFT para as áreas de estudo destacam claramente variações de potência espectral contidos em comprimentos de onda característico de encostas em toda a área de terreno (Figs. 6a e b). As somas de potência espectral variam em magnitude na ordem de potências de 10 em cada área de estudo, refletindo uma variação considerável na topografia. Áreas analisadas que são suaves em toda a gama de frequências espaciais (Fig. 5) tem potência espectral baixa, enquanto que as áreas que são dobras de escarpas tem potência espectral alta sobre esta banda de frequência. Estas áreas de potência espectral alta tendem a coincidir com mapeamentos de encostas com riscos de deslizamentos de terra, verificando inclusive que a soma espectral de potência pode delinear terreno de deslizamento de terra. Devido o aprimoramento na wavelet da transformada (energia unitária no tempo e no espectro) tornou os picos menos dispersos mesmo quando aplicada a variância na transformada CWT (com o objetivo de evitar o efeito de borda). Resultados anteriores acarretavam muitas vezes a fusão de morros.



a) 2D-FFT

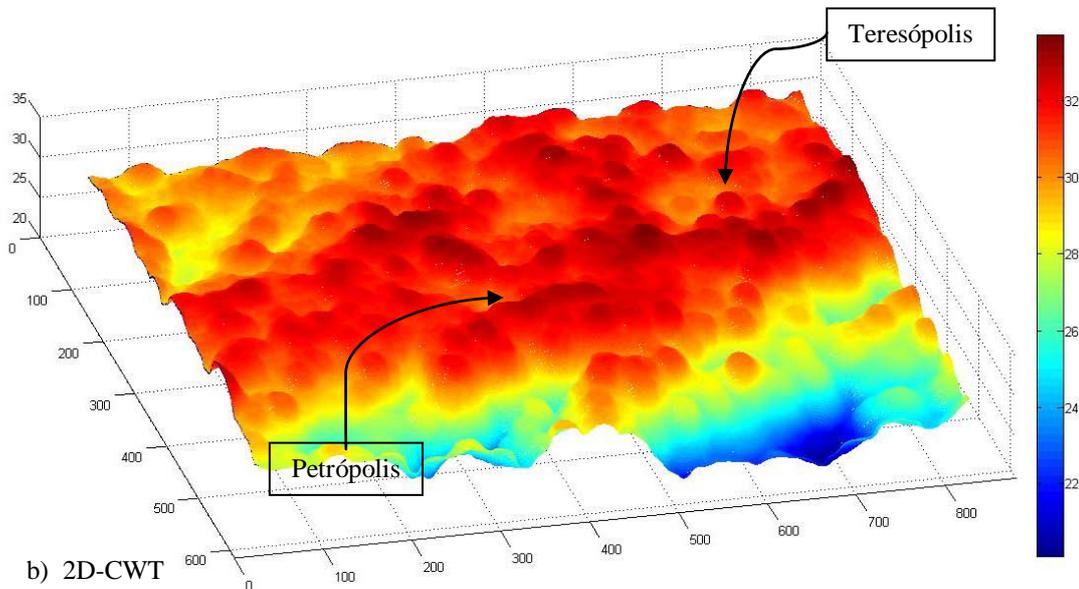


Figura 8. Somas de Potência Espectral de (a) 2D DFT e (b) 2D CWT da área de estudo. Cores acima do vermelho (vinho escuro) indicam sinais intensos de terrenos topográficos com encostas profundas. Cores na direção do azul indicam terrenos mais estáveis e planos ou quando é azul intenso normalmente é o mar ou rios.

Pode ser observado, numa comparação entre os terrenos naturais das região e os de detecção de áreas de encostas profundas com riscos de deslizamento, que a 2D CWT apresentou melhor sinalização das escarpas das encostas. A 2D DFT ressaltou apenas pequenos pontos nas áreas de escarpas da encosta, mas isto tem a vantagem de tornar o resultado menos disperso. Não é o caso aqui, mas testes [6] em regiões em que o terreno com alta declividade se aproxima do terreno estável os resultados foram semelhantes entre os dois algoritmos. Isto deve-se ao fato analítico que a faixa de comprimentos de onda nesta situação torna-se mais estreita.

Nas áreas de estudo, aspectos topográficos com características pontiagudas tendem a ser classificadas erradamente como encostas com elevados risco de deslizamento inclusive como a área noroeste da região serrana. Estes picos produzem elevada energia espectral na análise de Fourier devido serem necessários grandes amplitudes de senos e cossenos para capturar mudanças bruscas de dados analisados. Em outras palavras, qualquer janela na análise que contém uma brusca mudança de altitude tem, portanto, uma soma de energia espectral anormalmente alta. Análise Wavelet com a wavelet chapéu mexicano também tende a destacar arestas por causa de sua inclinação elevada.

4. CONCLUSÕES

Mapas com inventário de áreas de risco fornecem informações valiosas para cientistas e na tomada de decisões políticas, mas a sua criação continua a ser uma tarefa demorada e subjetiva. A crescente disponibilidade de DEMs de alta resolução provenientes de LiDAR oferece novas oportunidades para melhorar a eficiência e objetividade de mapear padrões espaciais e temporais de encostas instáveis. Entretanto, poucos estudos até agora têm explorado LiDAR derivados DEM para investigar deslizamentos em resoluções na escala de metros ao invés de faixas de terrenos na faixa de quilômetros.

As duas técnicas de processamento digital de imagens, sombreamento e 2D CWT, podem ser usadas para quantificar as características morfológicas utilizando dados topográficos de alta resolução, e mapear como estas características variam espacialmente. Espectros de potência produzida por 2D Fourier e análise 2D de wavelet definem os comprimentos de onda característicos de áreas de deslizamento de terra nas áreas de estudo. A soma de Potência espectral sobre uma banda de comprimentos de onda específico fornece uma medida da intensidade da característica topográfica com riscos de deslizamento em qualquer ponto no conjunto de dados centenas de quilômetros quadrados.

A 2D CWT aplicada em terrenos de grande diferença de altitude entre os terrenos de alta declividade e terrenos planos obteve maior precisão no mapeamento altimétrico da região.

Como trabalho futuro pode-se sugerir a comparação dos resultados deste trabalho com mapas da mesma região em que forem feitas análises subjetivas e independentes das áreas de risco (que infelizmente atualmente inexistem nos centros de geração de mapas DEM) de forma a tabular a precisão e os desvios entre si. Claro, sem destacar que este algoritmo pode ser aplicado em outras regiões do Brasil.

REFERÊNCIAS

- [1] A. R. Filho, A. T. C. Cortez, “A problemática sócio-ambiental da ocupação urbana em áreas de risco de deslizamento da Suíça Brasileira”, Revista Brasileira de Geografia Física, vol. 03, pp. 33-40, 2010.

- [2] T. G. Florenzano, (Org.), “Métodos e Modelos de Previsão de Movimentos de Massa”, São Paulo, Oficina de Textos, 2008.
- [3] M. Parise, “Landslide Mapping Techniques and Their Use in the Assessment of the Landslide Hazard”, *Phys. Chem. Earth (C)*, Vol. 26, No. 9, pp. 697-703, 2001.
- [4] Marcos et al., “LiDAR: Princípios e aplicações florestais”, *Pesquisa florestal brasileira*, Colombo, vol. 30, No. 63, pp. 231-244, 2010.
- [5] A. Chamoli, “Wavelet Analysis of Geophysical Time Series”, *e-Journal Earth Science*, India, Vol.2 (IV), pp. 258 – 275, 2009.
- [6] A. M. Booth, J. J. Roering, J. T. Perron, “Automated landslide mapping using spectral analysis and high-resolution topographic data: Puget Sound lowlands, Washington, and Portland Hills, Oregon”, *Geomorphology*, vol. 109, pp. 132–147, 2009.
- [7] W. C. Lang, K. Forinash, “Time-frequency analysis with the continuous wavelet transform”, *Am. J. Phys.* Vol. 66, No. 9, 1998.
- [8] L. F. Kirby, “Which wavelet best reproduces the Fourier power spectrum?”, *Computers & Geosciences*, vol. 31, pp. 846–864, 2005.
- [9] TOPODATA/INPE – Banco de Dados Geomorfométricos do Brasil. Acessado em outubro de 2012. <http://www.dsr.inpe.br/topodata/acesso.php>.
- [10] J. T. Perron, J. W. Kirchner, W. E. Dietrich, “Spectral signatures of characteristic spatial scales and nonfractal structure in landscapes”, *Journal of Geophysical Research*, vol. 113, pp. 1-14, 2008.
- [11] P. A. Burrough, R. A. McDonell, “Principles of Geographical Information Systems”, Oxford University Press, New York, p. 190, 1998.
- [12] B. Tanenbaum, *Image Processing Toolbox™ 4 User’s Guide*, The MathWork Inc., MA, 2012.
- [13] P. S. Addison, *The Illustrated Wavelet Handbook: Introductory Theory and Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance*, Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 2002.
- [14] G. Strang, “Wavelet transforms versus Fourier transforms”, *Bulletin of the American Meteorological Society*, vol. 8, No. 2, pp. 288–305, 1993.

- [15] C. Torrence, G. P. Compo, “A practical guide to wavelet analysis”, *Bulletin of the American Meteorological Society*, vol. 79, No. 1, pp. 61–78, 1998.
- [16] J. G. Proakis, D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing, Principles, Algorithms and applications*, Fourth Edition, Pearson, 2007.

Wavelets Orbitais: novas wavelets multidimensionais para decomposição de imagens escaláveis

H.M. de Oliveira, V. Vermehren V., R.J.S. Cintra

Resumo — Wavelets estão intimamente relacionadas com funções de onda de Schrödinger e a interpretação de Born. Similar à aparência de orbital atômico, propõe-se combinar wavelets antissimétricas em "wavelets orbitais." Uma abordagem direta permite o aumento da dimensão das wavelets através deste processo. São introduzidas novas wavelets 2D para a decomposição de imagens, mostrando que é possível realizar uma análise simultânea em duas escalas diferentes. É mostrado um exemplo de tal análise de imagem. O resultado é generalizado para gerar novas wavelets de dimensão ND, $N \geq 3$, pelo determinante de Slater.

Palavras chave — wavelets 2D, wavelets antissimétricas indistinguíveis, análise de imagens, wavelets ortogonais, férmions.

I. INTRODUÇÃO

A decomposição wavelet de imagens é uma das mais poderosas ferramentas usadas atualmente, permitindo a separação e a análise multiresolução [1, 27]. Processamento de imagens baseado em wavelets é uma abordagem rotineira e largamente adotada [7, 9, 13, 14], mesmo para 3D [15]. Há uma abundância de aplicações de wavelet em computação gráfica [41], incluindo radiossidade, iluminação global [20], dados reais de volume [34], e renderização de volume [40]. A transformada de wavelet codificada [3, 5, 12, 21] surgiu como uma ferramenta prática e totalmente estabelecida. Para mais detalhes de decomposição de imagens, ver [1, 7, 16]. Esta abordagem é particularmente útil na compressão de imagens, tal como no padrão JPEG 2000 [11, 12, 37], ou em esquemas

multimedia na Internet, especialmente para *streaming* sobre IP [2, 6] e consulta de imagens [22]. No entanto, a codificação escalável universal de imagem, áudio e vídeo é certamente a vantagem mais atraente oferecida por wavelet em sistemas multimídia modernos [2, 3, 5, 8, 23].

Há uma estreita ligação, mas não totalmente explorada entre a mecânica quântica e wavelets. Neste trabalho, será lançada uma luz sobre algumas dessas relações. Ao invés de procurar em características wavelet em partículas ou ondas, tomou-se "emprestado" algumas das descrições bem estabelecidas da mecânica quântica para induzir uma nova decomposição wavelet para imagens. Aqui, adotou-se o símbolo “:=” para denotar “igual por definição”. *Det* é o determinante de uma matriz. O trabalho está organizado da seguinte forma. Inicialmente, introduz-se na Seção II a motivação para construir estas wavelets, com inspiração na "Física de Partículas" [10, 17]. Na Seção II, introduz-se também a construção de wavelets orbitais para a decomposição de imagens, partindo de uma wavelet mãe simples. Mostra-se que esta construção na verdade gera wavelets bidimensionais. Apresenta-se uma aplicação simples na Seção IV, ilustrando o processo e comparando-o com a decomposição wavelet padrão para imagens. A Seção V apresenta uma extensão para o caso 3D e para dimensões maiores. Por fim, na Seção VI são apresentadas as considerações finais.

II. MOTIVAÇÃO DECORRENTE DA FÍSICA DE PARTÍCULAS

Em imagens, O “modus operandi” habitual é combinar wavelets-1D para chegar em 2D [9, 13]. Isto pode ser feito considerando-se uma função de escala φ e uma função wavelet ψ [26, 27], uma função para cada dimensão, abscissa e ordinada.

$V \setminus H$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
$\varphi(y)$	$\varphi(x) \cdot \varphi(y)$	$\varphi(y) \cdot \psi(x)$
$\psi(y)$	$\psi(y) \cdot \varphi(x)$	$\psi(x) \cdot \psi(y)$

Isto é equivalente à análise pela matriz:

$$\begin{vmatrix} LL & HL \\ LH & HH \end{vmatrix}, \quad (1)$$

em que L (H, respectivamente) representam frequências para Passa baixa (Passa alta, respectivamente) [32]. As combinações LL e HH exibem naturalmente uma simetria (par): $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(y) \cdot \varphi(x)$, idem para $\psi(x) \cdot \psi(y) = \psi(y) \cdot \psi(x)$. Agora, as combinações de $\varphi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ resultam em duas diferentes análises não comutativas, ou seja, $\varphi(x) \cdot \psi(y)$ e

$\varphi(y) \cdot \psi(x)$. A combinação de $\varphi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ resulta em assimetria (simetria ímpar), e a troca das coordenadas $x \leftrightarrow y$ apenas muda a direção de observação. A onda combinada $\varphi_{-}\psi$ deve ser tal que:

$$\varphi_{-}\psi(x,y) = -\varphi_{-}\psi(y,x). \quad (2)$$

A proposta, então, é definir uma combinação orbital entre φ e ψ pela seguinte função de onda:

$$\varphi_{-}\psi(x,y) := \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)], \quad (3)$$

ao invés de meramente $\varphi(x) \cdot \psi(y)$ (LH) ou $\varphi(x) \cdot \psi(y)$ (HL). Deve notar-se que ela mantém a Equação (2). A fim de visualizar a diferença de forma entre as funções de análise 2D correspondentes a LH, HL e L_H (H_L), considere-se o caso simples da wavelet ortogonal de Meyer [42]. A Figura 1 mostra o esboço 2D dessas funções.

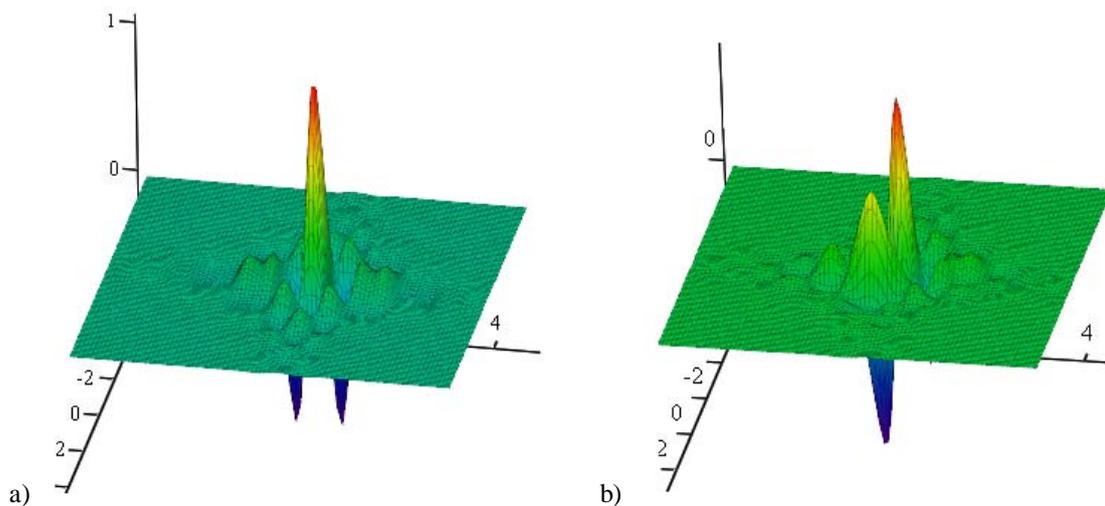


Figura 1. Funções de decomposição 2D-Meyer da diagonal secundária: a) $\varphi(x)\psi(y)$; b) $\varphi_{-}\psi_{Mey}(x,y)$.

A Figura 2 mostra uma aplicação da decomposição usando a 2D-wavelet orbital com a imagen padrão *woman* comparada com a decomposição clássica. Foi usado como exemplo a wavelet *sym4* [43]. Isto foi facilmente realizado por meio de aplicativo no MatlabTM [29].

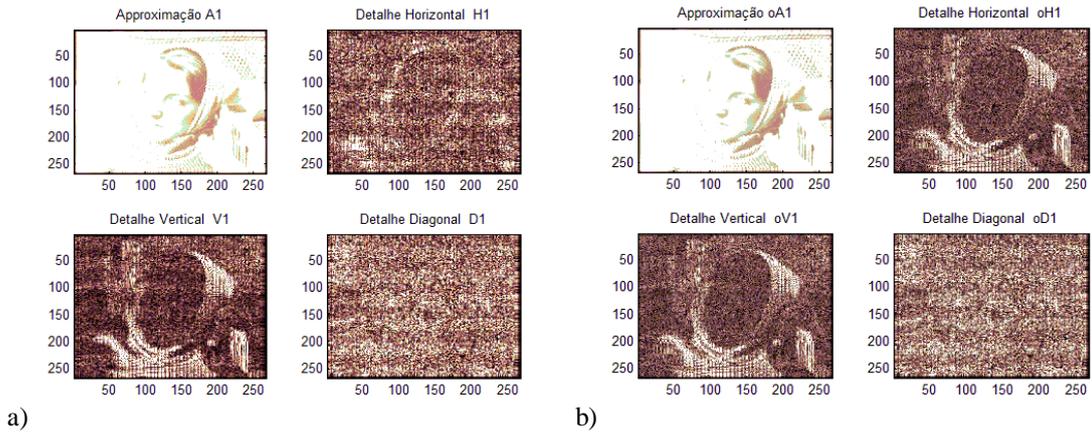


Figura 2. Decomposição em primeiro nível da imagem *woman* usando a wavelet symlet *sym4*: a) usando a decomposição wavelet padrão (MatlabTM); b) Usando a 2D-wavelet orbital.

Vale a pena destacar que a subtração das imagens LH - HL resulta exatamente na foto da decomposição orbital, bem como seu negativo, na diagonal secundária da matriz de decomposição da Equação (1).

III. NOVA WAVELET-ORBITAL PARA IMAGENS

As funções de onda que descrevem orbital eletrônico podem ser combinadas gerando "orbitais atômicos". O "equivalente" no âmbito de ondulações, caracterizado também por funções de onda, seria a combinação de diferentes wavelets espaciais [25]. No caso das partículas é geralmente assumido a combinação de partículas de anti-simétricas sem interação [10]. A combinação dos estados α e β não deve depender em qual das partículas (1 ou 2) está um dos estados particulares. Isto é chamado de "degeneração de troca". Isto corresponde à densidade de probabilidade de duas partículas, estando uma no estado alfa e a outra no estado beta, não se sabendo o estado particular. Há duas maneiras de conseguir isso [44]:

$$\psi_S := \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\alpha}) \quad \text{e} \quad \psi_A := \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\alpha\beta} - \psi_{\beta\alpha}). \quad (4)$$

Esta ideia pode ser usada na decomposição da Equação (1). ψ_S é empregado na diagonal principal e ψ_A na diagonal secundária. Curiosamente, empregando a combinação da diagonal principal simétrica resulta em

$$LL = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi^*(x)\phi(y) + \phi^*(y)\phi(x)], \quad (5a)$$

e

$$HH = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi^*(x)\psi(y) + \psi^*(y)\psi(x)]. \quad (5b)$$

Esta definição permite, em particular, analisar imagens usando *continuous complex wavelets* (veja também [35]). No caso de wavelets reais, a simplificação retorna a $\varphi(x) \cdot \varphi(y)$ ou $\psi(x) \cdot \psi(y)$.

No caso das ondas ψ_α e ψ_β com $\psi_\alpha \neq \psi_\beta$ (assimétrica), o novo estado ψ_A corresponde a combinação descrita pela seguinte equação matriz:

$$\psi_A := \det \begin{pmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) \\ \psi_\beta(1) & \psi_\beta(2) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Claramente, a escolha $\alpha = \beta$ degenera a matriz, assim $\psi_A = 0$. *Como propor um modelo de análise baseado numa única wavelet? Como trabalhar em diferentes escalas vertical e horizontal?* A proposta inicial de "combinação" de duas wavelets foi adotado para análise de imagens (2D), considerando a mesma wavelet mãe ortogonal, mas em diferentes escalas de multiresolução. As duas wavelets são $\psi_{a_1,b}(\cdot)$ e $\psi_{a_2,b}(\cdot)$, e a abordagem para análise simultânea em duas escalas diferentes corresponde estabelece o seguinte:

Considere-se uma wavelet mãe 1D ortogonal $\psi(t)$ [18, 19, 25], acompanhada de suas wavelets filhas $\{\psi_{a,b}(t)\}_{a \neq 0, b \in \mathbb{R}}$

Definição 1. A função 2D-orbital nas escalas $\{a_1, a_2\}$ é definida por:

$$\psi_A(x, y) := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \det \begin{pmatrix} \psi_{a_1,b}^*(x) & \psi_{a_1,b}^*(y) \\ \psi_{a_2,b}(x) & \psi_{a_2,b}(y) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

que pode ser reescrita por:

$$\psi_A(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2|a_1| \cdot |a_2|}} \cdot \left[\psi^*\left(\frac{x-b}{a_1}\right) \cdot \psi\left(\frac{y-b}{a_2}\right) - \psi\left(\frac{x-b}{a_2}\right) \cdot \psi^*\left(\frac{y-b}{a_1}\right) \right], \quad (8)$$

A condição $a_1 \neq a_2$ elimina a degradação em $\psi_A = 0$ (Isto está, sob determinada ótica, em conexão com o Princípio de Exclusão de Pauli). Além disso, a relação $\psi_A(y, x) = -\psi_A(x, y)$ assegura a assimetria desejada. Aqui, usou-se a mesma wavelet mãe, mas em escalas diferentes. Será visto que os requisitos de ortogonalidade correspondem ao "dual", sem a interação de partículas. Se as wavelets são ortogonais em quaisquer duas escalas, pode-se realizar a decomposição de uma imagem "simultaneamente" em ambas as escalas. A decomposição 2D atendida na definição 1 resulta em uma estrita 2D-wavelet.

Hipótese 1. Se as wavelets $\{\psi_{a,b}(t)\}$ são ortogonais, então o produto interno $\langle \psi_{a_1,b}, \psi_{a_2,b} \rangle = 0$, e as seguintes integrais se cancelam, $\forall a_1 \neq a_2$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a_1,b}(t) \cdot \psi_{a_2,b}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a_1,b}^*(t) \cdot \psi_{a_2,b}(t) dt = 0 \quad (9)$$

Também é digno de nota que

$$\langle \psi_{a_1,b}, \psi_{a_2,b} \rangle^* = \langle \psi_{a_2,b}, \psi_{a_1,b} \rangle. \quad (10)$$

Proposição 1 (comportamento oscilatório). A função 2D-orbital previamente definido tem características de comportamento oscilatório, isto é,

- i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_A(x, y) dx = 0$,
- ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_A(x, y) dy = 0$,
- iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_A(x, y) dx dy = 0$.

Prova. Daqui resulta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_A(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{\psi_{a_2,b}(y) \cdot \psi_{a_1,b}^*(x)} - \overline{\psi_{a_2,b}(x) \cdot \psi_{a_1,b}^*(y)} \right), \quad (11)$$

em que

$$\overline{\psi_{a,b}(x)} := \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}(x) dx. \quad (12)$$

Portanto, *i* resulta do fato de que $\psi_{a,b}(x)$, $a = \{a_1, a_2\}$ sejam wavelets individuais. A demonstração de *ii* é similar, considerando que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_A(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{\psi_{a_2,b}(y) \cdot \psi_{a_1,b}^*(x)} - \overline{\psi_{a_2,b}(x) \cdot \psi_{a_1,b}^*(y)} \right). \quad (13)$$

Agora a condição de $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_A(x, y) dx dy = 0$ segue do teorema de Fubini [28], independente da ordem de integração.

Proposição 2. As funções 2D-orbital possuem energia normalizada.

Prova. Calculando $|\psi_A|^2 = \psi_A(x, y) \cdot \psi_A^*(x, y)$, chega-se a,

$$|\psi_A|^2 = \frac{1}{2} \left\{ |\psi_{a_1,b}(x)|^2 |\psi_{a_2,b}(y)|^2 + |\psi_{a_1,b}(y)|^2 |\psi_{a_2,b}(x)|^2 \right\} \quad (14)$$

e, portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_A(x, y)|^2 dx dy = 1. \quad (15)$$

A notice analyzing the cross-product terms:

$$cross(x, y) := -\psi_{a_1,b}(x) \cdot \psi_{a_2,b}^*(y) \cdot \psi_{a_2,b}(y) \cdot \psi_{a_1,b}^*(x) \quad (16)$$

E seu complexo conjugado. Integrando em x e y :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} cross(x, y)dx &= -2.\psi_{a_2, b}^*(y).\psi_{a_1, b}(y).\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{a_1, b}^*(x).\psi_{a_2, b}(x)dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} cross(x, y)dy &= -2.\psi_{a_2, b}^*(x).\psi_{a_1, b}(x).\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{a_1, b}^*(y).\psi_{a_2, b}(y)dy\end{aligned}\quad (17)$$

Se, hipoteticamente, $\psi_{a_1, b}(t) \perp \psi_{a_2, b}(t)$, então todos os termos cruzados são nulos, concluindo a prova. É possível (mais facilmente) combinar 1D-wavelets ortogonais e usá-las para construir uma nova 2D-wavelet.

Proposição 3. A função 2D-orbital é uma 2D wavelet.

Prova. Partindo de $\psi(t) \leftrightarrow \Psi(w)$ e o fato de a condição de admissibilidade se mantém [27],

$c_\psi := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(w)|^2}{|w|} dw < \infty$, e da mesma forma para suas wavelet filhas $\psi_{a, b}(t) \leftrightarrow \Psi_{a, b}(w)$ resulta

em $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi_{a, b}(w)|^2}{|w|} dw < \infty$, desde que $\Psi_{a, b}(w) = \sqrt{|a|} |\Psi(aw)|.e^{-jwb}$ [26]. Seja agora avaliar a

condição para o caso 2D. Se o par da Transformada de Fourier $\psi_A(x, y) \leftrightarrow \Psi_A(u, v)$ existe, o espectro 2D de ψ_A pode ser calculado em termos do espectro 1D de ψ :

$$\Psi_A(u, v) = \frac{\sqrt{|a_1 a_2|}}{\sqrt{2}} \cdot \{\Psi(a_1 u) \Psi^*(a_2 v) - \Psi(a_2 u) \Psi^*(a_1 v)\} \quad (18)$$

A partir do teorema generalizado de energia Parseval-Plancherel [28, 26], os termos cruzados são nulos devido à ortogonalidade, e

$$|\Psi_A(u, v)|^2 = \frac{|a_1 a_2|}{2} \cdot \{|\Psi(a_1 u)|^2 |\Psi(a_2 v)|^2 + |\Psi(a_2 u)|^2 |\Psi(a_1 v)|^2\} \quad (19)$$

Seja

$$c_{\psi_A} := \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi_A(u, v)|^2}{|u| \cdot |v|} dudv, \quad (20)$$

a prova de que $c_{\psi_A} < +\infty$ vem diretamente da condição de admissão marginal das 1D wavelets filhas.

IV. IMPLEMENTANDO A DECOMPOSIÇÃO DE IMAGENS

Aumentando o grau de liberdade na análise de sinais / imagens invariavelmente torna a ferramenta mais potente. A passagem “Fourier \rightarrow wavelet \rightarrow wavelet packets” proporciona um avanço. Este artigo propõe uma análise extensiva que permite uma decomposição mais ampla (uma extensão) do que a decomposição de imagens padrão. Por uma questão de simplicidade, considere-se uma decomposição de imagem em dois

níveis $\{L_1, H_1, L_2, H_2\}$. A decomposição padrão é mostrada na Figura 3, enquanto que a decomposição orbital é mostrado na Figura 4.



Figura 3. Esquema clássico de decomposição de imagem de acordo com o padrão 2D wavelet. Decomposição em dois níveis: a) primeiro nível. b) segundo nível.

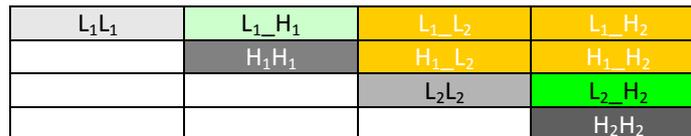
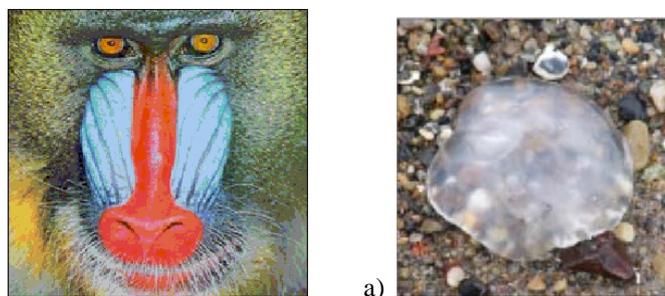


Figura 4. Esquema de decomposição de imagem de acordo com a decomposição 2D wavelet orbital, em dois níveis.

Verifique-se que todos os termos L_1L_1 , L_2L_2 , H_1H_1 e H_2H_2 na diagonal principal correspondem a uma parte da decomposição wavelet padrão da imagem em dois níveis. Como para os termos como $L_1_H_1$ e $L_2_H_2$ estão associados com a diagonal secundária da decomposição comum de wavelet. Cada sombreado diagonal tem um correspondente na decomposição clássica. No entanto, há decomposições "cruzadas" entre as duas escalas. Uma interpretação interessante pode ser pensada ajustando somente no caso de imagens aproximadas (imagens suaves). Além de L_1L_1 (primeiro nível de decomposição) e L_2L_2 (segundo nível), neste estágio há uma decomposição "intermediária" $L_1_L_2$ entre os dois anteriores! A Figura 5 mostra apenas as três aproximações das imagens *mandrill/jelly fish* em diferentes níveis. A wavelet selecionada foi a wavelet Haar.



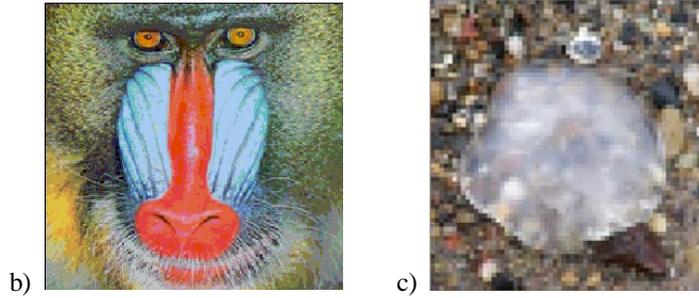


Figura 5. Sucessivas aproximações de imagens para a decomposição com a wavelet Haar. a) Nível 1; b) Nível 1_2; c) Nível 2. Imagens padrões: *mandrill/jelly fish*.

V. EXTENSÃO PARA O CASO MULTIDIMENSIONAL: AS ND-WAVELETS ORBITAIS

Para a extensão dos resultados no caso 3D (ou dimensões ainda maiores), pode-se considerar a seguinte definição inspirada no "determinante de Slater" [36, http://en.wikipedia.org/wiki/Slater_determinant], o qual é utilizado para sistemas anti-simétricos de várias partículas isoladas (estado fermiônico).

Definição 2. A função de 3D-orbital em três escalas distintas $\{a_1, a_2, a_3\}$ está definido de acordo com:

$$\psi_A(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{3!}} \cdot \det \begin{pmatrix} \psi_{a_1,b}^*(x) & \psi_{a_1,b}^*(y) & \psi_{a_1,b}^*(z) \\ \psi_{a_2,b}^*(x) & \psi_{a_2,b}^*(y) & \psi_{a_2,b}^*(z) \\ \psi_{a_3,b}^*(x) & \psi_{a_3,b}^*(y) & \psi_{a_3,b}^*(z) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

O caso geral segue as mesmas linhas. Mais uma vez, garantir a ortogonalidade da wavelet 1D escolhido como o ponto de partida é uma instrução essencial.

VI. CONCLUSÕES FINAIS

Este artigo oferece uma abordagem original e mais geral para a decomposição de imagem engendrada por wavelets ortogonais assimétricas. Isto permite mais espaço, algo semelhante com a extensão de wavelet para pacotes wavelet. Apesar de o foco estar essencialmente em imagem estática, esta abordagem permite uma decomposição multimídia totalmente escalável. Resta ainda ser investigado o potencial desta abordagem na compressão de imagem [21], no processamento 3D e na codificação escalável para sistemas multimídia [3]. Aplicações em outros cenários, como marca d'água com base em wavelet [31] ou esteganografia [30], também merecem uma investigação. Como trabalho pioneiro na troca de formalismo entre partículas de onda e funções wavelets, abre novas

perspectivas para novas adaptações decorrentes da mecânica quântica, no âmbito de wavelets.

REFERÊNCIAS

- [1] S. G. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 2nd Ed., 637 p., 1999.
- [2] H.M. Radha, M. van der Schaar, Y. Chen, “The MPEG-4 Fine-Grained Scalable Video Coding Method for Multimedia Streaming Over IP”, *IEEE Trans. on Multimedia*, vol.3, pp. 53-68, 2001.
- [3] J-R. Ohm, M. van der Schaar, J.W. Woods, “Interframe wavelet coding—motion picture representation for universal scalability”, *Image Communication Signal Processing*, vol.19, pp. 877-908, 2004.
- [4] J. Woods, P. Chen, *Fully scalable subband/wavelet coding*, Doctoral Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute Troy, NY, USA, 2003.
- [5] V. Bottreau, M. Bénétière, B. Felts. “A fully scalable 3D subband video codec”, *Proc. IEEE Int. Conf. on. Image Processing*, vol.2, pp. 1017-1020, 2001.
- [6] A. Baganne et al. “A multi-level design flow for incorporating IP cores: Case study of 1D wavelet IP integration”, *IEEE Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition*, pp. 250-255, 2003.
- [7] J. F. Aujol et al. “Structure-texture image decomposition—modeling, algorithms, and parameter selection. *Int. J. of Computer Vision*, vol.67, pp. 111-136, 2006.
- [8] M. Van der Schaar, D. S. Turaga, “Multiple description scalable coding using wavelet-based motion compensated temporal filtering”, *Proc. IEEE Int. Conf. on Image Processing*, ICIP 2003, vol.3, pp. 489-492, 2003.
- [9] M. Antonini et al. “Image coding using wavelet transform”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.1, pp. 205-220, 1992.
- [10] R. M. Eisberg, *Fundamentals of Modern Physics*, J. Wiley, 729 p., 2007.
- [11] A. Skodras, C. Chistopoulos, T. Ebrahimi, “The JPEG 2000 Still Image Compression Standard”, *IEEE Signal Proc. Mag.*, pp. 36-58, 2001.

- [12] B. E. Usevitch, “A tutorial on modern lossy wavelet image compression: foundations of JPEG 2000”. *IEEE Signal Proc. Mag.*, vol.18, pp. 22-35, 2001.
- [13] M. Vetterli, J. Kovačević, *Wavelets and Subband Coding*, New Jersey: Prentice-Hall, 505 p., 2007.
- [14] J. S. Lim, *Two-Dimensional Signal and Image Processing*, New Jersey: Prentice Hall, 694 p., 1990.
- [15] D. Taubman, A. Zakhor, “Multirate 3-D subband coding of video”, *IEEE Trans. on Image Processing*, vol.3, pp. 572-588, 1994.
- [16] A. Beghdadi, B. Pesquet-Popescu, “A new image distortion measure based on wavelet decomposition”, *Proc. 7th IEEE Int. Symp. on Signal Processing and Its Applications*, vol.1, pp. 1-4, 2003.
- [17] A. Beiser, *Concepts of Modern Physics*, New York: McGraw-Hill Series in Fundamental Physics, 560 p., 2002.
- [18] W. M. Lawton, “Necessary and Sufficient Conditions for Constructing Orthonormal Wavelet Bases”, *Journal of Math. Physics*, vol.32, pp. 57–61, 1991.
- [19] S. Maaß, Families of orthogonal 2D wavelets, *SIAM J. Appl. Anal.*, vol. 27, No. 5, pp. 1454-1481, 1996.
- [20] E. J. Stollnitz, T. D. Deroose, D. H. Salesin, *Wavelets for Computer Graphics*, Morgan-Kaufmann Pub, CA, 245 p., 1996.
- [21] R. DeVore, B. Jawwerth, B. Lucier, “Image compression through wavelet transform coding”, *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol.38, pp. 719-746, 1992.
- [22] C. E. Jacobs, A. Finkelstein, D. H. Salesin, “Fast multiresolution image querying”, *Proc. SIGGRAPH'95*, pp. 277-286, ACM, NY, 1995.
- [23] I. Sodagar, Y. Q. Zhang, “Scalable picture coding for multimedia applications”, in: *Wavelet, subband and block transforms in comm. and multimedia*, Springer, vol. 504, pp. 295-322, 2002.
- [24] A. Moretin, *Ondas e Ondaletas: da Análise de Fourier a Análise de Ondaletas*, Ed. USP, São Paulo, 260 p., 1999.
- [25] H. M. de Oliveira, *Análise de Sinais para Engenheiros: Uma Abordagem via Wavelets*, Editora Brasport, Rio de Janeiro, 244 p., 2007.

- [26] H. M. de Oliveira, *Análise de Fourier e Wavelets: sinais estacionários e não estacionários*, Ed. Universitária UFPE, Recife, 343p., 2007.
- [27] C. S. Burrus, R.A. Gopinath, H. Guo, *Introduction to Wavelets and the Wavelet Transform - A Primer*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 268 p., 1998.
- [28] D. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 274 p., 2000.
- [29] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, J. M. Poggi, *Wavelet Toolbox User's Guide*, New York, The MathWorks, 2nd ed., 2002.
- [30] P. Carrion, H. M. de Oliveira, R. M. Campello de Souza, "A Low-throughput Wavelet-based Steganography Audio Scheme", *8th Brazilian Symposium on Information and Computer System Security*, Gramado, Brazil, 2 p., 2008.
- [31] J. Hu, J. Huang, D. Huang, Y.Q Shi, "Image fragile watermarking based on fusion of multi-resolution tamper detection", *Electronics Letters*, vol.38, pp. 1512–1513, 2002.
- [32] E. J. Stollnitz, T. D. DeRose, D. H. Salesin. "Wavelets for computer graphics: A primer", part 1. *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol.15, No. 3, pp. 76-84, 1995.
- [33] M. M. S. Lira, H. M. de Oliveira, M. A. Carvalho JR, R. M. C. Souza, "Compactly Supported Wavelets Derived from Legendre Polynomials: Spherical Harmonic Wavelets", In: *Computational Methods in Circuits and Systems Applications*, WSEAS press, pp. 211-215, 2003.
- [34] S. Muraki, "Volume data and wavelet transforms", *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 13, No. 4, pp. 50–56, 1993.
- [35] N. Kingsbury, "Image processing with complex wavelets", *Phil. Trans. Royal Society London, A Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 357.1760, pp. 2543-2560, 1999.
- [36] J. C. Slater, "The Theory of Complex Spectra", *Phys. Rev.*, vol. 34, pp. 1293–1322, 1929.
- [37] S. Saha, "Image compression - from DCT to wavelets: a review", *Crossroads*, vol. 6, No. 3, pp. 12-21, 2000.

- [38] B. G. Kim, J. I. Shim, D. J. Park, “Fast image segmentation based on multi-resolution analysis and wavelets”, *Pattern Recognition Letters*, vol. 24, pp. 2995-3006, 2003.
- [39] M. L. Hilton, B. D. Jawerth, A. Sengupta, “Compressing still and moving images with wavelets”, *Multimedia systems*, vol. 2, pp. 218-227, 1994.
- [40] J. B. T. M. Roerdink, A. Michel, “Wavelet-based volume visualization”, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, vol 17, pp. 149-158, 1999.
- [41] P. Schröder, “Wavelets in computer graphics”, *Proc. of the IEEE*, vol. 84, pp. 615-625, 1996.
- [42] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs*, Hermann, 1990.
- [43] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF conference series in applied mathematics, SIAM Ed., pp. 117–119, 137, 152, 1992.
- [44] A. Deckmin, L. Berre, “A Wavelet Approach to Representing Background Error Covariances in a Limited-Area Model”, *American Meteorological Society*, vol. 133, pp. 1279-1294, 2005.