

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA E SISTEMAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA



Igor de Moura Leite Moreira

MODELAMENTO E CODIFICAÇÃO DE CANAIS COM  
MEMÓRIA

VIRTUS IMPAVIDA

RECIFE

2017

Igor de Moura Leite Moreira

MODELAMENTO E CODIFICAÇÃO DE CANAIS COM  
MEMÓRIA

**Tese** submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco, Área de Concentração em Telecomunicações, como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Doutor em Engenharia Elétrica**.

Área de Concentração: Telecomunicações

Orientador: Prof. Cecilio José Lins Pimentel, Ph.D.

Recife

2017

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Maria Luiza de Moura Ferreira, CRB-4 / 1469

M838m    Moreira, Igor de Moura Leite.  
            Modelamento e codificação de canais com memória / Igor de Moura Leite Moreira. -  
            2017.  
            145 folhas, il., tabs. e simbs.

Orientador: Prof. Cecilio José Lins Pimentel, Ph.D.  
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Elétrica, 2017.  
Inclui Referências e Apêndices.

1. Engenharia Elétrica. 2. Canais de estados finitos Markovianos. 3. Códigos de bloco.  
4. Grafos. 5. Entrelaçamento. 6. Modulação OFDM.    I. Pimentel, Cecilio José Lins  
(Orientador). II. Título

UFPE

621.3 CDD (22. ed.)

BCTG/2017-316



Universidade Federal de Pernambuco  
*Pós-Graduação em Engenharia Elétrica*

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE  
TESE DE DOUTORADO DE

# IGOR DE MOURA LEITE MOREIRA

TÍTULO

**“MODELAMENTO E CODIFICAÇÃO DE CANAIS COM MEMÓRIA”**

A comissão examinadora composta pelos professores: CECILIO JOSÉ LINS PIMENTEL, DES/UFPE; DANIEL PEDRO BEZERRA CHAVES, DES/UFPE; DANIEL CARVALHO DA CUNHA, CIN/UFPE; FRANCISCO MADEIRO BERNARDINO JÚNIOR, POLI/UPE e MARIA DE LOURDES MELO GUEDES ALCOFORADO, POLI/UPE, sob a presidência do primeiro, consideram o candidato **IGOR DE MOURA LEITE MOREIRA APROVADO.**

Recife, 04 de julho de 2017.

---

**MARCELO CABRAL CAVALCANTI**  
Coordenador do PPGEE

---

**CECILIO JOSÉ LINS PIMENTEL**  
Orientador e Membro Titular Interno

---

**DANIEL CARVALHO DA CUNHA**  
Membro Titular Externo

---

**DANIEL PEDRO BEZERRA CHAVES**  
Membro Titular Interno

---

**FRANCISCO MADEIRO BERNARDINO  
JÚNIOR**  
Membro Titular Externo

---

**MARIA DE LOURDES MELO GUEDES  
ALCOFORADO**  
Membro Titular Externo

A Maridélia, Catherine e Dimitri...

# Agradecimentos

A GRADEÇO...

primeiramente a Deus, por tudo;

ao Professor Cecílio Pimentel, cuja paciência e o talento para lecionar são ímpares, mesmo a uma grande distância;

ao amigo e ex-professor João Paulo Cruz Lopes Miranda, que me incentivou bastante;

a Hélio Godoy de Avellar, Thiago Botelho e Igor Vilas Boas de Freitas, pela compreensão durante minhas ausências físicas e mentais em prol da elaboração deste trabalho;

e a minha família, especialmente a meus pais, pelo esforço em me educar, e a minha esposa, Maridélia, pelo apoio em todas as horas.

IGOR DE MOURA LEITE MOREIRA

*Universidade Federal de Pernambuco*

*4 de Agosto de 2017*

# Resumo

CANAIS de estados finitos markovianos (FSMC, *finite-state Markov channels*) têm sido usados para modelar a transmissão de pacotes na camada física de sistemas de comunicação discretos com memória. Esta tese inicia-se com a comparação de dois métodos de estimação dos parâmetros de modelos FSMC, já utilizados na literatura, com um terceiro, a divergência de Kullback-Leibler, cujo emprego para este fim é uma proposição deste trabalho. A análise do desempenho dos modelos FSMC é realizada por meio de uma comparação de estatísticas geradas tanto pelo modelo quanto pelo sistema de comunicações discreto, sendo que a probabilidade de gerarem-se  $m$  erros em uma sequência de comprimento  $n$  é a estatística mais discutida, haja vista seu impacto no projeto e na análise de códigos corretores de erros. Técnicas combinatoriais, que empregam a teoria da numeração de sequências discretas, são utilizadas para o desenvolvimento de expressões de recorrência inéditas para o cálculo dessa estatística. Também avalia-se o desempenho da utilização de modelos FSMC para reproduzir o comportamento estatístico de um sistema de comunicações discreto baseado no padrão IEEE 802.11, com modulação OFDM (*orthogonal frequency-division multiplexing*) e desvanecimento seletivo em frequência, concatenando-se externamente um codificador Reed-Solomon. A aplicação de um entrelaçamento finito, que alia baixo impacto no atraso de processamento com limitação da memória, também é avaliada analiticamente com a inclusão do nível de entrelaçamento finito nas expressões desenvolvidas. Comparações com simulações computacionais comprovam que o modelamento proposto é preciso. Por fim, apresentam-se modelos FSMC com decisão suave, para reproduzir sistemas de comunicação discretos com codificação LDPC (*low-density parity-check codes*) e esquema de decodificação baseado no algoritmo soma-produto.

**Palavras-chave:** Canais de estados finitos Markovianos. Códigos de bloco. Grafos. Entrelaçamento. Modulação OFDM.

# Abstract

**F**INITE-STATE Markov channels (FSMC) have been used for modeling packet transmission on the physical layer of discrete communication systems with memory. This thesis starts by comparing two methods already known in the literature for estimating the FSMC parameters, with a third one, the Kullback-Leibler divergence, whose use for this purpose is a proposal of this work. The performance analysis of the FSMC models is performed through a comparison of statistics generated by the model and the discrete communications system. The probability of generating up to  $m$  errors in a sequence of length  $n$  is the most discussed statistic, due to its impact on the design and analysis of error correcting codes on these channels. Combinatorial techniques, which employ the enumeration of discrete sequences, are used developing new recurrence expressions for this statistic. This work also evaluates the usage of FSMC models to reproduce the statistical behavior of a discrete communication system based on the IEEE 802.11 standard with OFDM (*orthogonal frequency-division multiplexing*) modulation and frequency selective fading. The insertion of a finite interleaving, which combines low processing delay with limited memory consumption, is analytically analyzed. Comparisons with computer simulations show that the proposed analysis is accurate. Finally, FSMC models with soft decision are presented to reproduce discrete communication systems with LDPC (*low-density parity-check codes*) coding and a decoding scheme based on the sum-product algorithm.

**Keywords:** Finite-state Markov channel. Block codes. Graphs. Interleaving. OFDM modulation.



# Lista de Ilustrações

Figura 1.1	Evolução anual da quantidade de assinantes de telefonia móvel e fixa. . .	20
Figura 2.1	Modelo GEC para canais com memória. . . . .	34
Figura 2.2	Modelo Nascimento e Morte de 3 estados. . . . .	39
Figura 2.3	Modelo Nascimento e Morte de 4 estados. . . . .	39
Figura 2.4	Grafo de Fatores. . . . .	49
Figura 2.5	Mensagem enviada a partir de um nó de função. . . . .	52
Figura 3.1	Regiões de decisão para um canal discreto com $2^\xi$ níveis de quantização. . . . .	57
Figura 3.2	Função autocorrelação de um GEC que aproxima um DFC com $f_D T = 10^{-3}$ e SNR = 10 dB. . . . .	62
Figura 3.3	Comparação da vazão do protocolo GBN do DFC e de GEC estimados pelo método WM para um DFC com $f_D T = 10^{-3}$ , $N_{GBN} = 10$ e $N = 80$ . . . . .	63
Figura 3.4	Comportamento da vazão do DFC e de modelos GEC para $f_D T = 10^{-3}$ , $N_{GBN} = 10$ e $N = 80$ . . . . .	64
Figura 3.5	PCE $\times$ SNR para um código de bloco binário, linear, de comprimento $N = 255$ , capacidade de correção $t_c = 29$ , em canais GEC e no DFC com $f_D T = 10^{-3}$ . . . . .	65
Figura 3.6	Comportamento da probabilidade $P(0^m   1)$ de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para SNR=5 dB. . . . .	71
Figura 3.7	Comportamento da probabilidade $P(0^m   1)$ de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para SNR=8 dB. . . . .	72
Figura 3.8	Comportamento da probabilidade $P(0^m   1)$ de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para SNR=10 dB. . . . .	72
Figura 3.9	Comportamento da probabilidade $P(0^m   1)$ de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para SNR=15 dB. . . . .	73
Figura 3.10	Comportamento da probabilidade $P(m, 255)$ de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para SNR=5 dB. . . . .	74
Figura 3.11	Comportamento da probabilidade $P(m, 255)$ de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para SNR=8 dB. . . . .	74
Figura 3.12	Comportamento da probabilidade $P(m, 255)$ de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para SNR=10 dB. . . . .	75
Figura 3.13	Comportamento da probabilidade $P(m, 255)$ de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para SNR=15 dB. . . . .	75

Figura 4.1	SCD baseado no padrão IEEE 802.11. . . . .	78
Figura 4.2	Sistema de comunicações com codificador RS. . . . .	82
Figura 4.3	Comportamento da função autocorrelação para os canais SCD-1, GEC e BSC, com SNR=10 dB, para os parâmetros dispostos na Tabela 4.5. . . . .	86
Figura 4.4	Comportamento da probabilidade $P(0^m   1)$ de três canais, SCD-1, GEC e BSC, para SNR=10 dB, para os parâmetros dispostos na Tabela 4.5. . . . .	86
Figura 4.5	Comportamento da probabilidade $P(m, 255)$ de três canais, SCD-1, GEC e BSC, para SNR=10 dB, para os parâmetros dispostos na Tabela 4.5. . . . .	87
Figura 4.6	PCE $\times$ SNR para três canais, SCD-1, GEC e BSC, com $N = 255$ e $t_c = 17$ . Os parâmetros do GEC estão na Tabela 4.5. . . . .	87
Figura 4.7	PCE $\times$ SNR para três canais, SCD-2, GEC e BSC, com $N = 255$ e $t_c = 17$ . Os parâmetros do GEC estão na Tabela 4.6. . . . .	88
Figura 4.8	PCE $\times$ SNR para três canais, SCD-3, GEC e BSC, com $N = 255$ e $t_c = 17$ . Os parâmetros do GEC estão na Tabela 4.7. . . . .	89
Figura 4.9	PCE $\times$ SNR para três canais, SCD-4, GEC e BSC, com $N=255$ e $t_c = 17$ . . . . .	90
Figura 4.10	PCE $\times$ SNR para três canais, SCD-5, GEC e BSC, com $N = 255$ e $t_c = 17$ . . . . .	91
Figura 4.11	PCE $\times$ SNR para três canais, SCD-6, GEC e BSC, com $N = 255$ e $t_c = 17$ . . . . .	91
Figura 4.12	Comportamento da probabilidade $P(0^m   1)$ de quatro canais, SCD-1, GEC, 3-NM e 4-NM, cujos parâmetros estão na Tabela 4.9, para SNR=5 dB. . . . .	94
Figura 4.13	Comportamento da probabilidade $P(0^m   1)$ de quatro canais, SCD-2, GEC, 3-NM e 4-NM, cujos parâmetros estão na Tabela 4.9, para SNR=5 dB. . . . .	94
Figura 4.14	Comportamento da probabilidade $P(0^m   1)$ de quatro canais, SCD-1, GEC, 3-NM e 4-NM, cujos parâmetros estão na Tabela 4.9, para SNR=10 dB. . . . .	95
Figura 4.15	Comportamento da probabilidade $P(0^m   1)$ de quatro canais, SCD-2, GEC, 3-NM e 4-NM, cujos parâmetros estão na Tabela 4.9, para SNR=10 dB. . . . .	95
Figura 4.16	Comportamento da probabilidade $P(m, 255)$ de quatro canais, SCD-1, GEC, 3-NM e 4-NM, para SNR=5 dB. . . . .	96
Figura 4.17	Comportamento da probabilidade $P(m, 255)$ de quatro canais, SCD-2, GEC, 3-NM e 4-NM, para SNR=5 dB. . . . .	96
Figura 4.18	Comportamento da probabilidade $P(m, 255)$ de quatro canais, SCD-1, GEC, 3-NM e 4-NM, para SNR=10 dB. . . . .	97
Figura 4.19	PCE $\times$ t para quatro canais, SCD-1, GEC, 3-NM e 4-NM, para $N = 255$ e SNR=5 dB. Os parâmetros dos FSMC estão nas Tabelas 4.7 e 4.9. . . . .	98
Figura 4.20	Sistema de comunicações com entrelaçamento. . . . .	99
Figura 4.21	PCE $\times$ Id, para o canal SCD-1, com $N = 255$ e SNR=10 dB, para $t_c=13, 17, 21$ . . . . .	101
Figura 4.22	PCE $\times$ Id, para o canal SCD-2, com $N = 255$ e SNR=10 dB, para $t_c = 13, 17, 21$ . . . . .	101
Figura 4.23	PCE $\times$ SNR para três canais, SCD-1, GEC e BSC, para $N = 255$ e $t_c = 17$ . Os parâmetros do GEC estão na Tabela 4.5. . . . .	102
Figura 4.24	PCE $\times$ SNR para três canais, SCD-2, GEC e BSC, para $N = 255$ e $t_c = 17$ . Os parâmetros do GEC estão na Tabela 4.6. . . . .	102

Figura 4.25 PCE $\times$ SNR para três canais, SCD-3, GEC e BSC, para $N = 255$ e $t_c = 17$ . Os parâmetros do GEC estão na Tabela 4.7. . . . .	103
Figura 5.1 $C^{(n)}$ versus o passo normalizado do quantizador $\delta$ para diferentes valores de $n$ , $n= 1, 3, 5, 7$ . . . . .	107
Figura 5.2 FSMC com 2 estados e $\xi = 2$ . . . . .	108
Figura 5.3 Grafo de fatores para decodificar um código LDPC para transmissão em um canal NBND-FCMC. . . . .	110
Figura 5.4 BER $\times$ SNR com $f_D T = 5 \times 10^{-3}$ e decisão suave, código LDPC(15000, 7500). . . . .	117
Figura 5.5 BER $\times$ SNR com $f_D T = 10^{-3}$ e decisão suave, código LDPC(15000, 7500). . . . .	117

# Lista de Tabelas

Tabela 3.1	Valores dos parâmetros do GEC estimados pelo método WM que modelam um DFC com $f_D T = 10^{-3}$ .	60
Tabela 3.2	Valores dos parâmetros do GEC estimados pelo algoritmo BW que modelam um DFC com $f_D T = 10^{-3}$ .	61
Tabela 3.3	Valores dos parâmetros do GEC estimados pela minimização da divergência de Kullback-Leibler de $\ell$ -ésima ordem que modelam um DFC com $f_D T = 10^{-3}$ , $\ell = 10$ .	61
Tabela 3.4	Valores dos parâmetros do GEC calculados pelo método WM que aproximam a vazão do DFC com $f_D T = 10^{-3}$ .	63
Tabela 3.5	Valores dos parâmetros do GEC calculados pelo método WM que aproximam a PCE do DFC com $f_D T = 10^{-3}$ .	63
Tabela 3.6	Valores dos parâmetros do $J$ -NM, sendo $J=2,3$ e $4$ , que modelam o DFC para 5 valores de SNR e com $f_D T = 10^{-3}$ .	71
Tabela 3.7	Modelos $J$ -NM que aproximam um DFC com $f_D T = 10^{-3}$ para SNR = 5, 8, 10 e 15 dB.	76
Tabela 4.1	Esquemas de modulação e codificação usados no padrão 802.11	79
Tabela 4.2	Valores dos parâmetros OFDM para uma banda de 20 MHz.	82
Tabela 4.3	Sistemas de comunicação discretos com codificação não-binária.	83
Tabela 4.4	Condições iniciais do BW para parametrizar um modelo GEC.	84
Tabela 4.5	Valores dos parâmetros do GEC que modelam o canal SCD-1.	84
Tabela 4.6	Valores dos parâmetros do GEC que modelam o SCD-2.	88
Tabela 4.7	Valores dos parâmetros do GEC que modelam o canal SCD-3.	89
Tabela 4.8	Sistemas de comunicação discretos com codificação binária.	90
Tabela 4.9	Valores dos parâmetros do $J$ -NM, sendo $J = 3$ e $4$ , que modelam o SCD para vários valores de SNR.	93
Tabela 4.10	Modelos $J$ -NM que aproximam um SCD com $f_D T = 10^{-3}$ para SNR = 3, 5, 8, 10, 12 e 15 dB.	97
Tabela 5.1	Modelos FSMC que modelam um DFC com $f_D T = 10^{-3}$ e decisão suave.	114
Tabela 5.2	Modelos FSMC que modelam um DFC com $f_D T = 5 \times 10^{-3}$ e decisão suave.	115

# Lista de Abreviaturas e Siglas

A seguir são apresentadas abreviaturas utilizadas na tese.

<b>Abreviação</b>	<b>Definição.</b>
AWGN	Ruído aditivo Gaussiano branco ( <i>additive white Gaussian noise</i> ).
BPSK	Modulação por chaveamento de fase binário ( <i>binary phase shift keying</i> ).
BSC	Canal binário simétrico ( <i>binary symmetric channel</i> ).
BW	Algoritmo de Baum-Welch.
DFC	Canal com desvanecimento suave ( <i>discrete fading channel</i> ).
DMC	Canal discreto sem memória ( <i>discrete memoryless channel</i> ).
FSMC	Canais de estados finitos Markovianos ( <i>finite-state Markov channels</i> ).
GBN	Protocolo Go-Back-N.
GEC	Canal de Gilbert-Elliott ( <i>Gilbert-Elliott channel</i> ).
IEEE	Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos ( <i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i> ).
KL	Divergência de Kullback-Leibler.
LDPC	Códigos de verificação de paridade de baixa densidade ( <i>low density parity check code</i> ).
LLR	Razões de log-verossimilhança ( <i>log-likelihood ratio</i> ).
MAP	Máxima probabilidade <i>a posteriori</i> ( <i>maximum a posteriori probability</i> ).
NBNDK	Canais discretos com ruído não-binário ( <i>non-binary noise discrete channel</i> ).

<b>Abreviação</b>	<b>Definição.</b>
NM	Modelo de canal Nascimento-Morte.
OFDM	Multiplexação por divisão ortogonal de frequência ( <i>orthogonal frequency division multiplexing</i> ).
PCE	Probabilidade de uma decodificação sem sucesso.
PEG	Algoritmo progressive-edge-growth.
RS	Código Reed-Solomon.
SCD	Sistema de comunicação discreto.
SNR	Relação sinal-ruído ( <i>signal-to-noise ratio</i> ).
WM	Método de parametrização do GEC proposto por Wilhelmsson e Milstein.

# Lista de Símbolos

A seguir são apresentadas notações e símbolos utilizados na tese.

$1/T$	Taxa de sinalização.
$A_k$	Envoltória do desvanecimento no instante $k$ .
$b$	Comprimento do símbolo RS.
$C^{(n)}$	Capacidade de ordem $n$ do canal.
$C(\tau)$	Função covariância.
$Cor$	Coefficiente de correlação.
$d_{min}$	Distância mínima de um código de bloco.
$E_s$	Energia do sinal transmitido.
$f$	Frequência.
$f_D$	Máxima frequência Doppler.
$f_D T$	Frequência Doppler normalizada.
$h(\mathbf{x})$	Função característica de um código corretor de erro.
$I_d$	Nível do entrelaçamento finito.
$J$	Quantidade de estados do modelo Markoviano.
$J_0(x)$	Função de Bessel de primeira espécie e ordem zero.
$K$	Número de dígitos de informação de um código.
$L$	Quantidade de estágio não nulos do filtro que modela o canal com desvanecimento.
$L_{m,n}$	Mensagens em LLR do nó de checagem $m$ ao nó de bit $n$ .
$\mathcal{M}(x)$	Conjunto de funções das quais a variável $x$ participa.
$N$	Comprimento de uma palavra-código.
$N_0$	Densidade espectral de potência do ruído branco.
$\mathcal{N}(f)$	Conjunto de variáveis que participam da função $f$ .
$N_s$	Número de subportadoras ortogonais do modulador OFDM.
$N_{BPSC}$	Número de bits codificados por subportadora.
$N_{CBPS}$	Número de bits em um único símbolo OFDM.
$N_{GBN}$	Tempo de atraso medido em número de pacotes do esquema GBN.
$P(0^m   1)$	Probabilidade da ocorrência de uma sequência com $m$ transmissões corretas, dada uma incorreta.

$P(m, n)$	Probabilidade do canal produzir $m$ símbolos errados em um bloco de comprimento $n$ .
$P_x$	Probabilidade de erro no estado $x$ .
$Q$	Probabilidade do GEC transicionar do estado 0 para o estado 1.
$q$	Probabilidade do GEC transicionar do estado 1 para o estado 0.
$R[m]$	Função autocorrelação.
$R_k$	$k$ -ésima amostra do sinal recebido.
$\mathbf{r}_n =$ $[r_n(k)]$	Vetores probabilísticos do subgrafo de código ao nó de estado do canal no tempo $n$ .
$t_c$	Capacidade de correção de um código.
$T_j$	Limitante da região de decisão do quantizador.
$U_n$	Mensagens em LLR do subgrafo de canal aos nós $x_n$ .
$v$	Velocidade máxima.
$V_n$	Mensagens em LLR do nó de bit $x_n$ ao subgrafo de canal associado.
$\mathbf{w}_n =$ $[w_n(k)]$	Vetores probabilísticos do estado do canal no tempo $n$ ao subgrafo do código.
$Z_{m,n}$	Mensagens em LLR do nó de bit $n$ ao nó de checagem $m$ .
$\rho$	$J_0(2\pi m f_D T)$ .
$\alpha$	Índice dos bits codificados.
$\boldsymbol{\alpha}_n =$ $[\alpha_n(k)]$	Vetores probabilísticos do nó de função $P(s_n   s_{n-1})$ ao estado $s_n$ .
$\alpha_t$	Limiar do nível de amplitude.
$\beta$	Índice dos bits codificados após a primeira permutação.
$\boldsymbol{\beta}_n =$ $[\beta_n(k)]$	Vetores probabilísticos do nó de função $P(s_{n+1}   s_n)$ ao estado $s_n$ .
$\gamma$	Índice dos bits codificados após a segunda permutação.
$\boldsymbol{\gamma}_n =$ $[\gamma_n(k)]$	Vetores probabilísticos do estado $s_n$ ao nó de função $P(s_{n+1}   s_n)$ .
$\gamma_t$	Limiar do nível da relação sinal-ruído.
$\delta$	Passo normalizado do quantizador.
$\zeta_n^m$	Conjunto de todas as sequências de comprimento $n$ com $m$ erros.
$\lambda$	Comprimento de onda.
$\xi$	Quantidade de níveis de quantização.
$\pi_x$	Probabilidade estacionária de estado $x$ .
$\boldsymbol{\rho}_n =$ $[\rho_n(k)]$	Vetores probabilísticos do estado $s_n$ ao nó de função $P(s_n   s_{n-1})$ .
$\tau_m$	Valor médio quadrático do perfil de pot. dos multipercursos.
$\omega_g$	Perfil de potência das componentes dos multipercursos.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
<b>1.1</b>	<b>Contribuições da Tese</b>	<b>24</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização da Tese</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>CADEIAS DE MARKOV, CANAIS DE ESTADOS FINITOS E CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS</b>	<b>27</b>
<b>2.1</b>	<b>Processos Markovianos Discretos</b>	<b>27</b>
<b>2.2</b>	<b>Propriedades de Canais Discretos</b>	<b>30</b>
2.2.1	Canal de Comunicação Discreto	31
2.2.2	Canal de Estados Finitos Markoviano	32
<b>2.3</b>	<b>Canais de Estados Finitos Binários</b>	<b>34</b>
2.3.1	O Canal Gilbert-Elliott	34
<b>2.4</b>	<b>Modelos Nascimento e Morte</b>	<b>38</b>
2.4.1	O modelo 3-NM	40
2.4.2	O modelo 4-NM	40
<b>2.5</b>	<b>Códigos de Bloco Lineares</b>	<b>42</b>
2.5.1	Peso de Hamming	42
2.5.2	Distância de Hamming	42
2.5.3	Distância mínima de um código de bloco	42
2.5.4	Matriz geradora	43
2.5.5	Matriz de verificação paridade	43
<b>2.6</b>	<b>Códigos Cíclicos</b>	<b>43</b>
2.6.1	Polinômio Gerador	44
2.6.2	Polinômio de Paridade $h(x)$	45
<b>2.7</b>	<b>Códigos BCH</b>	<b>46</b>
<b>2.8</b>	<b>Códigos Reed-Solomon</b>	<b>47</b>
<b>2.9</b>	<b>Códigos LDPC</b>	<b>47</b>
<b>2.10</b>	<b>Representação Gráfica</b>	<b>48</b>
2.10.1	Grafo de Fatores	48
<b>2.11</b>	<b>Algoritmo Soma-Produto</b>	<b>50</b>
<b>2.12</b>	<b>O ASP Aplicado a Mensagens em Razão de Verossimilhança</b>	<b>51</b>
2.12.1	Utilização do ASP no Processo de Decodificação em Canais Sem Memória	52

<b>3</b>	<b>AVALIAÇÃO DE MÉTODOS DE GERAÇÃO DE PARÂMETROS DE MODELOS DE CANAIS DE ESTADOS FINITOS</b>	<b>55</b>
<b>3.1</b>	<b>Canal Discreto com Desvanecimento</b>	<b>56</b>
<b>3.2</b>	<b>Estimação de Parâmetros do modelo GEC</b>	<b>58</b>
3.2.1	O Método WM	59
3.2.2	O Método BW	60
3.2.3	O Método KL	60
<b>3.3</b>	<b>Resultados</b>	<b>61</b>
<b>3.4</b>	<b>Modelamento do DFC com 3-NM e 4-NM</b>	<b>65</b>
3.4.1	Cálculo de $P(m, n)$ para os modelos 3-NM e 4-NM	65
3.4.2	Recorrência para o 3-NM	67
3.4.3	Recorrência para o 4-NM	69
<b>3.5</b>	<b>Análise do modelamento do DFC utilizando modelos <math>J</math>-NM</b>	<b>70</b>
<b>4</b>	<b>MODELAMENTO MARKOVIANO USANDO SISTEMAS OFDM EM CANAIS SELETIVOS EM FREQUÊNCIA</b>	<b>77</b>
<b>4.1</b>	<b>Descrição do Sistema de Comunicações</b>	<b>77</b>
4.1.1	Codificador Reed-Solomon	81
4.1.2	Parâmetros Utilizados	82
<b>4.2</b>	<b>Avaliação do GEC que modela um SCD com Codificador RS</b>	<b>83</b>
<b>4.3</b>	<b>Avaliação do GEC que modela um SCD com Codificador Binário</b>	<b>90</b>
<b>4.4</b>	<b>Avaliação dos modelos 3-NM e 4-NM para modelar o SCD</b>	<b>91</b>
<b>4.5</b>	<b>Entrelaçamento Finito</b>	<b>98</b>
<b>5</b>	<b>MODELO FSMC COM DECODIFICAÇÃO SUAVE</b>	<b>104</b>
<b>5.1</b>	<b>Modelo de Canal Não-Binário</b>	<b>104</b>
<b>5.2</b>	<b>Capacidade do Canal</b>	<b>105</b>
<b>5.3</b>	<b>FSMC Não-Binário</b>	<b>107</b>
<b>5.4</b>	<b>Grafo de Fatores para um Código LDPC em canais NBNDC-FSMC</b>	<b>108</b>
5.4.1	Escalonamento de passagem de mensagens	110
<b>5.5</b>	<b>Decodificação pelo ASP aplicada ao modelo FSMC</b>	<b>111</b>
<b>5.6</b>	<b>Resultados</b>	<b>113</b>
5.6.1	Algoritmo Baum-Welch	113
5.6.2	Análise de Desempenho	116
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>118</b>
<b>6.1</b>	<b>Sugestões para futuros estudos</b>	<b>120</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>121</b>
	<b>APÊNDICE A</b>	<b>128</b>
	<b>APÊNDICE B</b>	<b>131</b>

APÊNDICE C	.....	146
------------	-------	-----

# 1

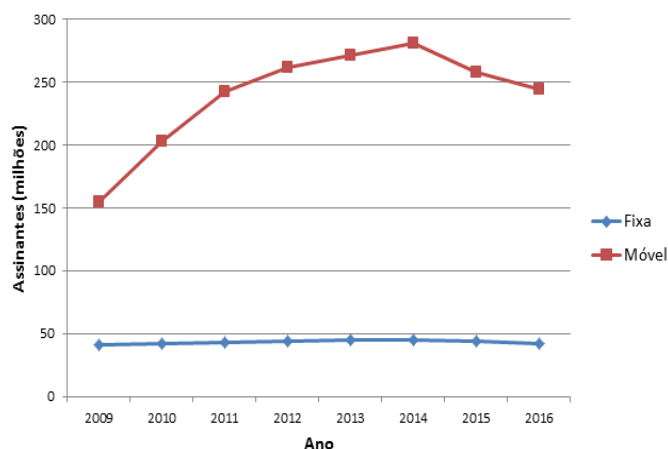
## INTRODUÇÃO

COM o advento da internet, os paradigmas de distância geográfica, tempo e espaço foram quebrados. O aqui e agora, *online*, passaram a ser mandatórios na sociedade intitulada "da informação". As barreiras tecnológicas, todavia, são inúmeras, dado que o Brasil possui uma vasta extensão territorial. Áreas remotas tendem a ser cobertas por tecnologias sem fio, com vistas à minimização do custo de implantação de rede, se comparado com redes cabeadas. Ademais, em decorrência da evolução tecnológica, redes móveis 3G (*wideband code division multiple access* - WCDMA) [1] e 4G (*long-term evolution* - LTE) [2] são capazes de levar serviços de tráfego de dados aos seus usuários.

Na União Internacional de Telecomunicações encontra-se em andamento o desenvolvimento o padrão 5G, por meio do grupo de trabalho IMT-2020 [3], que deverá proporcionar aos usuários *throughput* de até 20 Gbps. Na Fig. 1.1, cujos dados são da Anatel [4], é possível ver que a penetração da telefonia móvel é bastante superior à fixa e, por conseguinte, a penetração de dados móveis tem a mesma relação.

Os obstáculos à propagação dos sinais no espaço como, por exemplo, perdas por propagação, regiões de sombreamento e desvanecimento por multipercurso, constituem um entrave à utilização de canais sem fio. No tocante aos efeitos danosos do desvanecimento sobre as transmissões sem fio, observa-se uma característica comumente presente em muitos canais, que é o fato dos erros ocorrerem em surtos, ou seja, com um grande número de símbolos consecutivos decodificados com erros. Isso indica a existência de uma correlação temporal no processo de geração desses erros [5]. Assim, denomina-se um "canal com memória" àquele canal que, em

**Figura 1.1:** *Evolução anual da quantidade de assinantes de telefonia móvel e fixa.*



apresentando erros, estes possuem uma correlação estatística em sua ocorrência.

Dado que muitos sistemas de codificação e protocolos são projetados para processos de erros sem memória, aplica-se normalmente a técnica de entrelaçamento [6], com vistas a eliminar ou diminuir os efeitos da memória do canal, uma vez que símbolos transmitidos dentro de uma mesma palavra-código são afetados pelo desvanecimento em instantes de tempo suficientemente distantes entre si. É possível modelar um canal com desvanecimento como um canal sem memória por meio do uso de um entrelaçamento ideal. Ocorre que, para tanto, faz-se necessário um maior processamento em tempo real, o que demanda um sistema mais complexo e, por conseguinte, introduz um atraso na comunicação devido a este processamento. Soma-se a isso o fato de que canais com memória possuem uma capacidade de canal maior do que canais sem memória [7]. Em decorrência desses fatores, a transmissão de pacotes utilizando canais não entrelaçados, ou com entrelaçamento finito, tornou-se objeto de estudo na área [8].

Se a memória do canal for considerada no projeto do sistema de comunicação, ela poderá ser utilizada, por exemplo, para estimar a qualidade do canal em um determinado intervalo de tempo, tomando-se por base as condições prévias deste canal. Assim, é possível melhorar a confiabilidade das transmissões (desempenho), sem impactar a complexidade, utilizando-se estratégias de correção de erros projetadas de acordo com o comportamento da memória do canal. Por essa razão, é de fundamental importância o conhecimento do processo de geração de erros em canais com memória. Contudo, a utilização direta das estatísticas do canal de comunicação depende de uma complexa descrição probabilística do canal utilizado. Todavia, isso pode ser feito por meio de um modelamento mais simplificado do canal, no qual o objetivo principal é prover um modelo cujas propriedades são complexas o suficiente para simular

as características do canal real e, ainda, simples o suficiente para permitir um tratamento matemático factível.

Canais de estados finitos Markovianos (FSMC, *finite state Markov channel*) têm sido utilizados para modelar a transmissão de pacotes na camada física de sistemas de comunicação discretos, tais como canais de banda estreita [9], redes padrão IEEE 802.11 [10], desvanecimento de canais de controle em ferrovias de alta velocidade [11], comunicação de dados por meio de rede elétrica [12] e sensoriamento espectral [13]. Um FSMC, empregado como modelo para processos estacionários, é um canal discreto, com alfabeto de entrada e de saída discretos, que possui um conjunto finito de estados, com transição descrita por uma cadeia de Markov, a qual tem probabilidades de transição atribuídas de forma independente do tempo. A cada estado é associada uma determinada probabilidade de geração de erros.

A utilização de modelos FSMC para descrever estruturas de correlação de geração de surtos de erros em canais sem fio é particularmente útil dada a menor complexidade computacional desses modelos para análise de desempenho de sistemas codificados em canais com memória [14–17]. Uma vez obtidos os seus parâmetros, o modelo poderá ser utilizado para fazer simulações computacionais de maneira mais rápida do que o sistema de comunicação real.

Gilbert [18] propôs, em 1960, um FSMC binário (entrada binária, saída binária) para determinar a capacidade de informação de linhas telefônicas ruidosas. Logo após o trabalho de Gilbert, Elliott [19] utilizou esse modelo para calcular e comparar a taxa de erros de códigos corretores de erros em canais ruidosos. Esse canal ficou conhecido como o canal Gilbert-Elliott (GEC, *Gilbert-Elliott Channel*), o qual possui dois estados com um canal binário simétrico associado a cada um deles.

Em 1968, Gallager [20] desenvolveu uma fórmula para a capacidade de modelos FSMC. A definição de Gallager engloba tanto o caso em que a transição dos estados do canal é controlada pela entrada deste (como no caso de canais com interferência intersimbólica), quanto o caso em que o estado do canal é estatisticamente independente da entrada (como em canais com desvanecimento). Outros modelos FSMC baseados em memória variável [21] e em filas finitas [22, 23] foram desenvolvidos.

Além do grande interesse em canais binários, estudos em teoria da informação revelam que uma decisão suave, ou seja, com mais de dois níveis de quantização, pode aumentar significativamente a capacidade de várias classes de canais, quando comparada com decisão abrupta [24, 25]. Isso inclui canais com ruído aditivo Gaussiano Branco (AWGN, *additive white Gaus-*

*sian noise*) [26] e canais com desvanecimento Rayleigh independentes (totalmente entrelaçados) [27].

Esta tese tem início com a análise comparativa de três métodos para estimação dos parâmetros de um FSMC binário (entrada binária, saída binária), mais especificamente o canal GEC, de modo a reproduzir o comportamento estatístico de um canal discreto com desvanecimento, composto por um modulador BPSK, um canal com desvanecimento Rayleigh correlacionado no tempo, não seletivo em frequência e com ruído aditivo Gaussiano branco, e um demodulador coerente com decisão abrupta. O método proposto por Wilhelmsson e Milstein [28], aqui chamado de WM, e o algoritmo de Baum-Welch [29], denominado de BW, já utilizados na literatura, foram comparados com o método de minimização da divergência de Kullback-Leibler [22], doravante chamado de KL, entre duas medidas de probabilidade geradas pelo GEC e pelo canal com desvanecimento. O emprego da divergência para a estimação de parâmetros de um FSMC é uma proposição deste trabalho. No intuito de averiguar uma possível melhoria na precisão da reprodução do comportamento estatístico do sistema de comunicação, são analisados também modelos FSMC denominados de Nascimento e Morte (NM), com 3 e 4 estados, ou 3-NM e 4-NM, respectivamente. Ressalta-se que o GEC é um caso particular dos modelos NM.

A análise de desempenho de esquemas de controle de erros aplicados a modelos FSMC depende das estatísticas derivadas do modelo parametrizado. Uma estatística importante para o projeto e análise de códigos corretores de erros consiste na probabilidade do modelo gerar  $m$  símbolos de erro em uma sequência de comprimento  $n$ , denotada por  $P(m, n)$ . É possível analisar a influência dos parâmetros do modelo na aplicação do código por meio dessa estatística.

Um dos objetivos desta tese é utilizar as técnicas combinatoriais desenvolvidas em [30] para a análise de canais FSMC, aplicando-as na análise de desempenho de códigos de bloco. Estas técnicas empregam a teoria de enumeração de sequências discretas para enumerar as probabilidades de eventos de interesse para o cálculo do desempenho. Tais probabilidades são expressas como coeficientes de uma série de potências, denominada de série geradora. Com a utilização dessas técnicas, é possível obter as estatísticas para um dado modelo FSMC e analisar a aplicação de codificação neste modelo. Assim, expressões inéditas de recorrência para o cálculo de  $P(m, n)$  são desenvolvidas para os modelos 3-NM e 4-NM.

Em seguida, são avaliados modelos FSMC com vistas à reproduzir o comportamento es-

tatístico de um sistema de comunicação discreto, baseado no padrão IEEE 802.11 (Wi-Fi), denominado SCD (*sistema de comunicação discreto*), com modulação OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*) e desvanecimento seletivo em frequência. Como o SCD é um canal discreto com memória, este trabalho considera a transmissão de palavras-código oriundas de um codificador Reed-Solomon (RS), concatenado externamente ao SCD. O código RS é um código de bloco não binário cujos símbolos estão sobre o campo de Galois  $GF(2^b)$  e é bem aplicável a um ambiente em que os erros ocorrem em surtos.

Uma das contribuições deste trabalho é prover ferramentas analíticas para avaliar a performance dos códigos RS no SCD. Para tanto, é gerada uma sequência binária de erro de símbolo produzida pela transmissão de palavras-código por meio do SCD, a qual indica se um símbolo RS foi transmitido com sucesso pelo sistema. Os pacotes (ou símbolos) dessa sequência possuem comprimento de  $b$  bits, que é o comprimento da representação binária do elemento do campo. Em outras palavras, um bit 0 indica que o símbolo RS correspondente foi transmitido com sucesso, enquanto um bit 1 indica uma falha na decodificação. Essa sequência captura a correlação entre símbolos RS consecutivos.

Outro objetivo é avaliar a pertinência de utilizar-se um modelo FSMC, mais especificamente os canais GEC, 3-NM e 4-NM, para reproduzir a sequência de erros de símbolo produzida pelo SCD. A precisão do modelo é avaliada comparando-se algumas estatísticas produzidas pelo sistema de comunicação e pelo FSMC.

A aplicação conjunta de entrelaçamento e códigos corretores de erros projetados para corrigir erros aleatórios tem sido proposta na literatura para possibilitar o emprego destes códigos em canais com surtos [28, 31]. Porém, tem-se comumente admitido um nível de entrelaçamento, denotado por  $I_d$ , suficientemente alto para tornar o canal sem memória. Há aplicações, entretanto, nas quais restrições de atraso podem limitar o máximo valor de  $I_d$ . A aplicação do entrelaçamento com nível finito como forma de melhorar a atuação do código também é estudada. A fórmula para a probabilidade  $P(m, n)$  é estendida a fim de englobar também os casos em que um entrelaçamento finito, com nível de entrelaçamento  $I_d$ , é incorporado ao sistema de comunicação, sendo possível a avaliação de desempenho do canal discreto com o uso de códigos de bloco para correção de erros e entrelaçamento finito.

Vários autores abordaram o algoritmo *belief propagation* (BPA), que é um caso especial do algoritmo soma-produto [32], no projeto de decodificação e estimação do estado do canal de forma conjunta, utilizando códigos LDPC (*low density parity check codes*) com FSMC [33–38].



O decodificador utiliza um grafo de fatores cujos nós de variável são relacionados às limitações do código bem como à estrutura do FSMC. Tais trabalhos são particularmente voltados para os casos em que o FSMC é binário (entrada binária, saída binária) que, diferentemente do modelo NBND-FCFSMC, não suportam alfabetos não-binários que podem capturar a informação da decisão suave. Ademais, nesses trabalhos, o tipo de canal que corrompe a palavra-código é o mesmo utilizado no grafo de fatores do decodificador, o que resulta em um decodificador casado. Outros trabalhos relacionados incluem o desenvolvimento de detecção iterativa e métodos de decodificação coerente e não-coerente de canais com desvanecimento e memória [39].

Este trabalho apresenta um novo modelo FSMC não binário (entrada binária, saída  $2^\xi$ -ária) para capturar tanto a informação de decisão suave como a correlação temporal de um canal discreto com desvanecimento (*discrete fading channel* - DFC) com  $2^\xi$  níveis de quantização. Este modelo é uma generalização do GEC em que um canal discreto sem memória com alfabeto de saída com  $2^\xi$  símbolos é associado a cada estado. Em seguida, é analisado o desempenho de uma sistema de comunicação composto de um código LDPC com canal FSMC com decisão suave e um esquema de decodificação iterativa, baseado no algoritmo soma-produto, para a decodificação e estimação do canal de forma conjunta. Este esquema foi proposto em [37] para o canal GEC e é estendido, neste trabalho, para o canal não binário.

Desenvolve-se um algoritmo soma-produto sobre um grafo de fatores que representa a estrutura do código bem como a do canal e pode ser decomposto em dois subgrafos: o de canal e o de código. Este algoritmo usa uma estratégia de estimação-decodificação em que as mensagens de saída do grafo do código são combinadas de maneira a estimar a distribuição de probabilidade dos estados do canal. Por outro lado, a estimação do estado do canal é usada para estimar a palavra-código transmitida. O fluxo de mensagens a serem passadas através deste grafo é desenvolvido neste trabalho. Resultados de simulações quantificam o ganho de codificação obtido com o aumento do número de níveis do alfabeto de saída do canal. Os resultados indicam que explicitar tanto a memória do canal como a informação da decisão suave é mais vantajoso que ignorar qualquer uma das duas por meio do entrelaçamento ou decisão abrupta.

## 1.1 Contribuições da Tese

As seguintes contribuições do presente trabalho podem ser destacadas:

▷ Proposição da utilização do método de minimização da divergência de Kullback-Leibler para

estimação dos parâmetros de um modelo FSMC e comparação com outros dois métodos, o método de Wilhelmsson e Milstein e o algoritmo de Baum-Welch, já utilizados pela literatura.

- ▷ Aplicação de técnicas combinatoriais para prover ferramentas analíticas para avaliar a performance dos códigos RS no SCD, obtendo-se uma fórmula recursiva para o cálculo da probabilidade do modelo gerar  $m$  símbolos de erro em uma sequência de comprimento  $n$ , denotada por  $P(m, n)$ .
- ▷ Avaliação da pertinência de utilizar-se um modelo de canal de estados finitos Markovianos, mais especificamente os canais GEC, 3-NM e 4-NM, para reproduzir a sequência de erros de símbolo produzida pelo SCD.
- ▷ Proposição de um modelo de canal FSMC não binário e a incorporação da estrutura deste FSMC no processo de decodificação com o intuito de explorar a memória do canal.
- ▷ Desenvolvimento de um esquema de decodificação e estimação conjunta em um grafo de fatores e análise de desempenho de um código LDPC operando em canais com memória e decisão suave.

## 1.2 Organização da Tese

Este trabalho foi organizado conforme detalhado a seguir:

No Capítulo 2, é apresentada uma breve revisão dos principais conceitos sobre FSMC, cadeias de Markov e códigos corretores de erros. Além disso, são descritos dois importantes modelos FSMC: o GEC e o NM. Por fim, são abordados os principais conceitos de códigos corretores de erros utilizados nos capítulos seguintes.

No Capítulo 3, é realizada uma comparação entre três métodos de geração dos parâmetros dos modelos FSMC. Apresenta-se também um método enumerativo desenvolvido em [30], por meio do qual são desenvolvidas fórmulas recursivas para o cálculo da probabilidade  $P(m, n)$  dos modelos 3-NM e 4-NM.

No Capítulo 4, é avaliada a pertinência de utilizar-se o GEC para modelar um sistema de comunicação baseado no padrão IEEE 802.11. Também propõem-se modelos FSMC, mais especificamente modelos NM, bem como são realizadas comparações entre estatísticas geradas com os modelos e com a simulação do sistema de comunicação que deseja-se modelar.

No Capítulo 5, apresenta-se um modelo FSMC não binário para capturar tanto a informação de decisão suave como a correlação temporal de um canal DFC com  $2^5$  níveis de quantização.

Em seguida, é discutido um esquema de decodificação iterativa, baseado no algoritmo soma-produto para decodificação e estimação do canal de forma conjunta. Finalmente, analisa-se o desempenho de códigos LDPC em canais FSMC não binários.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões do trabalho e as propostas para trabalhos futuros.

O Apêndice A detalha o algoritmo de Baum-Welch.

O Apêndice B apresenta o desenvolvimento das equações que resultam nas fórmulas recursivas para o cálculo da probabilidade  $P(m, n)$  dos modelos 3-NM e 4-NM.

Por fim, o Apêndice C enumera os trabalhos científicos publicados com o conteúdo desta tese.

# 2

## CADEIAS DE MARKOV, CANAIS DE ESTADOS FINITOS E CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS

NESTE capítulo, são apresentadas algumas propriedades e definições acerca de processos Markovianos discretos e modelos FSMC que serão úteis para o entendimento do restante do trabalho. As informações expostas nas Seções 2.1 e 2.2 podem ser encontradas em [7, 20, 40]. Na Seção 2.3, serão introduzidos conceitos sobre um modelo FSMC largamente discutido na literatura, o GEC, bem como outros modelos utilizados neste trabalho, como os modelos Nascimento e Morte de ordem 3 e 4. Nas demais seções, será feita uma revisão resumida sobre alguns conceitos de códigos corretores de erros, necessários ao entendimento deste trabalho, a qual é baseada em [6, 41, 42].

### 2.1 Processos Markovianos Discretos

**Definição 2.1** *Um processo estocástico discreto é definido como sendo uma sequência  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  de variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro inteiro não negativo  $n$ . Cada variável aleatória  $S_n$  assume valores em um conjunto discreto  $\mathcal{J}_J = \{0, 1, \dots, J - 1\}$ , denominado espaço de estados.*

**Definição 2.2** *O processo estocástico  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  é uma cadeia de Markov de primeira ordem se satisfizer a propriedade de Markov, isto é, dado um valor de  $S_n$  (valor presente), os valores futuros  $S_s$ , com  $s > n$ , não são influenciados pelos valores passados  $X_r$ , com  $r < n$ . O processo  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  possui a propriedade de Markov se satisfizer a condição:*

$$P(S_{n+1} = i_{n+1} \mid S_n = i_n, S_{n-1} = i_{n-1}, \dots, S_0 = i_0) = P(S_{n+1} = i_{n+1} \mid S_n = i_n), \quad (2.1)$$

$$i_n \in \mathcal{J}_J \quad \forall n \geq 0.$$

A evolução da cadeia é descrita pela probabilidade  $P(S_{n+1} = j \mid S_n = i)$ , chamada probabilidade de transição, onde  $S_n$  é o estado da cadeia no tempo  $n$ . Se esta probabilidade condicional não depender do valor de  $n$ , então a cadeia tem a propriedade de homogeneidade. As cadeias de Markov consideradas no presente trabalho são homogêneas e de primeira ordem. Além disso, uma cadeia de Markov é irredutível se, partindo-se de um estado, qualquer outro estado puder ser alcançado em um número finito de transições. As probabilidades de transição podem ser representadas na forma matricial:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,J-1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,J-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{J-1,0} & p_{J-1,1} & \cdots & p_{J-1,J-1} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde o  $\{i, j\}$ -ésimo elemento da matriz é a probabilidade de transição de um passo  $p_{ij} = P(S_{n+1} = j \mid S_n = i)$ . A matriz  $\mathbf{P}$ , chamada matriz de probabilidade de transição, é uma matriz estocástica, isto é, para cada  $i, j$  no espaço de estados, satisfaz as propriedades:

$$p_{i,j} \geq 0$$

e

$$\sum_{j=0}^{J-1} p_{i,j} = 1.$$

Um processo estocástico é totalmente especificado se for conhecida sua função de distribuição conjunta. No caso de um processo de parâmetro discreto, deve-se determinar  $P(S_0 = i_0, S_1 = i_1, \dots, S_n = i_n)$ , para todo  $n \geq 0$  e todo  $i_n \in \mathcal{J}_J$ . Usando a propriedade da probabilidade condicional, obtém-se:

$$\begin{aligned}
P(S_0 = i_0, S_1 = i_1, \dots, S_n = i_n) &= P(S_n = i_n \mid S_{n-1} = i_{n-1}, \dots, S_1 = i_1, S_0 = i_0) \\
&P(S_{n-1} = i_{n-1} \mid S_{n-2} = i_{n-2}, \dots, S_1 = i_1, S_0 = i_0) \\
&\dots P(S_1 = i_1 \mid S_0 = i_0) P(S_0 = i_0). \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Se  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  for uma cadeia de Markov de primeira ordem, as probabilidades condicionais terão a forma:

$$P(S_{n+1} = i_{n+1} \mid S_n = i_n, S_{n-1} = i_{n-1}, \dots, S_0 = i_0) = P(S_{n+1} = i_{n+1} \mid S_n = i_n). \quad (2.4)$$

Definem-se as probabilidades do estado inicial por  $p_j = P(S_0 = j)$ , para todo  $j \in \mathcal{J}$ . Denota-se o vetor de probabilidades iniciais  $\mathbf{p}^{(0)}$  como um vetor coluna

$$\mathbf{p}^{(0)} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{J-1} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Devido à propriedade de Markov, a Equação (2.3) escreve-se:

$$P(S_0 = i_0, S_1 = i_1, \dots, S_n = i_n) = p_{i_0} p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{n-1}, i_n}. \quad (2.6)$$

**Definição 2.3** A matriz de probabilidades de transição em  $n$  passos, denotada por  $\mathbf{P}^{(n)}$ , é uma matriz cujos elementos são as probabilidades de transição em  $n$  passos, definidas por  $p_{ij}^{(n)} = P(S_n = j \mid S_0 = i) = P(S_{n+m} = j \mid S_m = i)$ .

**Definição 2.4** Define-se o período  $d(i)$  do estado  $i$  de uma cadeia de Markov como sendo o máximo divisor comum (mdc) dos possíveis valores de  $n \geq 1$  para os quais  $p_{ii}^{(n)} > 0$ , isto é,

$$d(i) = \text{mdc}\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}. \quad (2.7)$$

Se  $d(i) > 1$ , o estado é chamado periódico com período  $d(i)$ . Se  $d(i) = 1$ , o estado é chamado aperiódico. Equivalentemente,  $p_{ii}^{(n)} = 0$  exceto quando  $n$  é múltiplo de  $d(i)$ .

**Definição 2.5** Considera-se a igualdade  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ . As quantidades  $\pi_j$  são chamadas distribuições de probabilidades limites. Se este limite existir e não depender do estado inicial, estas quantidades indicam que a probabilidade de uma cadeia de Markov se encontrar no estado  $j$ , após um longo período, tende para  $\pi_j$ . Desta forma, a distribuição limite  $\mathbf{\Pi}^T = [\pi_0 \pi_1 \dots \pi_{J-1}]$ , na qual o sobrescrito  $[\cdot]^T$  indica a transposta da matriz, é a única solução não negativa das equações:

$$\pi_j = \sum_{l=0}^{J-1} \pi_l p_{lj}, \quad 0 \leq j \leq J-1 \quad (2.8)$$

$$\sum_{l=0}^{J-1} \pi_l = 1 \quad (2.9)$$

ou, na forma matricial:

$$\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P} = \mathbf{\Pi}^T. \quad (2.10)$$

Em uma cadeia de Markov irredutível e aperiódica, as probabilidades  $\pi_j$  existem e não dependem do estado inicial  $i$ . Então, a matriz  $\mathbf{P}^{(n)}$  irá convergir para uma matriz  $\mathbf{P}^{(\infty)}$  quando  $n \rightarrow \infty$ , onde cada linha dessa matriz é idêntica ao vetor  $\mathbf{\Pi}^T$ , com  $n$  sendo o número de estados do processo. Qualquer distribuição (vetor) que satisfaça (2.8), (2.9) e (2.10) é chamada de distribuição estacionária da cadeia de Markov, isto é:

$$\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{\Pi}^T, \forall n. \quad (2.11)$$

**Definição 2.6** Em um processo markoviano  $S_n$ , se a distribuição de estados no tempo  $n+1$  for igual à distribuição no tempo  $n$ , então essa distribuição é chamada de distribuição estacionária.

## 2.2 Propriedades de Canais Discretos

**Definição 2.7** Um canal de comunicação discreto é um sistema que possui um alfabeto finito de entrada  $\mathcal{X}$ , um alfabeto finito de saída  $\mathcal{Y}$  e uma probabilidade de transição  $[P_{Y^n|X^n}(y^n | x^n)]_{n=1}^{\infty}$ , ou seja, a probabilidade de receber uma  $n$ -upla  $y^n = (y_0 y_1 \dots y_{n-1}) \in \mathcal{Y}^n$  na saída do canal dado que  $x^n = (x_0 x_1 \dots x_{n-1}) \in \mathcal{X}^n$  foi enviado.

**Definição 2.8** Um canal discreto sem memória (DMC, discrete memoryless channel) satisfaz a seguinte propriedade:

$$P_{Y^n|X^n}(y^n | x^n) = \prod_{i=1}^n P_{Y_i|X_i}(y_i | x_i). \quad (2.12)$$

O DMC é completamente determinado pela matriz de probabilidades de transição do canal  $\mathbf{P} = [P(y | x)]$  para  $x \in \mathcal{X}$  e  $y \in \mathcal{Y}$ . Essa propriedade não é válida para canais com memória.

### 2.2.1 Canal de Comunicação Discreto

Assume-se um canal discreto binário (CD), cujas sequências de entrada, ruído e saída possuem o mesmo alfabeto  $\mathcal{X} = \mathcal{Z} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ , relacionadas pelo processo dado por

$$Y_k = X_k \oplus Z_k \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.13)$$

que é utilizado para modelar canais discretos binários com memória, em que  $\oplus$  denota a operação de adição módulo 2 e  $X_k$ ,  $Z_k$  e  $Y_k$  são, respectivamente, a entrada, o ruído e a saída do canal no tempo  $k$ . Se  $Z_k = 1$ , houve um erro na  $k$ -ésima transmissão ou, se  $Z_k = 0$ , a  $k$ -ésima transmissão foi realizada corretamente. A sequência  $Z_k$  é independente da sequência de entrada  $X_k$  e modela a dinâmica dos erros transmitidos pelo canal de comunicação. Assume-se que existe uma dependência estatística na ocorrência de erros no canal e denomina-se este tipo de canal com memória. Para o modelamento de canais com memória utiliza-se a classe de canais FSMC, que serão descritos na Subseção 2.2.2. Neste trabalho, assume-se que o processo de ruído  $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$  será gerado de acordo com os modelos descritos na Seção 2.3 (o GEC e os modelos NM). Denota-se  $P_{FSMC}(z_n) = P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots, Z_n = z_n)$ .

Segue-se do fato de que os processos de entrada e saída são independentes que, para todo  $n > 1$ , a probabilidade condicional de ordem  $n$  de um canal FSMC é descrita por

$$P_{FSMC}(y^n | x^n) = P_{FSMC}(z^n) \quad (2.14)$$

em que  $z^n = (z_1 \dots z_n)$  é um vetor de erro cujos componentes são dados por  $z_k = y_k \oplus x_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Assim, se no processo de modelamento a igualdade se verifica para todo  $n > 1$ , é possível afirmar que  $P_{CD}(y^n | x^n) = P_{FSMC}(y^n | x^n)$ . Então, o FSMC fornece uma representação alternativa para o CD. Deve-se registrar, ainda, que se  $\{Z_k\}$  não possui memória, este canal é modelado por um canal binário simétrico sem memória (BSC, *binary symmetric channel*).



### 2.2.2 Canal de Estados Finitos Markoviano

Seja  $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$  uma cadeia de Markov com um espaço de estados com  $J$  elementos  $\mathcal{J}_J = \{0, 1, \dots, J-1\}$ . Considera-se modelos FSMC em que as sequências de ruídos são geradas da seguinte forma: no  $k$ -ésimo intervalo, a cadeia transiciona do estado  $s_{k-1}$  para o estado  $s_k$ , com probabilidade de transição  $p_{s_{k-1}, s_k} = P(S_k = s_k | S_{k-1} = s_{k-1})$ , e gera um dígito de ruído  $z_k$ , independente de  $s_{k-1}$  e de dígitos de ruídos passados e futuros, com probabilidade  $b_{s_k, z_k} = P(Z_k = z_k | S_k = s_k)$ . É importante notar que não se pode especificar uma sequência de estados a partir da sequência de ruído, isto é, não se pode determinar se a cadeia está em um determinado estado  $s_k$  se apenas o dígito  $z_k$  é conhecido.

Deseja-se encontrar a probabilidade de ocorrer uma sequência de ruído  $z^n = (z_1 \dots z_n)$  de comprimento  $n$ . Então, pela lei da probabilidade total:

$$\begin{aligned} P(Z^n = z^n | S_0 = s_0) &= \sum_{s^n} P(Z^n = z^n, S^n = s^n | S_0 = s_0) \\ &= \sum_{s^n} P(Z^n = z^n | S^n = s^n, S_0 = s_0) P(S^n = s^n | S_0 = s_0) \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde  $s^n = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  é uma sequência de estados de comprimento  $n$ . Para simplificar a notação, utiliza-se  $P(X_n = x_n) \triangleq P(x_n)$ . Portanto, é possível escrever:

$$P(z^n | s_0) = \sum_{s^n} P(z^n | s^n, s_0) P(s^n | s_0). \quad (2.16)$$

Mas o processo  $z^n$  condicionado a  $s^n$  é um processo sem memória, ou seja:

$$\begin{aligned} P(z^n | s^n, s_0) &= P(z_1, z_2, \dots, z_n | s_0, s_1, \dots, s_n) \\ &= P(z_1 | s_0, \dots, s_n, z_2, \dots, z_n) P(z_2 | s_0, \dots, s_n, z_3, \dots, z_n) \dots P(z_n | s_0, \dots, s_n) \\ &= P(z_1 | s_1) P(z_2 | s_2) \dots P(z_n | s_n) = \prod_{k=1}^n P(z_k | s_k). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, substituindo (2.17) em (2.16), tem-se:

$$P(z^n | s_0) = \sum_{s^n} P(s^n | s_0) \prod_{k=1}^n P(z_k | s_k). \quad (2.18)$$

Pela propriedade de Markov, sabe-se que

$$P(s_n, s_{n-1}, \dots, s_1 | s_0) = \prod_{k=1}^n P(s_k | s_{k-1}) \quad (2.19)$$

o que, substituindo em (2.18), conduz a

$$\begin{aligned} P(z^n | s_0) &= \sum_{s^n} \prod_{k=1}^n P(z_k | s_k) P(s_k | s_{k-1}) \\ &= \sum_{s^n} \prod_{k=1}^n b_{s_k, z_k} p_{s_{k-1}, s_k}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Novamente usando a lei da probabilidade total, a probabilidade de uma sequência de ruído escreve-se:

$$P(z^n) = \sum_{s_0=0}^{J-1} P(z^n | s_0) P(s_0). \quad (2.21)$$

Considera-se a distribuição do estado inicial como sendo a distribuição estacionária dada pelo vetor  $\mathbf{\Pi}^T = [\pi_0 \pi_1 \dots \pi_{J-1}]$ . Substituindo (2.20) em (2.21), obtém-se um resultado final para a probabilidade de uma sequência de ruído:

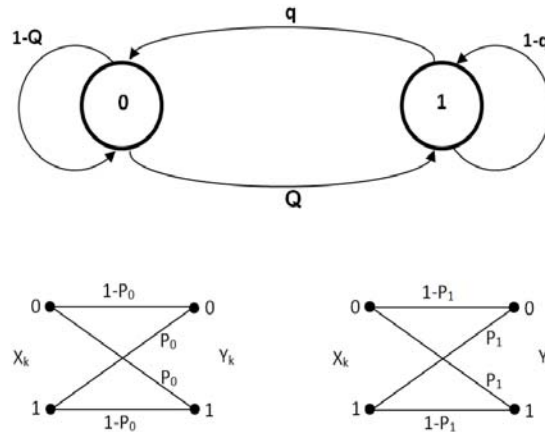
$$P(z^n) = \sum_{s_0=0}^{J-1} \pi_{s_0} \sum_{s^n} \prod_{k=1}^n b_{s_k, z_k} p_{s_{k-1}, s_k}. \quad (2.22)$$

É possível representar  $P(z^n)$  em uma forma matricial. Para isso, seja  $\mathbf{P}(z_k)$ ,  $z_k \in \{0, 1, 2\}$ , uma matriz  $J \times J$ , cujos  $(i, j)$ -ésimos elementos são  $P(z_k, s_k | s_{k-1}) = b_{s_k, z_k} p_{s_{k-1}, s_k}$ , isto é, cada elemento da matriz  $\mathbf{P}(z_k)$  é a probabilidade da cadeia transicionar do estado  $i$  para o estado  $j$  e gerar o dígito de ruído  $z_k$ . Usando-se estas matrizes, é possível escrever  $P(z^n)$  da seguinte forma:

$$P(z^n) = \mathbf{\Pi}^T \left( \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(z_k) \right) \mathbf{1} \quad (2.23)$$

onde  $\mathbf{1}$  é um vetor coluna com todos os elementos iguais a um. Duas classes de FSMC serão descritas a seguir.

**Figura 2.1:** Modelo GEC para canais com memória.



## 2.3 Canais de Estados Finitos Binários

### 2.3.1 O Canal Gilbert-Elliott

O GEC [18, 19] consiste de uma cadeia de Markov estacionária, homogênea, com dois estados. Quando a cadeia se encontra no estado 0,  $Z_k$  é igual a 1 (erro) com probabilidade  $P_0$ , ou 0 (sem erro) com probabilidade  $1 - P_0$ . Quando a cadeia se encontra no estado 1,  $Z_k$  é igual a 1 com probabilidade  $P_1$ , ou 0 com probabilidade  $1 - P_1$ . Por definição,  $P_0 < P_1$  e, por isso, os estados 0 e 1 são chamados de estados "bom" e "ruim", respectivamente. As probabilidades de transição da cadeia de Markov são  $p_{0,1} = Q$  e  $p_{1,0} = q$ . A Figura 2.1 mostra o diagrama de estados deste canal, no qual o processo de geração de erro associado a cada estado é representado por um BSC.

A matriz de transição de probabilidade é denotada por  $\mathbf{P}$ . Define-se a matriz  $\mathbf{P}(0)$  com o  $(i, j)$ -ésimo elemento igual a probabilidade do canal transicionar do estado  $i$  para o estado  $j$  e gerar o símbolo  $Z_k$  igual a zero. Uma definição similar é válida para a matriz  $\mathbf{P}(1)$ , para  $Z_k$  igual a 1. O vetor de estados estacionários é representado por  $\boldsymbol{\Pi}$ . As matrizes para o modelo GEC são dadas por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} (1-Q) & Q \\ q & (1-q) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} p_{0,0}b_{0,0} & p_{0,1}b_{1,0} \\ p_{1,0}b_{0,0} & p_{1,1}b_{1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-Q)(1-P_0) & Q(1-P_1) \\ q(1-P_0) & (1-q)(1-P_1) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} p_{0,0}b_{0,1} & p_{0,1}b_{1,1} \\ p_{1,0}b_{0,1} & p_{1,1}b_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-Q)P_0 & QP_1 \\ qP_0 & (1-q)P_1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \frac{q}{Q+q} & \frac{Q}{Q+q} \end{bmatrix}^T. \quad (2.27)$$

É possível calcular a probabilidade de qualquer sequência de erros utilizando (2.23). Como exemplo, supondo que se deseja calcular a probabilidade de um dígito ser igual a 1 em um dado intervalo, isto é,  $P(1) \triangleq P(Z_k = 1)$ . Assim,

$$\begin{aligned} P(1) &= \mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}(1) \mathbf{1} = [\pi_0 \pi_1] \begin{bmatrix} (1-Q)P_0 & QP_1 \\ qP_0 & (1-q)P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{q}{Q+q} P_0 + \frac{Q}{Q+q} P_1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

As matrizes (2.24)-(2.27) são usadas para derivar expressões para estatísticas do canal GEC, bem como para avaliar o desempenho de protocolos e de códigos corretores de erro operando em canais GEC.

A média, ou valor esperado, do processo  $\{Z_m\}_{k=0}^{\infty}$ , denotada por  $\mu$ , é:

$$\begin{aligned} \mu = \mathbf{E}[Z_m] &= 0P(0) + 1P(1) \\ &= \frac{q}{Q+q} P_0 + \frac{Q}{Q+q} P_1 \end{aligned} \quad (2.29)$$

e a variância é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mathbf{E}[Z_m^2] - \mu^2 &= 0^2P(0) + 1^2P(1) - \mu^2 \\ &= \frac{((P_1 Q + P_0 q)(Q + q - P_1 Q - P_0 q))}{(Q + q)^2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

A função autocorrelação, denominada de  $R[m]$ , é uma medida da interdependência estatística de um processo estacionário observado nos instantes  $k$  e  $k + m$ . A função autocorrelação de um processo discreto estacionário  $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$  binário é dada por [43]:

$$\begin{aligned} R[m] &= \mathbf{E}\{Z_k Z_{k+m}\} \\ &= \begin{cases} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \alpha \beta P(Z_k = \alpha, Z_{k+m} = \beta), & \text{se } m \neq 0 \\ \sigma^2 + \mu^2, & \text{se } m = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.31)$$

em que  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ . Utilizando-se (2.23), chega-se a:

$$P(Z_k = \alpha, Z_{k+m} = \beta) = \mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{P}^{|m|-1} \mathbf{P}(\beta) \mathbf{1}, \text{ para } m \neq 0. \quad (2.32)$$

Para o GEC, substitui-se as matrizes  $\mathbf{P}(0)$  e  $\mathbf{P}(1)$ , dadas em (2.25) e (2.26), em (2.32) e, após algumas simplificações, chega-se à seguinte expressão:

$$R[m] = (P(1))^2 + \frac{Qq(P_1 - P_0)^2}{(q + Q)^2} (1 - q - Q)^m \quad (2.33)$$

para  $m > 1$ . O coeficiente de correlação é dado por:

$$\text{Cor} = \frac{\mathbf{E}[(Z_k - \mu)(Z_{k+m} - \mu)]}{\sigma^2}. \quad (2.34)$$

Especificamente para o GEC, coeficiente de correlação é:

$$\text{Cor}_{\text{GEC}} = \frac{(1 - q - Q)(P_1 - P_0)^2 \pi_0 (1 - \pi_0)}{P(1)(1 - P(1))}.$$

Considera-se a transmissão de palavras-código de um código de bloco binário e linear, de comprimento  $N$  e capacidade de correção  $t_c$ . Seja  $P(m, n)$  a probabilidade de ocorrerem  $m$  erros em um bloco de comprimento  $n$ . A probabilidade de uma decodificação sem sucesso, denominada de PCE, é dada por:

$$\text{PCE} = 1 - \sum_{m=0}^{t_c} P(m, N). \quad (2.35)$$

Para o GEC, uma fórmula recursiva para  $P(m, n)$  é [44]:

$$\begin{aligned}
P(m, n) = & -c_1 P(m, n-1) - c_2 P(m-1, n-1) \\
& -c_3 P(m, n-2) - c_4 P(m-1, n-1) \\
& -c_5 P(m-2, n-2)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

em que

$$\begin{aligned}
c_1 &= Q(1 - P_0) + q(1 - P_1) - (2 - P_1 - P_0); \\
c_2 &= -[P_1(1 - q) + P_0(1 - Q)]; \\
c_3 &= (1 - P_1)(1 - P_0)(1 - q - Q); \\
c_4 &= (P_0 + P_1 + 2P_0P_1)(1 - q - Q); \\
c_5 &= P_1P_0(1 - q - Q)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned}
P(m, n) &= 0 \text{ para } m, n < 0, m > n \\
P(0, 0) &= 1 \\
P(0, 1) &= \frac{q}{q+Q}(1-g) + \frac{Q}{q+Q}(1-b) \\
P(1, 1) &= \frac{q}{q+Q}g + \frac{Q}{q+Q}b.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

A análise do protocolo de retransmissão ARQ GBN em canais FSMC foi realizada em [45]. No esquema Go-Back-N (GBN), pacotes são transmitidos sequencialmente. O transmissor não espera por uma confirmação para enviar o próximo pacote. Caso o pacote transmitido no slot  $i$  não seja recebido corretamente, este será retransmitido no slot  $i + N_{GBN}$ . Durante esse intervalo, denominado round-trip-delay,  $N_{GBN} - 1$  pacotes são transmitidos. O receptor analisa cada pacote recebido e, se nenhum erro é detectado, envia um ACK para o transmissor através do canal de retorno e o transmissor continua a transmitir. Caso contrário, um NACK é enviado. Quando um NACK é recebido, o transmissor interrompe a transmissão de novos pacotes, volta para o pacote referente ao NACK e retransmite este pacote e os  $N_{GBN} - 1$  pacotes sucessivos que foram transmitidos durante o round-trip-delay. Naturalmente, estes pacotes devem ser

armazenados no transmissor, ou seja, buffers devem ser fornecidos no transmissor. No receptor, quando o pacote é detectado com erro, os  $N_{GBN} - 1$  pacotes seguintes são descartados, não importando se estes contêm erros ou não. Por ignorar os pacotes que seguem a solicitação de retransmissão, *buffers* no receptor não são necessários, mas isto reduz a vazão. Em [45], foi desenvolvida uma fórmula para a vazão deste protocolo, denotada por  $\eta$ , para um esquema ARQ puro que usa um código de detecção de erros de comprimento  $N$ :

$$\eta = \frac{\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}(A) \mathbf{1}}{\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}(A) \mathbf{X} \left[ N_{GBN} \mathbf{P}(\bar{A}) (\mathbf{P}^N)^{N_{GBN}-1} \mathbf{X} + \mathbf{I} \right] \mathbf{P}(A) \mathbf{1}} \quad (2.39)$$

em que  $\mathbf{X} = \left( \mathbf{I} - \mathbf{P}(\bar{A}) (\mathbf{P}^N)^{N_{GBN}-1} \right)^{-1}$ ,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade,  $N_{GBN}$  é o tempo de atraso medido em número de pacotes do esquema GBN e  $\mathbf{P}(A)$  é a matriz que especifica o evento transmissão com sucesso de um pacote. No caso de um sistema ARQ puro usando um código detector de erro e desprezando a probabilidade de erros não detectáveis, define-se  $A$  como o conjunto contendo uma sequência de zeros de comprimento  $N$ . Assume-se que a ocorrência de qualquer outra sequência de erro é detectada e uma retransmissão é solicitada. As matrizes  $\mathbf{P}(A)$  e  $\mathbf{P}(\bar{A})$  são

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}^N(0) \quad \text{e} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}^N - \mathbf{P}^N(0). \quad (2.41)$$

Por fim, a probabilidade de ocorrer uma sequência com  $m$  transmissões corretas, dado uma incorreta,  $P(0^m | 1)$ , em um canal FSMC é expressa como

$$P(0^m | 1) = \frac{\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}(1) \mathbf{P}^m(0) \mathbf{1}}{\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}(1) \mathbf{1}}. \quad (2.42)$$

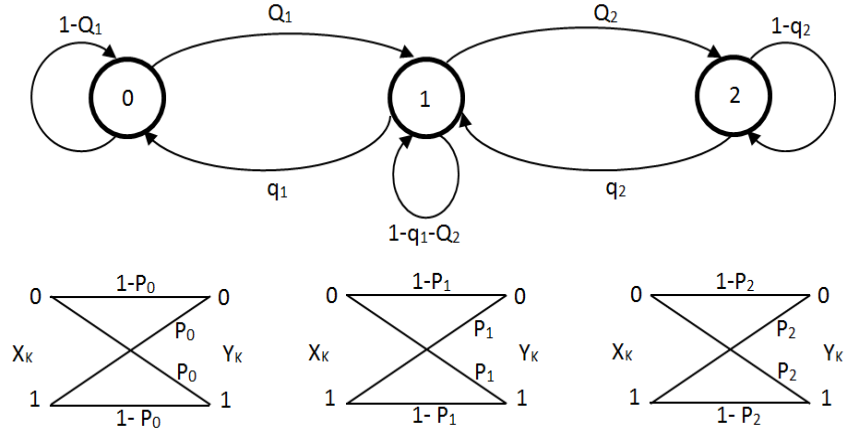
Estas estatísticas serão usadas nos próximos capítulos para validar canais FSMC que modelam um canal discreto.

## 2.4 Modelos Nascimento e Morte

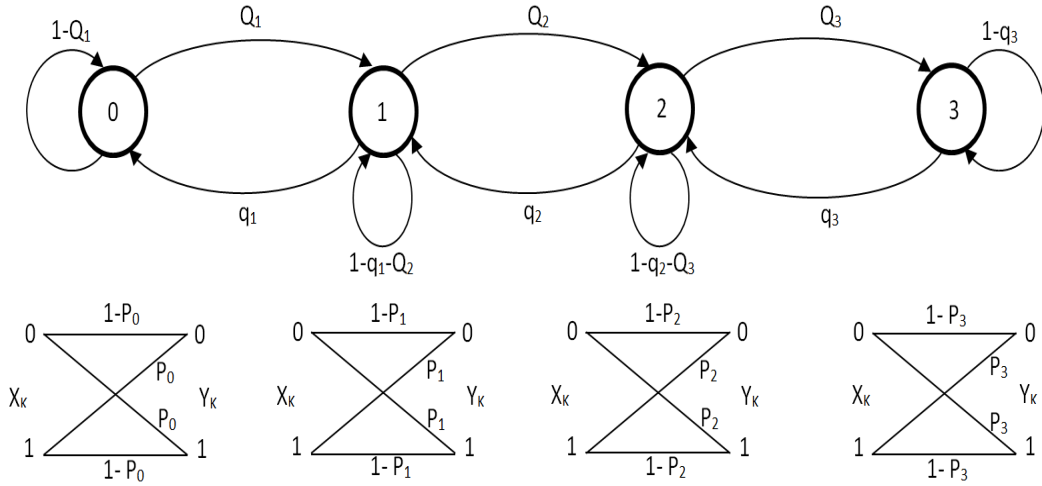
Modelos de Nascimento e Morte de ordem  $J$  ( $J$ -NM) são casos particulares de um FSMC em que a cadeia transiciona apenas para os estados vizinhos. Considerando-se que o modelo esteja no estado  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, J-2\}$ , a cadeia transiciona apenas para os estados  $i-1$  ou  $i+1$ , além de poder permanecer no estado em que se encontra. Quando a cadeia encontra-se

no estado 0, as transições possíveis são para os estados 0 ou 1. Da mesma forma, quando a cadeia encontra-se no estado  $J - 1$ , ela pode permanecer como está ou transicionar para o estado  $J - 2$ . As Figuras 2.2 e 2.3 mostram, respectivamente, o diagrama de estados de um 3-NM e de um 4-NM.

**Figura 2.2:** Modelo Nascimento e Morte de 3 estados.



**Figura 2.3:** Modelo Nascimento e Morte de 4 estados.



O vetor de probabilidades estacionárias  $\Pi$  possui cada um de seus elementos definido por

$$\pi_i = \alpha \prod_{j=0}^{J-i-2} p_{J-j-1, J-j-2} \prod_{l=0}^{i-1} p_{i-l-1, i-l} \quad (2.43)$$

em que  $i = 0, 1, \dots, J - 1$  e a constante de normalização  $\alpha$  deve ser escolhida para satisfazer:



$$\sum_{i=0}^{J-1} \pi_i = 1. \quad (2.44)$$

O modelo NM mais simples é o GEC, apresentado na seção anterior, doravante denominado 2-NM.

#### 2.4.1 O modelo 3-NM

O modelo 3-NM é definido pelas matrizes:

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} p_{0,0}b_{0,0} & p_{0,1}b_{1,0} & p_{0,2}b_{2,0} \\ p_{1,0}b_{0,0} & p_{1,1}b_{1,0} & p_{1,2}b_{2,0} \\ p_{2,0}b_{0,0} & p_{2,1}b_{1,0} & p_{2,2}b_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-Q_1)(1-P_0) & Q_1(1-P_1) & 0 \\ q_1(1-P_0) & (1-q_1-Q_2)(1-P_1) & Q_2(1-P_2) \\ 0 & q_2(1-P_1) & (1-q_2)(1-P_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} p_{0,0}b_{0,1} & p_{0,1}b_{1,1} & p_{0,2}b_{2,1} \\ p_{1,0}b_{0,1} & p_{1,1}b_{1,1} & p_{1,2}b_{2,1} \\ p_{2,0}b_{0,1} & p_{2,1}b_{1,1} & p_{2,2}b_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-Q_1)P_0 & Q_1P_1 & 0 \\ q_1P_0 & (1-q_1-Q_2)P_1 & Q_2P_2 \\ 0 & q_2P_1 & (1-q_2)P_2 \end{bmatrix}.$$

A matriz de probabilidade de transição da cadeia de Markov é dada por

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} 1-Q_1 & Q_1 & 0 \\ q_1 & 1-q_1-Q_2 & Q_2 \\ 0 & q_2 & 1-q_2 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

O vetor de probabilidade estacionária dos estados é

$$\boldsymbol{\Pi} = [\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2]^T = \left[ \frac{q_1 q_2}{Q_1 Q_2 + Q_1 q_2 + q_1 q_2} \quad \frac{Q_1 q_2}{Q_1 Q_2 + Q_1 q_2 + q_1 q_2} \quad \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 Q_2 + Q_1 q_2 + q_1 q_2} \right]^T. \quad (2.46)$$

#### 2.4.2 O modelo 4-NM

O 4-NM é definido por

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} p_{0,0}b_{0,0} & p_{0,1}b_{1,0} & p_{0,2}b_{2,0} & p_{0,0}b_{3,0} \\ p_{1,0}b_{0,0} & p_{1,1}b_{1,0} & p_{1,2}b_{2,0} & p_{0,0}b_{3,0} \\ p_{2,0}b_{0,0} & p_{2,1}b_{1,0} & p_{2,2}b_{2,0} & p_{0,0}b_{3,0} \\ p_{3,0}b_{0,0} & p_{3,1}b_{1,0} & p_{3,2}b_{2,0} & p_{3,0}b_{3,0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-Q_1)(1-P_0) & Q_1(1-P_1) & 0 & 0 \\ q_1(1-P_0) & (1-q_1-Q_2)(1-P_1) & Q_2(1-P_2) & 0 \\ 0 & q_2(1-P_1) & (1-q_2-Q_3)(1-P_2) & Q_3(1-P_3) \\ 0 & 0 & q_3(1-P_2) & (1-Q_3)(1-P_3) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} p_{0,0}b_{0,1} & p_{0,1}b_{1,1} & p_{0,2}b_{2,1} & p_{0,0}b_{3,1} \\ p_{1,0}b_{0,1} & p_{1,1}b_{1,1} & p_{1,2}b_{2,1} & p_{0,0}b_{3,1} \\ p_{2,0}b_{0,1} & p_{2,1}b_{1,1} & p_{2,2}b_{2,1} & p_{0,0}b_{3,1} \\ p_{3,0}b_{0,1} & p_{3,1}b_{1,1} & p_{3,2}b_{2,1} & p_{3,0}b_{3,1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-Q_1)P_0 & Q_1P_1 & 0 & 0 \\ q_1P_0 & (1-q_1-Q_2)P_1 & Q_2P_2 & 0 \\ 0 & q_2P_1 & (1-q_2-Q_3)P_2 & Q_3P_3 \\ 0 & 0 & q_3P_2 & (1-Q_3)P_3 \end{bmatrix}.$$

A matriz de probabilidade de transição da cadeia de Markov é dada por

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} 1-Q_1 & Q_1 & 0 & 0 \\ q_1 & 1-q_1-Q_2 & Q_2 & 0 \\ 0 & q_2 & 1-q_2-Q_3 & Q_3 \\ 0 & 0 & q_3 & 1-q_3 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

O vetor de probabilidade estacionária dos estados é

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Pi} &= [\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3]^T \\
&= \begin{bmatrix} \frac{q_1 q_2 q_3}{Q_1 Q_2 Q_3 + Q_1 q_2 q_3 + Q_1 Q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3} \\ \frac{Q_1 q_2 q_3}{Q_1 Q_2 Q_3 + Q_1 q_2 q_3 + Q_1 Q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3} \\ \frac{Q_1 Q_2 q_3}{Q_1 Q_2 Q_3 + Q_1 q_2 q_3 + Q_1 Q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3} \\ \frac{Q_1 Q_2 Q_3}{Q_1 Q_2 Q_3 + Q_1 q_2 q_3 + Q_1 Q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3} \end{bmatrix}. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

## 2.5 Códigos de Bloco Lineares

Seja uma fonte de informação cuja saída consiste de uma sequência de dígitos  $q$ -ários. Essa sequência é segmentada em mensagens de comprimento fixo, denotadas por  $\mathbf{u}$ , que consistem de  $K$  dígitos de informação. Dessa forma, existem  $q^K$  mensagens distintas. O codificador transforma cada mensagem  $\mathbf{u}$  em uma  $N$ -upla  $\mathbf{v}$ , chamada de palavra-código, com  $N > K$ , por meio da inclusão de  $N - K$  dígitos redundantes, também conhecidos como dígitos de paridade. Maiores detalhes podem ser encontrados em [41].

**Definição 2.9** *Um código de bloco linear  $C(N, K)$  sobre  $GF(q)$  é um subespaço de dimensão  $K$  do espaço vetorial  $V_N^\xi$  de todas as  $N$ -uplas  $\xi$ -árias.*

A redundância de um código linear é frequentemente expressa em termos de sua taxa  $R_c$ , dada por  $R_c = K/N$ .

### 2.5.1 Peso de Hamming

**Definição 2.10** *Seja  $\mathbf{v} = (v_0 v_1 \dots v_{N-1})$  uma  $N$ -upla  $\xi$ -ária. O peso de Hamming de  $\mathbf{v}$  é definido como o número de posições não nulas de  $\mathbf{v}$ .*

### 2.5.2 Distância de Hamming

**Definição 2.11** *A distância de Hamming entre duas  $N$ -uplas  $\mathbf{v} = (v_0 v_1 \dots v_{N-1})$  e  $\mathbf{s} = (s_0 s_1 \dots s_{N-1})$ , denotada por  $d(\mathbf{v}, \mathbf{s})$  é o número de posições em que as duas diferem.*

### 2.5.3 Distância mínima de um código de bloco

A distância mínima de um código de bloco  $C(N, K)$  denotada por  $d_{min}$ , é a mínima distância de Hamming entre todos os pares distintos de palavras-código de  $C(N, K)$ , ou seja,

$$d_{min} = \min\{d(\mathbf{v}, \mathbf{s}); \mathbf{v}, \mathbf{s} \in C(N, K), \mathbf{v} \neq \mathbf{s}\}. \quad (2.49)$$

Um código de bloco com distância mínima  $d_{min}$  pode detectar todos os padrões de erro de peso menor ou igual a  $(d_{min} - 1)$ . Um código de bloco com distância mínima  $d_{min}$  pode corrigir todos os padrões de  $t_c \leq \lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor$ , em que  $\lfloor x \rfloor$  denota o maior inteiro menor ou igual a  $x$ .

#### 2.5.4 Matriz geradora

Seja o conjunto  $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{K-1}$  uma base do subespaço  $C(N, K)$ , de forma que toda palavra-código  $\mathbf{v}$  em  $C(N, K)$  é uma combinação linear deste conjunto. É possível construir uma matriz cujas linhas são formadas por estas  $K$  palavras-código linearmente independentes.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{K-1} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

onde  $\mathbf{g}_i = [g_{i,0}g_{i,1} \dots g_{i,N-1}]$ , para  $g_{i,j} \in GF(q)$ ,  $0 \leq i < K - 1$  e  $0 \leq j < N - 1$ . Seja  $\mathbf{u} = (u_0u_1 \dots u_{K-1})$  uma mensagem a ser codificada. A palavra-código correspondente pode ser obtida fazendo-se  $\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{G}$ . Como as linhas de  $\mathbf{G}$  geram o código linear, a matriz é chamada de matriz geradora do código.

#### 2.5.5 Matriz de verificação paridade

Para qualquer matriz  $\mathbf{G}$ , de dimensões  $N \times K$ , com  $K$  linhas linearmente independentes, existe uma matriz de paridade  $\mathbf{H}$  com  $N - K$  linhas linearmente independentes, tal que qualquer outro vetor no espaço de linhas de  $\mathbf{G}$  é ortogonal ao espaço de linhas de  $\mathbf{H}$ , e qualquer vetor ortogonal ao espaço de linhas de  $\mathbf{H}$  está no espaço de linhas de  $\mathbf{G}$ . Assim, uma  $N$ -upla  $\mathbf{v}$  é uma palavra-código de um código gerado por  $\mathbf{G}$  se, e somente se,  $\mathbf{v}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ .

## 2.6 Códigos Cíclicos

Códigos cíclicos são uma classe de códigos lineares que possuem uma estrutura algébrica que facilita seu estudo e implementação. Um código cíclico pode ser implementado utilizando-se

codificadores e decodificadores baseados em registradores de deslocamento de alta velocidade. A família de códigos cíclicos inclui códigos bastante utilizados em aplicações práticas, como os códigos RS e BCH.

**Definição 2.12** *Um código linear  $C(N, K)$  é cíclico se qualquer deslocamento cíclico de uma palavra-código também é uma palavra-código. Portanto, se  $(v_0v_1 \dots v_{N-1})$  está em  $C(N, K)$ , então  $(v_{N-1}v_0v_1 \dots v_{N-2})$  também está.*

Para uma descrição algébrica de códigos cíclicos, associa-se ao vetor  $\mathbf{v} = (v_0v_1 \dots v_{N-1})$  o polinômio  $v(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2 + \dots + v_{N-1}x^{N-1}$ , que pertence a  $R_N = GF(q)[x]/(x^N - 1)$ , o anel de polinômios módulo  $x^N - 1$ . Multiplicando-se  $v(x)$  por  $x$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} xv(x) &= v_0x + v_1x^2 + \dots + v_{N-2}x^{N-1} + v_{N-1}x^N \\ &= v_{N-1} + v_0x + v_1x^2 + \dots + v_{N-2}x^{N-1} \end{aligned} \quad (2.51)$$

que é o polinômio associado ao vetor  $(v_{N-1}v_0v_1 \dots v_{N-2})$ . Portanto, uma multiplicação por  $x$  em  $R_N$  corresponde a um deslocamento cíclico. Dessa forma, é possível afirmar que um código cíclico é um ideal em  $R_N$ . Quando for usada a representação polinomial para uma palavra-código, esta será referida como polinômio-código.

### 2.6.1 Polinômio Gerador

Um ideal principal é um ideal que consiste de todos os múltiplos de um polinômio fixo  $g(x)$  por elemento de  $R_N$ . O polinômio  $g(x)$  é chamado de gerador. O próximo teorema mostra que, de fato, todo ideal em  $R_N$  é um ideal principal, isto é, todo código cíclico tem um polinômio gerador.

**Teorema 2.1** *Seja  $C(N, K)$  um código cíclico linear.*

- ▷ *No conjunto de polinômios-código de  $C(N, K)$ , existe um único polinômio mônico  $g(x)$  com menor grau.  $g(x)$  é chamado de polinômio gerador de  $C(N, K)$ .*
- ▷ *Todo polinômio-código  $v(x)$  em  $C$  pode ser expresso unicamente como  $c(x) = u(x)g(x)$ , onde  $g(x)$  é o polinômio gerador de  $C(N, K)$  de grau  $N - K$  e  $u(x)$  é um polinômio de grau menor que  $N - K$  em  $GF(q)[x]$ , denominado de polinômio mensagem.*
- ▷ *O polinômio gerador de  $C(N, K)$  é um fator de  $x^N - 1$  em  $GF(q)[x]$ .*

▷ Se  $g(x) = g_0 + g_1x + \cdots + g_{N-K}x^{N-K}$ , então  $C(N, K)$  é gerado pelas linhas da matriz  $\mathbf{G}$ , dada por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdot & \cdot & \cdot & g_{N-K} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & g_2 & \cdot & \cdot & \cdot & g_{N-K} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & \cdot & \cdot & g_{N-K} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

### 2.6.2 Polinômio de Paridade $h(x)$

Outro polinômio associado aos códigos cíclicos é o polinômio de paridade, definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x^N - 1}{g(x)} \in GF(q)[x]; \\ h(x) &= h_0 + h_1x + \cdots + h_Kx^K, \text{ para } h_K \neq 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Se  $v(x)$  é uma palavra-código de  $C(N, K)$ , então:

$$v(x)h(x) = u(x)g(x)h(x) = u(x)(x^N - 1) \equiv 0 \text{ em } R_N \quad (2.54)$$

de forma que:

$$\sum_{i=0}^{N-1} v_i h_{j-i} = 0, \text{ para } 1 \leq j \leq N - K. \quad (2.55)$$

Portanto, (2.53) define as equações de paridade do código. Pode-se obter, a partir de  $h(x)$ , a matriz de verificação de paridade do código cíclico  $\mathbf{H}$ , definida por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_K & h_{K-1} & h_{K-2} & \cdot & \cdot & \cdot & h_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & h_K & h_{K-1} & h_{K-2} & \cdot & \cdot & \cdot & h_0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & h_K & h_{K-1} & h_{K-2} & \cdot & \cdot & h_0 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

## 2.7 Códigos BCH

Os códigos BCH formam uma classe de códigos cíclicos bastante robustos. A sigla decorre dos nomes de seus autores, Bose, Ray-Chaudhuri and Hocquenghem, que o propuseram em 1959 [46, 47]. Esta classe é uma generalização dos códigos de Hamming para correção de erros múltiplos. Os códigos BCH são códigos cíclicos definidos em termos das raízes de seus polinômios geradores.

**Definição 2.13** *Seja  $C(N, K)$  um código cíclico sobre  $GF(q)$ , em que  $\text{mdc}(N, q) = 1$ . Seja  $b$  a ordem de  $q \bmod N$  e seja  $\alpha$  um elemento primitivo em  $GF(q^b)$ .  $C(N, K)$  é um código BCH com distância projetada  $\delta$  se o polinômio gerador  $g(x)$  de  $C(N, K)$  é o produto dos polinômios mínimos distintos dos  $\delta - 1$  elementos consecutivos  $\alpha^c, \alpha^{c+1}, \dots, \alpha^{c+\delta-2}$ , para algum inteiro  $c \geq 1$ . Se  $N = q^b - 1$ , com  $b$  um inteiro positivo, o código BCH é primitivo.*

Seja  $\Phi_i(x)$  e  $N_i$  o polinômio mínimo e a ordem de  $\alpha^{c+i}$ , respectivamente. O polinômio gerador  $g(x)$  de um código BCH corretor de  $t_c$  erros é o mínimo múltiplo comum (mmc) dos polinômios mínimos das  $\delta - 1$  raízes consecutivas  $\alpha^c, \alpha^{c+1}, \dots, \alpha^{c+\delta-2}$ . Desta forma, obtém-se uma expressão para o polinômio gerador  $g(x)$  e para o comprimento do código  $N$  dados, respectivamente, por:

$$g(x) = \text{mmc}\{\Phi_c(x), \Phi_{c+1}(x), \dots, \Phi_{c+\delta-2}(x)\} \quad (2.57)$$

e

$$N = \text{mmc}\{N_0, N_1, \dots, N_{\delta-2}\}. \quad (2.58)$$

para quaisquer inteiros  $b$  e  $t_c$  ( $t_c < 2^b - 1$ ), existe um código BCH binário com os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} N &= 2^b - 1 \\ N - K &< bt_c \\ d_{\min} &\geq \delta = 2t_c + 1. \end{aligned} \quad (2.59)$$

## 2.8 Códigos Reed-Solomon

Os códigos Reed-Solomon (RS) são utilizados em várias aplicações, desde comunicações espaciais a *compact discs*. Os códigos RS são uma sub-classe dos códigos BCH, apesar de não possuírem algumas características desses, como, por exemplo, capacidade de correção de erros em surtos.

**Definição 2.14** *Um código RS é um código BCH cujos símbolos que constituem uma palavra-código pertencem a  $GF(q^b)$ , onde  $b$  é um inteiro positivo. Um código RS primitivo tem comprimento  $N = q^b - 1$  e dimensão  $K$ . Se  $\alpha$  é um elemento primitivo de  $GF(q^b)$ , o polinômio gerador de um código RS primitivo é dado por:*

$$g(x) = \prod_{i=c}^{c+\delta-2} (x - \alpha^i) \quad (2.60)$$

Observa-se de (2.60) que o polinômio gerador  $g(x)$  tem grau  $\delta - 1$ . Mas, de acordo com a segunda assertiva do Teorema 2.1,  $g(x)$  tem grau  $N - K$ . Logo,  $\delta = N - K + 1$ . A cota BCH implica que  $d_{min} \geq \delta = N - K + 1$ . Por outro lado, a cota de Singleton implica que  $d_{min} \leq N - K + 1$ . Logo, um código RS  $(N, K)$  tem distância mínima  $d_{min} = N - K + 1$ . Portanto, é possível dizer que os códigos RS fazem parte da família de códigos MDS (códigos de distância máxima separáveis), por satisfazerem a cota de Singleton com igualdade.

## 2.9 Códigos LDPC

Os códigos LDPC (*low-density parity-check*) foram inventados por R. Gallager, no início dos anos 60, e são uma classe de códigos de bloco lineares que operam próximo ao limite estabelecido por Shannon [48] em um vasto conjunto de canais de transmissão de dados.

Um código LDPC é constituído por uma matriz de verificação de paridade  $\mathbf{H}$ , de dimensões  $N - K \times N$ , cuja densidade de elementos não-nulos (1s) é baixa, ou seja,  $\mathbf{H}$  é uma matriz esparsa. Essa propriedade permite que seja possível implementar facilmente algoritmos iterativos de decodificação com complexidade linear ao comprimento do código [41], conforme será visto na Seção 2.11. Também a distância mínima do código, que é a quantidade de elementos não nulos em uma coluna ou linha da matriz  $\mathbf{H}$ , cresce linearmente com o comprimento do código ( $N$ ). Um código LDPC é dito regular se sua matriz  $\mathbf{H}$  tem peso de colunas  $d_c$  e peso de linhas  $d_l$ , em que  $d_l = d_c(N/(N - K))$  e  $d_l \ll (N - K)$ . A taxa desta classe de códigos satisfaz  $r \geq 1 - d_c/d_l$



(com igualdade se e somente se as linhas de  $\mathbf{H}$  são linearmente independentes). Os parâmetros  $d_l, d_c, N$  e  $K$  especificam uma família de códigos LDPC.

A partir da matriz  $\mathbf{H}$ , é possível determinar se uma palavra binária  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  pertence ao código, o que ocorrerá se a relação  $\mathbf{x}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$  for satisfeita. Dessa expressão derivam um conjunto de equações conhecidas como equações de paridade.

## 2.10 Representação Gráfica

Tanner [49] introduziu os grafos bipartites para descrever famílias de códigos que são generalizações dos códigos LDPC de Gallager [50]. Uma função  $g(x_1, x_2, \dots, x_N)$  é dita fatorável se puder ser decomposta como um produto de  $n$  funções  $f_j(X_j)$ , em que  $X_j \subset \{x_1, \dots, x_N\}$ . Neste contexto, a função  $g(x_1, x_2, \dots, x_N)$  é denominada função global, e os fatores  $f_j(X_j)$  são funções locais. Esta decomposição é representada a seguir:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N f_j(X_j). \quad (2.61)$$

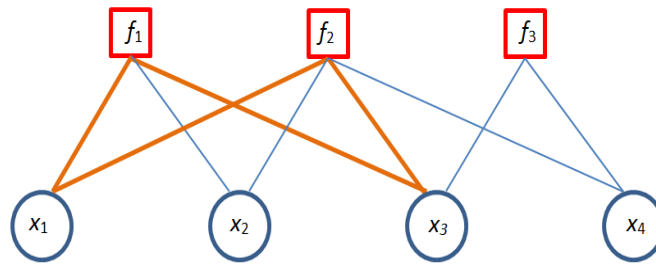
É possível representar graficamente, de forma simples, a relação entre essas funções por meio do uso de um grafo de fatores.

### 2.10.1 Grafo de Fatores

Um grafo  $\mathcal{G}$  é definido por um par  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , em que  $\mathcal{V}$  é o seu conjunto de vértices e  $\mathcal{E}$  é o seu conjunto de ramos. Um grafo é dito biparticionado se o seu conjunto de vértices  $\mathcal{V}$  pode ser decomposto em dois conjuntos disjuntos  $\mathcal{V}_1$  e  $\mathcal{V}_2$ , com  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ , tais que cada ramo no conjunto de ramos  $\mathcal{E}$  une um vértice em  $\mathcal{V}_1$  a um vértice em  $\mathcal{V}_2$ .

Um caminho de um grafo  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  é uma sequência finita de ramos  $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{m-1}, v_m\}$ , em que  $v_i \in \mathcal{V}$  e cada  $\{v_i, v_j\} \in \mathcal{E}$ . Um caminho é denominado um caminho fechado, ou um ciclo, se o nó inicial do primeiro ramo da sequência é igual ao nó terminal do último ramo  $v_0 = v_m$ . O comprimento do ciclo é o número de ramos que formam o ciclo. Um exemplo de ciclo em um grafo é exibido na Fig. 2.4, em que um ciclo é formado pelos ramos destacados.

Um grafo de fatores é um grafo composto da seguinte maneira: a cada variável  $x_j$  associa-se um nó no grafo, chamado nó de variável, e a cada fator  $f_j(X_j)$  um nó, chamado nó de função. Um nó de variável será conectado por um ramo a um nó de função se e somente se

**Figura 2.4:** Grafo de Fatores.

esta variável aparecer neste fator. Esta construção implica que um grafo de fatores é um grafo biparticionado, ou seja, seus nós podem ser divididos em dois conjuntos, em que os ramos têm sempre como extremidades um nó de variável e um nó de função.

A função a seguir é um exemplo de uma função fatorável e sua representação em um grafo de fatores é mostrada na Fig. 2.4:

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1, x_2, x_3)f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)f_3(x_3, x_4). \quad (2.62)$$

É possível utilizar uma função fatorável para determinar se um determinado vetor é uma palavra de um código  $C(N, K)$ . Para tanto, seja  $\lambda(x)$  uma função que mapeia o domínio  $\mathcal{X}$  em uma imagem  $\{0, 1\}$ , ou seja, a função característica de um código corretor de erros. Ela assume o valor 0 se pelo menos uma equação de paridade não for satisfeita e 1 se todas as equações de paridade forem satisfeitas, isto é:

$$\lambda(x) = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_N) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x}\mathbf{H}^T = 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.63)$$

A função característica pode ser fatorada em um produto de  $N - K$  funções, em que  $K$  é o número de bits de informação, em que cada uma das funções corresponde a uma equação de verificação de paridade. Como a função característica é uma função fatorável, esta pode ser representada como um grafo de fatores que possui o número de nós de variável igual ao número de colunas da matriz  $\mathbf{H}$ , e o número de nós de função igual ao número de equações de paridade  $(N - K)$ . Nesse caso, o grafo é denominado de grafo de Tanner e os nós de variável passam a ser chamados de nós de bit e os nós de função de nós de checagem. Um grafo de Tanner de um código tem um nó de bit  $j$  conectado a um nó de checagem  $i$  sempre que um elemento  $h_{ij}$

da matriz de verificação de paridade  $\mathbf{H}$  for igual a 1. Assim, um grafo de Tanner tem  $N - K$  nós de checagem, sendo um para cada equação de verificação de paridade (ou linha da matriz  $\mathbf{H}$ ), e  $N$  nós de bit, sendo um para cada bit da palavra-código.

Por meio da utilização de grafos é possível visualizar as limitações que definem um código. Ademais, os grafos especificam os algoritmos de decodificação iterativa [51]. Neste tipo de algoritmo, objetiva-se calcular probabilidades associadas a cada símbolo recebido fazendo uso de troca de informações entre nós de variável e nós de função. Outros componentes correlatos de um sistema de comunicações, como a fonte e o canal, podem ser modelados com o uso de grafos que, conectados ao grafo do código, permitem o modelamento completo de um receptor.

## 2.11 Algoritmo Soma-Produto

O algoritmo soma-produto (ASP) é um algoritmo de decodificação sub-ótimo, introduzido por Gallager em 1960 [50], cujo objetivo é marginalizar uma função com relação a todas as variáveis envolvidas nela. Assim, o ASP calcula, iterativamente, uma aproximação desta marginalização para cada uma das variáveis. Se o grafo não contiver ciclos, é possível computar as várias funções marginais associadas a uma dada função global, o que implicará em uma decodificação exata.

Em [51] foi introduzida uma notação em que se enfatiza as variáveis em que a soma não ocorre, com vistas à representação do cálculo de marginalização de uma função:

$$\sum_{\sim x_i} h(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) \triangleq \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \sum_{x_N} h(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N). \quad (2.64)$$

Desta forma, a marginalização de uma função  $g(x_1, \dots, x_N)$  com relação à variável  $x_i$  é dada por:

$$g_i(x_i) \triangleq \sum_{\sim x_i} g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N). \quad (2.65)$$

O ASP se utiliza da fatoração da função a ser marginalizada, juntamente com a propriedade de distributividade da multiplicação, para reduzir consideravelmente este esforço computacional. O conjunto de variáveis que participam da função  $f$  serão denotados por  $\mathcal{N}(f)$ , e o conjunto de funções das quais a variável  $x$  participa por  $\mathcal{M}(x)$ . Também será denotado por  $\mathcal{N}(f) \setminus x$  o conjunto  $\mathcal{N}(f)$  com a variável  $x$  excluída e  $\mathcal{M}(x) \setminus f$  o conjunto  $\mathcal{M}(x)$  com a função  $f$  excluída. Seja  $\mu_{x \rightarrow f}(x)$  a mensagem enviada do nó  $x$  para o nó  $f$  e  $\mu_{f \rightarrow x}(x)$  a mensagem do nó  $f$  para

o nó  $x$ . As equações de atualização do ASP baseiam-se na troca de mensagens dadas por [51]:

▷ Mensagem de um nó de variável para um nó de função:

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in \mathcal{N}(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x). \quad (2.66)$$

▷ Mensagem de um nó de função para um nó de variável:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left( f(\mathcal{N}(f)) \prod_{y \in \mathcal{N}(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(x) \right). \quad (2.67)$$

## 2.12 O ASP Aplicado a Mensagens em Razão de Verossimilhança

Para o caso em que as mensagens trocadas entre os nós do grafo de fatores no ASP são vetores binários, é possível expressar a mensagem em termos de um único parâmetro. Este parâmetro pode ser a razão entre as componentes do vetor, a qual é denominada razão de verossimilhança. No entanto, esta quantidade tem uma faixa dinâmica muito ampla, e pode provocar instabilidades no algoritmo. Para circunvir este inconveniente, comumente é utilizado na prática o logaritmo desta quantidade, ao qual se refere como logaritmo de razão de verossimilhança (LLR, *log-likelihood ratio*). Este tipo de mensagem é expressa em termos das componentes da mensagem em forma vetorial da seguinte maneira:

$$P(x) \triangleq \ln \left( \frac{1 - p(x=0)}{p(x=0)} \right) = \ln \left( \frac{p(x=1)}{p(x=0)} \right). \quad (2.68)$$

A transformação inversa da LLR pode ser obtida diretamente de (2.68):

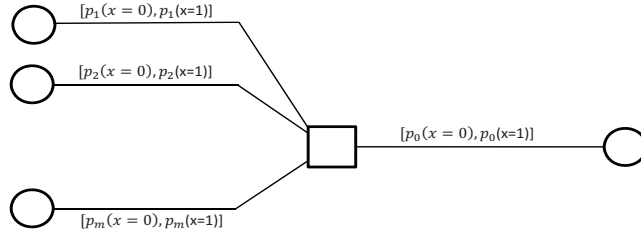
$$p(x=0) = \frac{1}{1 + e^{P(x)}}. \quad (2.69)$$

As mensagens passadas pelo ASP em LLR modificam-se para as formas a seguir:

▷ As mensagens originadas em nós de variável são transformadas para a soma das mensagens que chegam ao nó, pelo fato das mensagens estarem em forma logarítmica:

$$M_{x \rightarrow f}(x) = \sum_{h \in \mathcal{N}(f) \setminus x} M_{h \rightarrow x}(x). \quad (2.70)$$

**Figura 2.5:** Mensagem enviada a partir de um nó de função.



Dado um nó de função de variáveis binárias em um grafo de fatores, em que as mensagens incidentes são  $[p_j(x=0), 1 - p_j(x=0)]$ , com  $j = 1, \dots, m$ , e a mensagem de saída é  $[p_0(x=0), 1 - p_0(x=0)]$ , estando  $p_j(x=0)$  associado ao nível de confiabilidade de  $x_j$  valer 0, conforme ilustrado na Fig. 2.5, a seguinte relação é válida:

$$1 - 2p_0(x=0) = \prod_{i=1}^m (1 - 2p_i(x=0)). \quad (2.71)$$

▷ Para as mensagens originadas em nós de função, observa-se primeiramente a seguinte identidade nas componentes da mensagem em forma vetorial:

A partir de (2.69), obtém-se:

$$1 - 2p_0(x=0) = \frac{1 - e^{P_0(x)}}{1 + e^{P_0(x)}} = \tanh\left(\frac{P_0(x)}{2}\right). \quad (2.72)$$

Obtém-se então a expressão para as mensagens enviadas dos nós de função aos nós de variável em forma de LLR substituindo-se (2.72) em (2.71):

$$M_{f \rightarrow x}(x) = 2 \tanh^{-1} \left( \prod_{y \in \mathcal{M}(x) \setminus f} \tanh\left(\frac{M_{x \rightarrow y}(x)}{2}\right) \right). \quad (2.73)$$

A expressão (2.73) é conhecida como a regra da tangente hiperbólica. Em sistemas práticos, esta regra é utilizada pelo uso de aproximações numéricas de (2.67) ou de variantes desta [52].

### 2.12.1 Utilização do ASP no Processo de Decodificação em Canais Sem Memória

A decodificação de um código de bloco  $C(N, K)$  baseada no ASP é feita símbolo a símbolo. O processo de decodificação consiste primeiramente em representar a distribuição de probabilidade conjunta de  $x^n = (x_0, \dots, x_{N-1})$  condicionadas à saída do canal  $y^n = (y_0, \dots, y_{N-1})$ . Uma vez obtido o grafo de fatores a partir da matriz  $\mathbf{H}$  e das probabilidades de transição do canal

sem memória  $p(y_n|x_n)$ , o ASP funciona de acordo com os seguintes passos:

1. Inicialização - O ASP se inicia pelos nós de verificação de paridade, que são nós folha. Cada um deles passa ao seu nó de variável adjacente uma mensagem LLR inicial  $M_{f \rightarrow x}(x_n) = M(y_n|x_n) = \log(P(y_n|x_n = 0)/P(y_n|x_n = 1))$ . Os respectivos nós de variável retransmitem aos seus nós adjacentes (excluindo os nós folha) a mensagem:

$$\begin{aligned} M_{x \rightarrow f}(x_n) &= M(y_n|x_n) \\ &= \log(p(y_n|x_n = 0)/p(y_n|x_n = 1)). \end{aligned}$$

em que  $f \in \mathcal{M}(x)$ .

2. Atualização - No processo de atualização, os nós de verificação de paridade recebem as mensagens  $M_{x \rightarrow f}(x)$  e atualizam as mensagens  $M_{f \rightarrow x}(x)$  conforme a seguinte equação:

$$M_{f \rightarrow x}(x_n) = 2 \tanh^{-1} \left[ \prod_{t \in \mathcal{N}(f) \setminus x_n} \tanh \left( \frac{M_{t \rightarrow f}}{2} \right) \right]. \quad (2.74)$$

Para o caso dos nós de variável a atualização das mensagens é :

$$M_{x \rightarrow f}(x_n) = M(y_n|x_n) + \sum_{v \in \mathcal{M}(x) \setminus f} M(v \rightarrow x_n).$$

3. Estimação da palavra recebida - O decodificador utiliza-se da soma das mensagens transmitidas por todos os nós de verificação de paridade conectados à variável  $x_n$  para determinar a informação a posteriori sobre o símbolo  $x_n$ :

$$\Lambda_n = M(y_n|x_n) + \sum_{v \in \mathcal{M}(x_n)} M_{v \rightarrow x}(x_n).$$

A decisão de  $\hat{x}_n$  para o símbolo  $x_n$  é feita baseada na seguinte condição:

$$\hat{x}_n = \begin{cases} 0, & \text{se } \Lambda_n \geq 0 \\ 1, & \text{se } \Lambda_n < 0. \end{cases}$$

Se o número máximo de iterações for completado ou se o vetor  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{N-1})$  satisfizer a condição  $\hat{\mathbf{x}}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ , o algoritmo é finalizado e apresenta o vetor  $\hat{\mathbf{x}}$  como palavra decodificada. Caso isso não ocorra, o algoritmo repete os passos 2 e 3 até que uma destas condições seja satisfeita. No caso da primeira condição ser atendida será decodificado o último vetor  $\hat{\mathbf{x}}$  estimado, mesmo que este não seja uma palavra-código. As mensagens iniciais do ASP que

são as LLRs denotados por  $M(y_n|x_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , são calculadas a partir do modelo do canal. Será determinada, a seguir, essa LLR para dois modelos de canal: BSC e AWGN.

Para o caso de um canal BSC com probabilidade de transição  $p$ , calcula-se o logaritmo da razão de verossimilhança da seguinte forma:

$$M(y_n|x_n) = \begin{cases} \log \frac{p}{1-p}, & \text{se } y_n = 1 \\ \log \frac{1-p}{p}, & \text{se } y_n = 0. \end{cases}$$

Considera-se um canal AWGN com entrada binária cujo o alfabeto é  $\{-1, +1\}$ , e o vetor recebido  $y = (y_1, \dots, y_N) \in R^N$ . As LLRs são calculadas usando as funções densidades de probabilidade Gaussiana de médias  $\pm 1$  e variância  $\sigma^2$  da seguinte forma:

$$p_{y_n|x_n=0}(y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{(y_n-1)^2}{2\sigma^2}}$$

e

$$p_{y_n|x_n=1}(y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{(y_n+1)^2}{2\sigma^2}}.$$

A mensagem inicial processada pelo ASP,  $M(y_n|x_n)$ , é dada por:

$$\begin{aligned} M(y_n|x_n) &= \log \left( \frac{p_{y_n|x_n=0}(y_n)}{p_{y_n|x_n=1}(y_n)} \right) \\ &= \log \left( e^{\left( -\frac{(y_n-1)^2}{2\sigma^2} + \frac{(y_n+1)^2}{2\sigma^2} \right)} \right) \\ &= -\frac{(y_n-1)^2}{2\sigma^2} + \frac{(y_n+1)^2}{2\sigma^2} \\ &= \frac{-(y_n^2 - 2y_n + 1) + (y_n^2 + 2y_n + 1)}{2\sigma^2} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} y_n. \end{aligned}$$

# 3

## AVALIAÇÃO DE MÉTODOS DE GERAÇÃO DE PARÂMETROS DE MODELOS DE CANAIS DE ESTADOS FINITOS

UM problema fundamental na área de modelamento de canais é encontrar um método eficiente para achar os parâmetros de um modelo FSMC de tal forma que este tenha um comportamento estatístico semelhante ao canal que se deseja modelar.

O objetivo deste capítulo consiste em comparar a precisão de três métodos para estimação dos parâmetros de um modelo FSMC, mais especificamente o canal GEC, de modo a tentar reproduzir o comportamento estatístico de um DFC, descrito a seguir. Nesse contexto, o método proposto por Wilhelmsson e Milstein [28], aqui chamado de WM, e o algoritmo de Baum-Welch [29], denominado de BW, já utilizados na literatura, são comparados com um terceiro método, a minimização da divergência de Kullback-Leibler [22], doravante chamado de KL, cuja utilização para esse fim é uma proposta deste trabalho. A precisão dos modelos obtidos com cada técnica será avaliada comparando-se curvas da função autocorrelação, da vazão do protocolo GBN e da probabilidade de uma decodificação sem sucesso de um código de bloco, geradas tanto pelo DFC e quanto pelo modelo GEC.. Ainda neste capítulo, são empregadas técnicas da teoria de enumeração de sequências discretas para enumerar as probabilidades de eventos de interesse para o cálculo do desempenho. Tais probabilidades são denotadas como coeficientes de uma série de potências, denominada de série geradora. Com a utilização dessas técnicas, são desenvolvidas expressões inéditas de recorrência para o cálculo de  $P(m, n)$  para



os modelos 3-NM e 4-NM.

O método WM é largamente utilizado na literatura [53–57] para modelar canais com desvanecimento usando modelos GEC. O algoritmo BW, por sua vez, é um procedimento iterativo que maximiza uma função de verossimilhança e pode ser usado em qualquer FSMC. A precisão deste método depende das condições iniciais dos parâmetros do FSMC e uma convergência para um máximo global não é assegurada. Propõe-se, ainda, um método para estimar os parâmetros do GEC que minimiza a divergência de Kullback-Leibler entre duas medidas de probabilidade produzidas pelo DFC e pelo GEC.

### 3.1 Canal Discreto com Desvanecimento

Considera-se um DFC composto por um modulador BPSK, um canal com desvanecimento Rayleigh correlacionado no tempo, não seletivo em frequência e com ruído aditivo Gaussiano branco, e um demodulador coerente com quantização de  $\xi$  bits. A envoltória complexa do desvanecimento  $\tilde{G}(t) = \tilde{G}_I(t) + j\tilde{G}_Q(t)$  é um processo Gaussiano complexo, estacionário no sentido amplo, com média zero,  $\mathbf{E}[\tilde{G}(t)] = 0$  e segundo momento normalizado,  $\mathbf{E}[|\tilde{G}(t)|^2] = 1$ . As componentes em quadratura  $\tilde{G}_I(t)$  e  $\tilde{G}_Q(t)$  são processos Gaussianos mutuamente independentes que possuem a mesma função covariância que, adotando-se o modelo de desvanecimento de Clarke, pode ser expressa como [58, 59]

$$C(\tau) = \mathbf{E}\{\tilde{G}^*(t)[\tilde{G}(t + \tau)]\} = J_0(2\pi f_D \tau) \quad (3.1)$$

em que  $J_0(x)$  é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero e  $f_D$  é a máxima frequência Doppler. Para um instante de tempo fixo,  $t = kT$ , a envoltória do desvanecimento  $A_k \triangleq \sqrt{\tilde{G}_I^2(kT) + \tilde{G}_Q^2(kT)}$  (em que  $1/T$  é a taxa de sinalização) tem função densidade de probabilidade Rayleigh, que é dada por:

$$f_{A_k}(a) = 2ae^{-a^2}. \quad (3.2)$$

Sejam  $\mathcal{X} = \{0, 1\}$  e  $\mathcal{Y} = \{0, 1, \dots, 2^q - 1\}$  os alfabetos de entrada e de saída, respectivamente, do canal. O processo de entrada do DFC é  $\{X_k\}$ ,  $X_k \in \mathcal{X}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . A  $k$ -ésima amostra do sinal recebido é dada por:

$$R_k = \sqrt{E_s} A_k S_k + N_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

em que  $E_s$  é a energia do sinal transmitido,  $\{A_k\}$  é o ruído multiplicativo,  $S_k \in \{2X_k - 1\}$  e  $\{N_k\}$  é uma variável aleatória Gaussiana com média zero e variância  $N_0/2$ . Define-se a relação sinal-ruído média do sinal recebido por  $\text{SNR} = E_s/N_0$ . A variável aleatória amostrada  $R_k$  é demodulada e quantizada com um quantizador de  $\xi$  bits que fornece a saída do canal  $Y_k \in \mathcal{Y}$ , de acordo com a operação:

$$Y_k = j, \text{ se } R_k \in (T'_{j-1}, T'_j) \quad (3.4)$$

para  $j \in \mathcal{Y}$ . Os limitantes  $T'_j$  são uniformemente espaçados com passo de quantização  $\Delta$ , satisfazendo [27]:

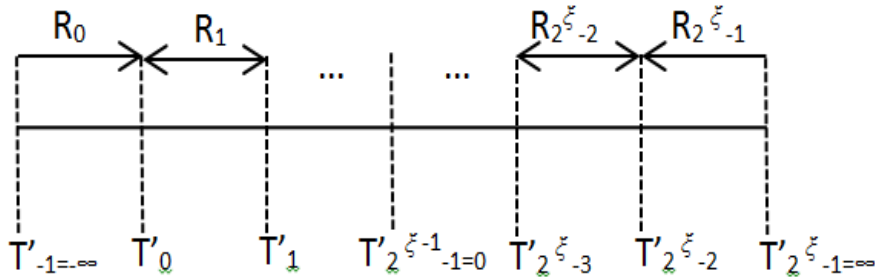
$$T'_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } j = -1 \\ (j + 1 - 2^{\xi-1})\Delta, & \text{se } j = 0, 1, \dots, 2^\xi - 2 \\ \infty, & \text{se } j = 2^\xi - 1. \end{cases}$$

A Figura 3.1 ilustra o referido mapeamento. Definindo-se o passo normalizado do quantizador por  $\delta \triangleq \Delta/\sqrt{E_s}$  e o limiar normalizado por  $T_j \triangleq T'_j/\sqrt{E_s}$ , é possível escrever  $T_j = (j + 1 - 2^{\xi-1})\delta$ , para  $j = 0, 1, \dots, 2^\xi - 2$ . A probabilidade condicional  $q_{i,j}(a_k) = P(Y_k = j \mid X_k = i, A_k = a_k)$ , em que  $i \in \mathcal{X}, j \in \mathcal{Y}$  e  $a_k \in [0, \infty)$ , pode ser determinada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} q_{i,j}(a_k) &= P(T'_{j-1} < R_k < T'_j \mid X_k = i, A_k = a_k) \\ &= P(T_{j-1} - (2i - 1)a_k < \frac{N_k}{\sqrt{E_s}} < T_j - (2i - 1)a_k) \\ &= Q\left(\sqrt{2\text{SNR}}(T_{j-1} - (2i - 1)a_k)\right) - Q\left(\sqrt{2\text{SNR}}(T_j - (2i - 1)a_k)\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que  $\text{SNR} = \frac{E_s}{N_0}$  é a relação sinal-ruído e  $Q(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_x^\infty \exp\{-t^2/2\} dt$ . Pela simetria

**Figura 3.1:** Regiões de decisão para um canal discreto com  $2^\xi$  níveis de quantização.



da constelação BPSK e das regiões de decisão, é possível observar de (3.5) que  $q_{i,j}(a_k) = q_{1-i,2\xi-1-j}(a_k)$ . Então

$$q_{i,j}(a_k) = q_{0, \frac{j-(2\xi-1)i}{(-1)^i}}(a_k) \quad (3.6)$$

para  $i \in \mathcal{X}$ ,  $j \in \mathcal{Y}$ . Para o inteiro  $n > 1$ , seja  $P(y^n | x^n, a^n) \triangleq P(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, A_1 = a_1, \dots, A_n = a_n)$ . Então,

$$P(y^n | x^n, a^n) = \prod_{k=1}^n q_{x_k, y_k}(a_k) = \prod_{k=1}^n q_{0, \frac{y_k - (2\xi-1)x_k}{(-1)^{x_k}}}(a_k).$$

O DFC pode, então, ser especificado pela seguinte probabilidade condicional:

$$\begin{aligned} P_{DFC}(y^n | x^n) &\triangleq P(Y^n = y^n | X^n = x^n) \\ &= \mathbf{E}_{A_1 \dots A_n} \left[ \prod_{k=1}^n q_{0, \frac{y_k - (2\xi-1)x_k}{(-1)^{x_k}}}(A_k) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

em que  $y^n = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $x^n = (x_1, \dots, x_n)$ .

A função de autocorrelação para o DFC,  $R[m]$ , é dada pela equação (3.8), em que  $\rho = J_0(2\pi m f_D T)$ , em que  $f_D T$  é a frequência Doppler normalizada [45]. Assim, o canal DFC é descrito por quatro parâmetros, quais sejam: SNR,  $f_D T$ ,  $\xi$  e  $\delta$ . No caso específico de um DFC binário ( $\xi = 1$ ), tratado neste capítulo, esse canal é descrito por dois parâmetros: SNR e  $f_D T$ .

## 3.2 Estimação de Parâmetros do modelo GEC

Nesta seção, utiliza-se o GEC para modelar o DFC descrito anteriormente, na Seção 3.1. A precisão dos modelos obtidos com as três técnicas de estimação de parâmetros consideradas será avaliada via comparação das estatísticas e métricas de desempenho descritas nesta seção com as obtidas pelo canal de comunicações. São descritos dois métodos largamente utilizados para estimar os parâmetros de modelos GEC, o WM e o BW, que são comparados com um método alternativo, proposto neste trabalho, que consiste na estimação de parâmetros baseada

$$R[m] = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2}{\sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \frac{E_s}{N_0} (\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2) + \left(\frac{E_s}{N_0}\right)^2 (1 - \rho^2)} d\theta_1 d\theta_2. \quad (3.8)$$

na minimização da divergência.

### 3.2.1 O Método WM

O método WM para estimação de parâmetros de um GEC [28], considera  $\alpha_t$  e  $\gamma_t$  como limiares dos níveis de amplitude e da SNR, respectivamente, para os quais o canal muda de estado. A SNR instantânea ( $\gamma$ ) é uma variável aleatória exponencial com função densidade de probabilidade  $p(\gamma)$  dada por:

$$p(\gamma) = \frac{1}{\bar{\gamma}} e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}} \quad \gamma \geq 0 \quad (3.9)$$

em que  $\bar{\gamma}$  é a SNR. As probabilidades de estado estacionárias do GEC são calculadas como a fração de tempo em que  $\gamma$  encontra-se acima ou abaixo de  $\gamma_t$ , isto é [28]:

$$\pi_1 = \int_0^{\gamma_t} \frac{1}{\bar{\gamma}} e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}} d\gamma = 1 - e^{-\frac{\gamma_t}{\bar{\gamma}}} = 1 - e^{-\rho^2} \quad (3.10)$$

em que  $\rho^2 = \frac{\gamma_t}{\bar{\gamma}}$ . Analogamente

$$\pi_0 = \int_{\gamma_t}^{\infty} \frac{1}{\bar{\gamma}} e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}} d\gamma = e^{-\frac{\gamma_t}{\bar{\gamma}}} = e^{-\rho^2}. \quad (3.11)$$

Em seguida, considera-se o tempo médio em que a amplitude do sinal permanece abaixo de  $\alpha_t$  e iguala-se ao tempo médio que o GEC permanece no estado ruim, uma vez tendo entrado nele. Assim, é possível encontrar [28]

$$q = \frac{\rho f_D T \sqrt{2\pi}}{e^{-\rho^2} - 1} \quad (3.12)$$

$$Q = \rho f_D T \sqrt{2\pi}. \quad (3.13)$$

As probabilidades condicionais de erro de cada estado do GEC são calculadas como probabilidades de erro de um canal com desvanecimento Rayleigh condicionadas a probabilidade do canal estar no respectivo estado [28]:

$$P_1 = \frac{1}{\pi_1} \int_0^{\gamma_t} p(\gamma) P_e(\gamma) d\gamma \quad (3.14)$$

e

$$P_0 = \frac{1}{\pi_0} \int_{\gamma_t}^{\infty} p(\gamma) P_e(\gamma) d\gamma \quad (3.15)$$

em que  $P_e(\gamma) = Q(\sqrt{2\gamma})$  é a probabilidade de erro do DFC para um dado valor de  $\gamma$ .

A Tabela 3.1 mostra os parâmetros do GEC obtidos para um DFC com  $f_D T = 10^{-3}$ , um

valor típico para um canal com desvanecimento lento, e para cinco valores de SNR (0, 5, 10, 15 e 20 dB), com três valores de  $\gamma_t$  para cada SNR.

**Tabela 3.1:** Valores dos parâmetros do GEC estimados pelo método WM que modelam um DFC com  $f_D T = 10^{-3}$ .

Parâmetros do DFC	$q$	$Q$	$P_0$	$P_1$
$\gamma_t = -2$ dB, SNR=0 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0019	0,0022	0,1293	0,3187
$\gamma_t = 0$ dB, SNR=0 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0025	0,0014	0,1004	0,2863
$\gamma_t = 2$ dB, SNR=0 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0031	0,00081	0,0691	0,2563
$\gamma_t = 3$ dB, SNR=5 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0019	0,0022	0,0302	0,2092
$\gamma_t = 5$ dB, SNR=5 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0025	0,0014	0,0155	0,1712
$\gamma_t = 7$ dB, SNR=5 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0031	0,00081	0,0056	0,1418
$\gamma_t = 8$ dB, SNR=10 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0019	0,0022	0,0012	0,0974
$\gamma_t = 10$ dB, SNR=10 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0025	0,0014	0,00018	0,0730
$\gamma_t = 12$ dB, SNR=10 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0031	0,00081	0,00001	0,0581
$\gamma_t = 13$ dB, SNR=15 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0019	0,0022	$4,8e^{-7}$	0,0344
$\gamma_t = 15$ dB, SNR=15 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0025	0,0014	$1,7e^{-9}$	0,0255
$\gamma_t = 17$ dB, SNR=15 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0031	0,00081	$1,7e^{-9}$	0,0202
$\gamma_t = 18$ dB, SNR=20 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0019	0,0022	$1e^{-12}$	0,0112
$\gamma_t = 20$ dB, SNR=20 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0025	0,0014	$1e^{-12}$	0,0083
$\gamma_t = 22$ dB, SNR=20 dB, $f_D T = 10^{-3}$	0,0031	0,00081	$1e^{-12}$	0,0066

A escolha do valor ótimo de  $\gamma$  para cada SNR depende da estatística utilizada para a avaliação, o que será mostrado na Seção 3.3.

### 3.2.2 O Método BW

O algoritmo BW [29], detalhado no Apêndice A, é um algoritmo iterativo que visa estimar a matriz de transição de probabilidade e as probabilidades condicionais de geração de erros de um FSMC, baseado em uma sequência de erros observada. Uma característica importante é que o seu tempo de execução depende de vários fatores como a ordem do modelo e o comprimento da sequência de erros utilizada [60, 61]. Para cada valor dos parâmetros do DFC ( $f_D T$  e SNR), uma sequência de erro do DFC é gerada por simulação (o tamanho da amostra é fixado em  $S = 3 \times 10^7$  bits) e os parâmetros do GEC são estimados usando este algoritmo. A Tabela 3.2 mostra os parâmetros do GEC obtidos para um DFC com  $f_D T = 10^{-3}$  e para quatro valores de SNR.

### 3.2.3 O Método KL

O método proposto neste trabalho usa uma medida de distância entre duas medidas de probabilidade,  $P_{\text{DFC}}(Z^\ell)$  e  $P_{\text{GEC}}(Z^\ell)$ , para estimar os parâmetros do DFC. A medida adotada

**Tabela 3.2:** Valores dos parâmetros do GEC estimados pelo algoritmo BW que modelam um DFC com  $f_D T = 10^{-3}$ .

Parâmetros do DFC	$q$	$Q$	$P_0$	$P_1$
SNR = 5 dB	0,0054	0,0022	0,0111	0,1990
SNR = 10 dB	0,0084	0,0013	0,0019	0,1634
SNR = 15 dB	0,0133	0,0007	0,0003	0,1464
SNR = 20 dB	0,0241	0,0004	0,0001	0,1499

é a divergência de Kullback-Leibler, que é expressa da seguinte forma [22]:

$$D(P_{\text{DFC}} \parallel P_{\text{GEC}}) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} D_\ell(P_{\text{DFC}}(Z^\ell) \parallel P_{\text{GEC}}(Z^\ell))$$

em que  $\frac{1}{\ell} D_\ell(P_{\text{DFC}}(Z^\ell) \parallel P_{\text{GEC}}(Z^\ell))$  é a divergência normalizada de  $\ell$ -ésima ordem entre as distribuições  $P_{\text{DFC}}(Z^\ell)$  e  $P_{\text{GEC}}(Z^\ell)$ :

$$D_\ell(P_{\text{DFC}}(Z^\ell) \parallel P_{\text{GEC}}(Z^\ell)) = \sum_{Z^\ell \in \{0,1\}^\ell} P_{\text{DFC}}(Z^\ell) \log_2 \frac{P_{\text{DFC}}(Z^\ell)}{P_{\text{GEC}}(Z^\ell)} \quad (3.16)$$

em que  $P_{\text{DFC}}(Z^\ell)$  é obtida via simulação do DFC e  $P_{\text{GEC}}(Z^\ell)$  é calculada matricialmente usando (2.23). O método proposto consiste em escolher os quatro parâmetros do GEC que minimizem (3.16) para um valor de  $\ell$  fixo, com a restrição que o DFC e o GEC tenham o mesmo coeficiente de correlação e a mesma probabilidade de ocorrer um erro, isto é,  $\text{Cor}_{\text{DFC}} = \text{Cor}_{\text{GEC}}$  e  $P_{\text{DFC}}(1) = P_{\text{GEC}}(1)$ , para  $\ell$  fixo. A Tabela 3.3 mostra os parâmetros obtidos com a minimização de  $D_{10}(P_{\text{DFC}}(Z^{10}) \parallel P_{\text{GEC}}(Z^{10}))$ .

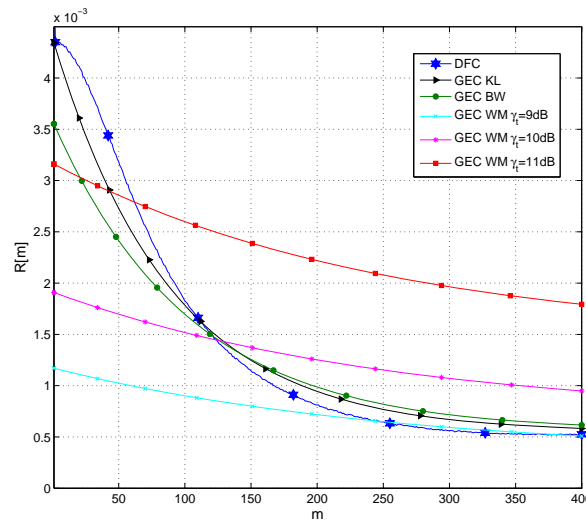
**Tabela 3.3:** Valores dos parâmetros do GEC estimados pela minimização da divergência de Kullback-Leibler de  $\ell$ -ésima ordem que modelam um DFC com  $f_D T = 10^{-3}$ ,  $\ell = 10$ .

Parâmetros do DFC	$q$	$Q$	$P_0$	$P_1$
SNR = 5 dB	0,01048	0,00274	0,01560	0,25000
SNR = 10 dB	0,01038	0,00085	0,00550	0,24000
SNR = 15 dB	0,02056	0,00057	0,00150	0,23000
SNR = 20 dB	0,00190	0,00001	0,00050	0,22000

### 3.3 Resultados

Para mensurar a exatidão de cada método de estimação dos parâmetros de um GEC, será feita uma comparação de algumas estatísticas do DFC e dos GEC estimados por cada uma das três técnicas.

**Figura 3.2:** Função autocorrelação de um GEC que aproxima um DFC com  $f_D T = 10^{-3}$  e  $\text{SNR} = 10$  dB.

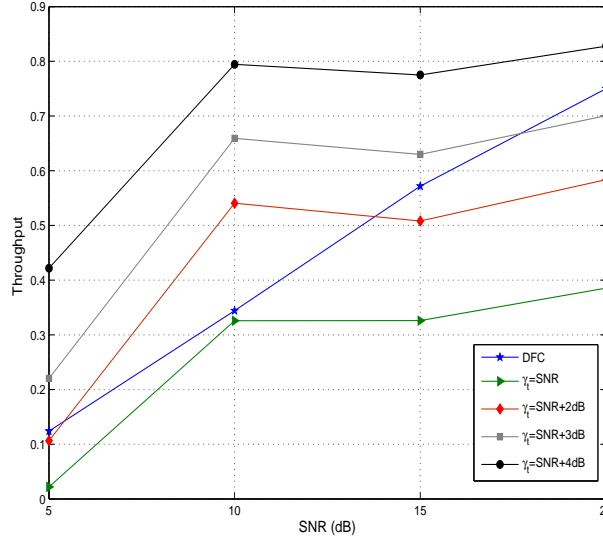


Na Figura 3.2 são mostradas as curvas da função autocorrelação para um DFC com  $f_D T = 10^{-3}$  e  $\text{SNR} = 10$  dB e os respectivos GEC estimados com os três métodos. Para os modelos obtidos com o WM, são mostradas curvas para três valores de  $\gamma_t$ . Observa-se que os modelos gerados por WM não geram uma boa aproximação para a curva do DFC (para qualquer valor de  $\gamma_t$ ), enquanto o método KL apresenta a melhor aproximação. Para valores elevados de  $m$ , as curvas convergem para a autocorrelação de um canal sem memória.

A vazão do protocolo GBN foi introduzida na Seção 2.3. Essa estatística é utilizada nesta seção para comparar os modelos avaliados. Assim, para o DFC, a vazão e a PCE são calculadas via simulação. Para realizar uma comparação entre os métodos usando a vazão de um protocolo GBN, deve-se encontrar, inicialmente, um valor para o limiar  $\gamma_t$  do método WM para cada valor de SNR considerado, de modo a maximizar a aproximação da estatística trabalhada. Na Figura 3.3 é possível verificar que dado um valor de SNR existe um  $\gamma_t$  que melhor aproxima a vazão do DFC. Nesta figura foram utilizados os seguintes valores de  $\gamma_t$ : SNR, SNR + 2 dB, SNR + 3 dB, SNR + 4 dB. Por exemplo, pode-se verificar nesta figura que, para SNR = 10 dB, a melhor aproximação é atingida com  $\gamma_t = \text{SNR}$ . A Tabela 3.4 resume os valores dos parâmetros dos GEC encontrados para o valor de  $\gamma_t$  selecionado.

A Figura 3.4 compara as curvas da vazão do DFC e de modelos GEC com parâmetros que foram estimados por cada um dos três métodos. Para valores de SNR até 10 dB, o método WM se mostra mais vantajoso. O método BW é o mais adequado para valores de SNR maiores

**Figura 3.3:** Comparação da vazão do protocolo GBN do DFC e de GEC estimados pelo método WM para um DFC com  $f_D T = 10^{-3}$ ,  $N_{GBN} = 10$  e  $N = 80$ .



**Tabela 3.4:** Valores dos parâmetros do GEC calculados pelo método WM que aproximam a vazão do DFC com  $f_D T = 10^{-3}$ .

Parâmetros do DFC	$q$	$Q$	$P_0$	$P_1$
SNR = 5 dB ( $\gamma_t = 7$ dB)	$3,1e^{-3}$	$8,1e^{-4}$	$5,6e^{-3}$	$14,18e^{-2}$
SNR = 10 dB ( $\gamma_t = 10$ dB)	$2,5e^{-3}$	$1,4e^{-3}$	$1,8e^{-4}$	$7,3e^{-2}$
SNR = 15 dB ( $\gamma_t = 17$ dB)	$3,1e^{-3}$	$8,1e^{-4}$	$1,7e^{-9}$	$2,02e^{-2}$
SNR = 20 dB ( $\gamma_t = 23$ dB)	$3,5e^{-3}$	$5e^{-4}$	$1e^{-12}$	$6,1e^{-3}$

de 15 dB.

Para realizar uma comparação da PCE entre os métodos, fez-se necessário estudar um valor conveniente para o limiar  $\gamma_t$  do método WM para cada valor de SNR considerado, de forma que, dado um valor de SNR, existe um  $\gamma_t$  que melhor aproxima a PCE do DFC. A Tabela 3.5 resume os valores dos parâmetros dos GEC encontrados para o valor de  $\gamma_t$  selecionado.

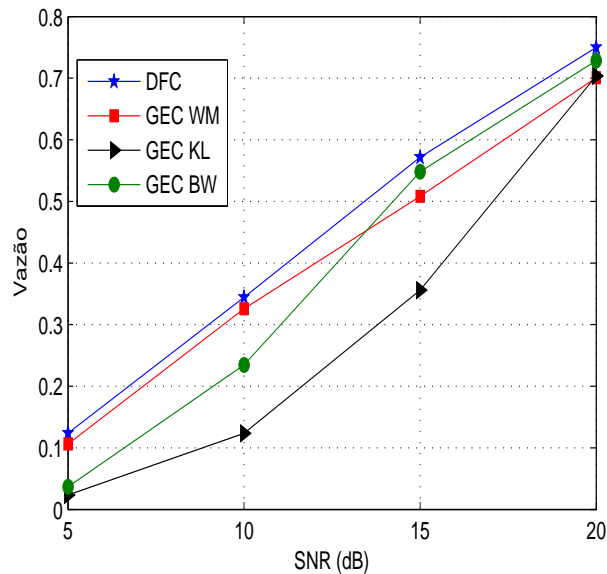
**Tabela 3.5:** Valores dos parâmetros do GEC calculados pelo método WM que aproximam a PCE do DFC com  $f_D T = 10^{-3}$ .

Parâmetros do DFC	$q$	$Q$	$P_0$	$P_1$
SNR = 5 dB ( $\gamma_t = 5$ dB)	0,0031	0,00081	0,0056	0,1418
SNR = 10 dB ( $\gamma_t = 8$ dB)	0,0019	0,0022	0,00012	0,0974
SNR = 15 dB ( $\gamma_t = 9$ dB)	0,0012	0,0043	0,00018	0,0719
SNR = 20 dB ( $\gamma_t = 9$ dB)	0,0007	0,0085	0,00006	0,0682

A Figura 3.5 mostra o comportamento da PCE versus a SNR, para um DFC com  $f_D T = 10^{-3}$  e



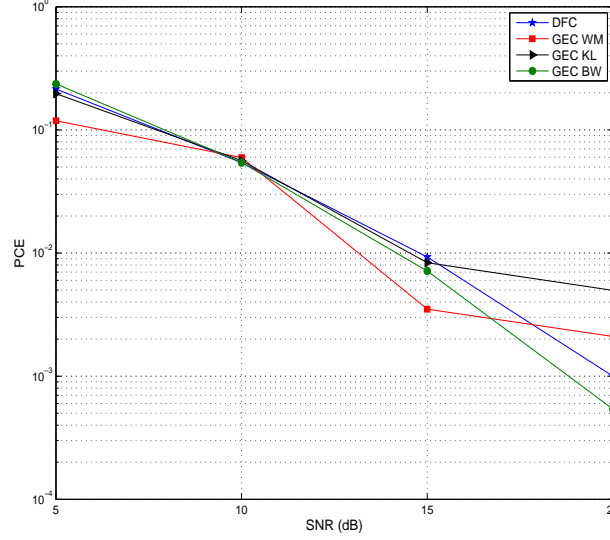
**Figura 3.4:** Comportamento da vazão do DFC e de modelos GEC para  $f_D T = 10^{-3}$ ,  $N_{GBN} = 10$  e  $N = 80$ .



para os modelos GEC. Esta probabilidade foi obtida utilizando-se um código de bloco binário, linear, de comprimento  $N = 255$  e capacidade de correção  $t_c = 29$ . É possível observar nesta figura que o GEC com parâmetros calculados pelo método WM (para os valores de  $\gamma_t$  mostrados na Tabela 3.5) apresenta um comportamento discrepante da curva do DFC. O GEC obtido com o método BW se mostra mais preciso para valores superiores a 15 dB.

De acordo com as curvas analisadas, o método proposto por WM mostra-se mais vantajoso apenas na análise da vazão. Em que pese sua baixa complexidade computacional, esse método torna-se dispendioso uma vez que, para a obtenção desse resultado, há a necessidade de ensaios prévios para a determinação do valor adequado de  $\gamma_t$  para métrica de desempenho considerada (observe que os valores de  $\gamma_t$  nas Tabelas 3.4 e 3.5 são diferentes). A análise das curvas da função autocorrelação sugere que tanto o método BW quanto KL são robustos e eficientes para a estimação dos parâmetros do GEC. Em suma, considerando-se todas as estatísticas analisadas, é possível afirmar que, a despeito do método KL ser bem aderente ao comportamento do DFC em várias ocasiões, o método BW mostra-se um pouco mais fidedigno, motivo pelo qual será utilizado no restante deste trabalho. Há, ainda, que se considerar que a precisão do modelamento pode ser melhorada se forem considerados modelos com mais de dois estados. Por isso, serão considerados a seguir os modelos 3-NM e 4-NM.

**Figura 3.5:**  $PCE \times SNR$  para um código de bloco binário, linear, de comprimento  $N = 255$ , capacidade de correção  $t_c = 29$ , em canais GEC e no DFC com  $f_D T = 10^{-3}$ .



### 3.4 Modelamento do DFC com 3-NM e 4-NM

Antes de iniciar-se uma análise estatística comparativa, será desenvolvida uma fórmula para o cálculo de  $P(m, n)$  para os modelos 3-NM e 4-NM, de modo que seja viabilizada uma análise da PCE desses modelos.

#### 3.4.1 Cálculo de $P(m, n)$ para os modelos 3-NM e 4-NM

Serão desenvolvidas fórmulas de recorrência utilizando-se a metodologia descrita em [30], para calcular a probabilidade dos modelos 3-NM e 4-NM gerarem  $m$  erros em uma sequência de comprimento  $n$ .

Seja  $\mathbb{R}$  o corpo dos números reais. Define-se  $\mathbb{R} \langle x_0, x_1 \rangle$  como o conjunto de todas as somas finitas de produtos não comutativos de  $x_0$  e  $x_1$ , com coeficientes tomados de  $\mathbb{R}$ . Seja  $\zeta_n$  um conjunto arbitrário de seqüências de ruído binária de comprimento  $n$ . Define-se uma série geradora para  $\zeta_n$  da seguinte forma:

$$F_{\zeta_n} = \sum_{z^n \in \zeta_n} x_{z_1} x_{z_2} \dots x_{z_n} \in \mathbb{R} \langle x_0, x_1 \rangle \quad (3.17)$$

em que  $x_{z_i} \in \{x_0, x_1\}$ , e os indeterminantes  $x_0$  e  $x_1$  marcam um dígito de ruído igual a 0 ou 1, respectivamente, em cada seqüência pertencente a  $\zeta_n$ . Denota-se  $\zeta_n^m$  o conjunto de todas as

sequências de comprimento  $n$  com  $m$  erros. Então,  $P(m, n) = P(\zeta_n^m)$ .

A probabilidade de um conjunto arbitrário de sequências de comprimento  $n$ ,  $\zeta_n$ , pode ser expressa na forma:

$$P(\zeta_n) = \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\zeta_n}) \mathbf{1}. \quad (3.18)$$

em que  $\Delta$  deriva do mapeamento

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{R} \langle x_0, x_1 \rangle &\mapsto \mathbf{M}_N(\mathbb{R}) \\ x_{z_i} &\mapsto \mathbf{P}(z_i) \end{aligned} \quad (3.19)$$

em que  $\mathbf{M}_N(\mathbb{R})$  é o anel formado por todas as matrizes  $J \times J$ , cujos elementos pertencem a  $\mathbb{R}$ . A fim de enumerar o conjunto  $\zeta_n^m$ , define-se  $\mathbb{R}[[s, z]]$  o anel de todas as séries de potências com indeterminantes comutativos  $s$  e  $z$ , e coeficientes tomados de  $\mathbb{R}$ . Seja  $H(s, z)$  uma série geradora definida da seguinte forma:

$$H(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P(m, n) s^m z^n \in \mathbb{R}[[s, z]]. \quad (3.20)$$

em que  $s$  e  $z$  são indeterminantes comutativos que marcam, respectivamente, a quantidade de erros e o comprimento de uma sequência de ruído. Define-se  $[s^m z^n]$  um operador tal que  $[s^m z^n]H(s, z)$  é o coeficiente do termo  $s^m z^n$  na série de potências  $H(s, z)$ , ou seja,  $P(m, n)$ . Assim,

$$P(m, n) = [s^m z^n]H(s, z). \quad (3.21)$$

Será desenvolvido um método para calcular  $H(s, z)$  utilizando-se uma técnica enumerativa [30]. Para tanto, define-se  $\zeta^*$  como o conjunto de todas as sequências binárias de qualquer comprimento, incluindo a sequência vazia, isto é,  $\zeta^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \zeta_n^*$ , em que  $\zeta_n^*$  são todas as sequências binárias de comprimento  $n$ . A série geradora  $F_{\zeta^*}$  é:

$$\begin{aligned} F_{\zeta^*} &= \sum_{i=0}^{\infty} (x_0 + x_1)^i \\ &= (1 - (x_0 + x_1))^{-1}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Com o objetivo de enumerar a quantidade de erros e o comprimento de cada sequência em  $F_{\zeta^*}$  e, considerando-se os indeterminantes  $s$  e  $z$  definidos anteriormente, define-se a seguinte série geradora:

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, s, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i (x_0 + s x_1)^i \\ &= (1 - (z(x_0 + s x_1)))^{-1} \in \mathbb{R} \langle x_0, x_1 \rangle [[s, z]]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

É possível calcular  $H(s, z)$  substituindo-se, em (3.23),  $x_{z_i}$  por  $\mathbf{P}(z_i)$  e multiplicando-se a matriz resultante pelo vetor linha  $\mathbf{\Pi}^T$  à esquerda e pelo vetor coluna  $\mathbf{1}$  à direita.

$$H(s, z) = \mathbf{\Pi}^T \{\mathbf{I} - z\mathbf{P}(0) - zs\mathbf{P}(1)\}^{-1} \mathbf{1}. \quad (3.24)$$

Substituindo-se em (3.21), obtém-se:

$$P(m, n) = [s^m z^n] \mathbf{\Pi}^T \{\mathbf{I} - z\mathbf{P}(0) - zs\mathbf{P}(1)\}^{-1} \mathbf{1}. \quad (3.25)$$

Observa-se que  $H(s, z)$  é uma razão de dois polinômios em  $s$  e  $z$ , uma vez que a inversa da matriz  $\mathbf{W} \triangleq \mathbf{I} - z\mathbf{P}(0) - zs\mathbf{P}(1)$  é a razão entre a transposta da matriz dos cofatores de  $\mathbf{W}$ ,  $\text{Cof}(\mathbf{W})$  e seu determinante,  $\det(\mathbf{W})$ , isto é,  $\mathbf{W}^{-1} = \text{Cof}(\mathbf{W})^T / \det(\mathbf{W})$ . Desta forma:

$$H(s, z) = \frac{\mathbf{\Pi}^T \text{Cof}(\mathbf{W})^T \mathbf{1}}{\det(\mathbf{W})} = \frac{L(s, z)}{Q(s, z)}. \quad (3.26)$$

### 3.4.2 Recorrência para o 3-NM

A partir dos polinômios  $L(s, z)$  e  $Q(s, z)$ , será desenvolvida uma fórmula recursiva para  $P(m, n)$ , como será mostrado a seguir para o caso particular do modelo 3-NM. A matriz  $\mathbf{W}$  para o 3-NM, em função das matrizes  $\mathbf{P}(0)$  e  $\mathbf{P}(1)$ , é dada por:

$$\mathbf{W} = \mathbf{I} - z\mathbf{P}(0) - zs\mathbf{P}(1)$$

$$= \begin{bmatrix} P_0 sz(Q_1 - 1) - z(Q_1 - 1)(P_0 - 1) + 1 & Q_1 z(P_1 - 1) - Q_1 P_1 sz & 0 \\ q_1 z(P_0 - 1) - P_0 q_1 sz & P_1 sz(Q_2 + q_1 - 1) - z(P_1 - 1)(Q_2 + q_1 - 1) + 1 & Q_2 z(P_2 - 1) - Q_2 P_2 sz \\ 0 & q_2 z(P_1 - 1) - P_1 q_2 sz & P_2 sz(q_2 - 1) - z(P_2 - 1)(q_2 - 1) + 1 \end{bmatrix}$$

Desta forma:

$$\det(\mathbf{W}) = 1 + c_1 z + c_2 s z + c_3 z^2 + c_4 s z^2 + c_5 s^2 z^2 + c_6 z^3 + c_7 s z^3 + c_8 s^2 z^3 + c_9 s^3 z^3 \quad (3.27)$$

em que

$$\begin{aligned} c_1 &= Q_1 + Q_2 + q_1 + q_2 - 3 + P_0(1 - Q_1) - P_1(Q_2 + q_1) + P_2(1 - q_2) \\ c_2 &= P_0(Q_1 - 1) + P_1(q_1 + Q_2 - 1) + P_2(q_2 - 1) \\ c_3 &= P_0(-2 + 2Q_1 + Q_2 + q_1 + q_2 - Q_1Q_2 - Q_1q_2) + P_1(-2 + Q_1 + 2Q_2 + 2q_1 + q_2 - Q_1Q_2 - q_1q_2) \\ &+ P_2(-2 + Q_1 + Q_2 + q_1 + 2q_2 - Q_1q_2 - q_1q_2) + P_0P_1(1 - Q_1 - Q_2 - q_1 + Q_1Q_2) \\ &+ P_0P_2(1 - Q_1 - q_2 + Q_1q_2) + P_1P_2(1 - Q_2 - q_1 - q_2 + q_1q_2) \\ &+ (3 - 2Q_1 - 2Q_2 - 2q_1 - 2q_2 + Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2) \\ c_4 &= P_0(2 - 2Q_1 - Q_2 - q_1 - q_2 + Q_1Q_2 + Q_1q_2) + P_1(2 - Q_1 - 2Q_2 - 2q_1 - q_2 + Q_1Q_2 + q_1q_2) \\ &+ P_2(2 - Q_1 - Q_2 - q_1 - 2q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2) + 2P_0P_1(-1 + Q_1 + Q_2 + q_1 - Q_1Q_2) \\ &+ 2P_0P_2(-1 + Q_1 + q_2 - Q_1q_2) + 2P_1P_2(-1 + Q_2 + q_1 + q_2 - q_1q_2) \\ c_5 &= P_0P_1(1 - Q_1 - Q_2 - q_1 + Q_1Q_2) + P_0P_2(1 - Q_1 - q_2 + Q_1q_2) + P_1P_2(1 - Q_2 - q_1 - q_2 + q_1q_2) \\ c_6 &= (-P_0 - P_1 - P_2 + P_0P_1 + P_0P_2 + P_1P_2 - P_0P_1P_2 + 1)(Q_1 + Q_2 - 1 + q_1 + q_2 - Q_1Q_2 - Q_1q_2 - q_1q_2) \\ c_7 &= (P_0 + P_1 + P_2 - 2P_0P_1 - 2P_0P_2 - 2P_1P_2 + 3P_0P_1P_2)(Q_1 + Q_2 - 1 + q_1 + q_2 - Q_1Q_2 - Q_1q_2 - q_1q_2) \\ c_8 &= (P_0P_1 + P_0P_2 + P_1P_2 - 3P_0P_1P_2)(Q_1 + Q_2 - 1 + q_1 + q_2 - Q_1Q_2 - Q_1q_2 - q_1q_2) \\ c_9 &= P_0P_1P_2(Q_1 + Q_2 - 1 + q_1 + q_2 - Q_1Q_2 - Q_1q_2 - q_1q_2) \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{\Pi}^T \text{cof}(\mathbf{W})^T \mathbf{1} = c_{0_p} + c_{1_p} z + c_{2_p} s z + c_{3_p} z^2 + c_{4_p} s z^2 + c_{5_p} s^2 z^2. \quad (3.28)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} H(s, z) &= \frac{c_{0_p} + c_{1_p} z + c_{2_p} s z + c_{3_p} z^2 + c_{4_p} s z^2 + c_{5_p} s^2 z^2}{1 + c_1 z + c_2 s z + c_3 z^2 + c_4 s z^2 + c_5 s^2 z^2 + c_6 z^3 + c_7 s z^3 + c_8 s^2 z^3 + c_9 s^3 z^3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P(m, n) s^m z^n. \end{aligned}$$

Passando-se pelo desenvolvimento, que pode ser encontrado no Apêndice B, chega-se à fórmula de recorrência para o 3-NM, dada por:

$$\begin{aligned} P(m, n) &= -c_1 P(m, n-1) - c_2 P(m-1, n-1) - c_3 P(m, n-2) - c_4 P(m-1, n-2) \\ &- c_5 P(m-2, n-2) - c_6 P(m, n-3) - c_7 P(m-1, n-3) - c_8 P(m-2, n-3) \\ &- c_9 P(m-3, n-3) \end{aligned} \quad (3.29)$$

com as condições iniciais:

$$\begin{aligned}
P(m, n) &= 0 \text{ para } m, n < 0, m > n \\
P(0, 0) &= 1 \\
P(0, 1) &= c_{1_p} - c_1 = (Q_1(Q_2P_0 - Q_2P_2 + P_0q_2 - P_1q_2))/(Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2) - P_0 + 1 \\
P(1, 1) &= c_{2_p} - c_2 = (Q_1Q_2P_2 + Q_1P_1q_2 + P_0q_1q_2)/(Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2) \\
P(0, 2) &= c_{3_p} - c_3 - c_1P(0, 1) = (Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2 + P_0q_1q_2 - 2Q_1Q_2P_2 - 2Q_1P_1q_2 - 2P_0q_1q_2 \\
&\quad + Q_1Q_2P_2^2 + Q_1P_1^2q_2 - Q_1Q_2P_1^2q_2 - Q_1Q_2P_2^2q_2 - Q_1P_0^2q_1q_2 - Q_1P_1^2q_1q_2 \\
&\quad + 2Q_1Q_2P_1P_2q_2 + 2Q_1P_0P_1q_1q_2)/(Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2) \\
P(1, 2) &= c_{4_p} - c_1P(1, 1) - c_2P(0, 1) - c_4 = (2(Q_1Q_2P_2 - P_0^2q_1q_2 + Q_1P_1q_2 + P_0q_1q_2 - Q_1Q_2P_2^2 \\
&\quad - Q_1P_1^2q_2 + Q_1Q_2P_1^2q_2 + Q_1Q_2P_2^2q_2 + Q_1P_0^2q_1q_2 + Q_1P_1^2q_1q_2 - 2Q_1Q_2P_1P_2q_2 \\
&\quad - 2Q_1P_0P_1q_1q_2))/(Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2) \\
P(2, 2) &= c_{5_p} - c_2P(1, 1) - c_5 = (P_0^2q_1q_2 + Q_1Q_2P_2^2 + Q_1P_1^2q_2 - Q_1Q_2P_1^2q_2 - Q_1Q_2P_2^2q_2 \\
&\quad - Q_1P_0^2q_1q_2 - Q_1P_1^2q_1q_2 + 2Q_1Q_2P_1P_2q_2 + 2Q_1P_0P_1q_1q_2)/(Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2).
\end{aligned}$$

### 3.4.3 Recorrência para o 4-NM

Para o modelo 4-NM, seguindo a mesma sequência do caso 3-NM e, ainda, utilizando-se os polinômios  $L(s, z)$  e  $Q(s, z)$ , será desenvolvida uma fórmula recursiva para  $P(m, n)$ . A matriz  $\mathbf{B}$  para o 4-NM, em função das matrizes  $\mathbf{P}(0)$  e  $\mathbf{P}(1)$ , é dada por  $\mathbf{B} = \mathbf{I} - z\mathbf{P}(0) - zs\mathbf{P}(1)$ . Assim como no caso anterior, passando-se pelo desenvolvimento demonstrado no Apêndice B, chega-se à fórmula de recorrência para o 4-NM, dada por:

$$\begin{aligned}
P(m, n) &= -c_1P(m, n-1) - c_2P(m-1, n-1) - c_3P(m, n-2) - c_4P(m-1, n-2) \\
&\quad - c_5P(m-2, n-2) - c_6P(m, n-3) - c_7P(m-1, n-3) - c_8P(m-2, n-3) \\
&\quad - c_9P(m-3, n-3) - c_{10}P(m, n-4) - c_{11}P(m-1, n-4) - c_{12}P(m-2, n-4) \\
&\quad - c_{13}P(m-3, n-4) - c_{14}P(m-4, n-4) \tag{3.30}
\end{aligned}$$

com as condições iniciais:

$$\begin{aligned}
P(m, n) &= 0 \text{ para } m, n < 0, m > n \\
P(0, 0) &= 1 \\
P(0, 1) &= c_{1_p} - c_1 = (Q_1(Q_2P_0 - Q_2P_2 + P_0q_2 - P_1q_2))/(Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2) - P_0 + 1 \\
P(1, 1) &= c_{2_p} - c_2 = (Q_1Q_2P_2 + Q_1P_1q_2 + P_0q_1q_2)/(Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2) \\
P(0, 2) &= c_{3_p} - c_3 - c_1P(0, 1) = (Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2 + P_0q_1q_2 - 2Q_1Q_2P_2 - 2Q_1P_1q_2 - 2P_0q_1q_2 \\
&+ Q_1Q_2P_2^2 + Q_1P_1^2q_2 - Q_1Q_2P_1^2q_2 - Q_1Q_2P_2^2q_2 - Q_1P_0^2q_1q_2 - Q_1P_1^2q_1q_2 \\
&+ 2Q_1Q_2P_1P_2q_2 + 2Q_1P_0P_1q_1q_2)/(Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2) \\
P(1, 2) &= c_{4_p} - c_1P(1, 1) - c_2P(0, 1) - c_4 = (2(Q_1Q_2P_2 - P_0^2q_1q_2 + Q_1P_1q_2 + P_0q_1q_2 - Q_1Q_2P_2^2 \\
&- Q_1P_1^2q_2 + Q_1Q_2P_1^2q_2 + Q_1Q_2P_2^2q_2 + Q_1P_0^2q_1q_2 + Q_1P_1^2q_1q_2 - 2Q_1Q_2P_1P_2q_2 \\
&- 2Q_1P_0P_1q_1q_2))/(Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2) \\
P(2, 2) &= c_{5_p} - c_2P(1, 1) - c_5 = (P_0^2q_1q_2 + Q_1Q_2P_2^2 + Q_1P_1^2q_2 - Q_1Q_2P_1^2q_2 - Q_1Q_2P_2^2q_2 \\
&- Q_1P_0^2q_1q_2 - Q_1P_1^2q_1q_2 + 2Q_1Q_2P_1P_2q_2 + 2Q_1P_0P_1q_1q_2)/(Q_1Q_2 + Q_1q_2 + q_1q_2) \\
P(0, 3) &= c_{6_p} - c_1P(0, 2) - c_3P(0, 1) - c_6P(0, 0) \\
P(1, 3) &= c_{7_p} - c_1P(1, 2) - c_2P(0, 2) - c_3P(1, 1) - c_4P(0, 1) - c_7P(0, 0) \\
P(2, 3) &= c_{8_p} - c_1P(2, 2) - c_2P(1, 2) - c_4P(1, 1) - c_5P(0, 1) - c_8P(0, 0) \\
P(3, 3) &= c_{9_p} - c_2P(2, 2) - c_5P(1, 1) - c_9P(0, 0).
\end{aligned}$$

### 3.5 Análise do modelamento do DFC utilizando modelos $J$ -NM

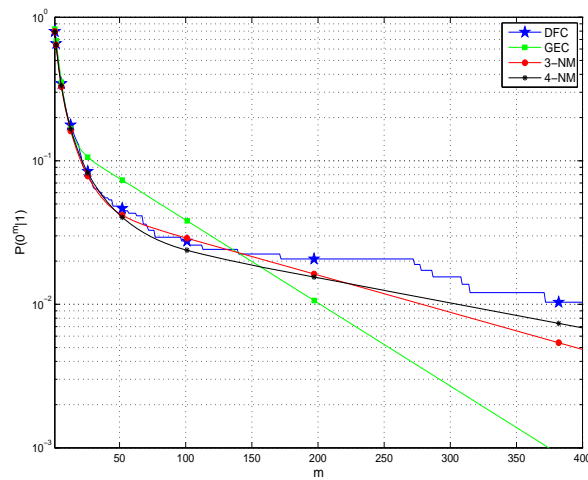
Nesta seção serão analisados resultados de algumas estatísticas com o objetivo de verificar qual ordem de modelo NM é capaz de reproduzir, de maneira fidedigna, a sequência de erros do DFC. As estatísticas do DFC são obtidas por simulação, enquanto as do  $J$ -NM são obtidas teoricamente. Duas estatísticas são consideradas: a probabilidade de ocorrer uma sequência com  $m$  transmissões corretas, dado uma incorreta,  $P(0^m | 1)$  (2.42); e a probabilidade do DFC produzir  $m$  símbolos errados em um bloco de comprimento  $n$ ,  $P(m, n)$  (2.36).

Na Tabela 3.6, são mostrados os parâmetros dos modelos  $J$ -NM, obtidos utilizando-se o algoritmo BW, que modelam o DFC com  $f_D T = 10^{-3}$ . Na sequência, são mostradas as Figuras 3.6-3.9 que detalham o comportamento de  $P(0^m | 1)$  para SNR= 5, 8, 10 e 15 dB, respectivamente. Logo após, as Figuras 3.10-3.13 ilustram o comportamento de  $P(m, n)$  para os mesmos valores de SNR. Todas essas figuras baseiam-se nos parâmetros cujos valores encontram-se na Tabela 3.6.

**Tabela 3.6:** Valores dos parâmetros do  $J$ -NM, sendo  $J=2,3$  e  $4$ , que modelam o DFC para 5 valores de SNR e com  $f_D T = 10^{-3}$ .

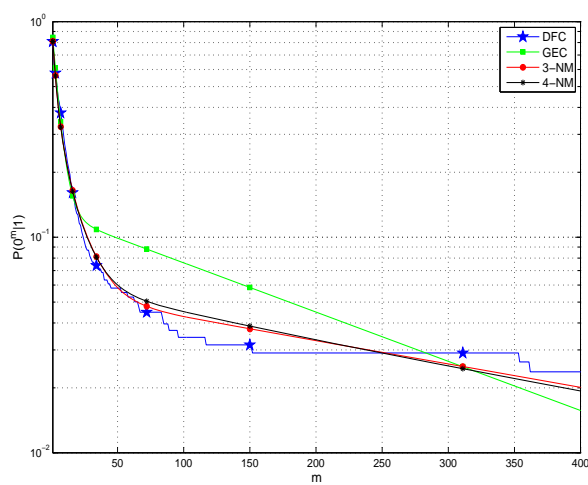
$J$	SNR	$p_{0,1}$	$p_{1,0}$	$p_{1,2}$	$p_{2,1}$	$p_{2,3}$	$p_{3,2}$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
2	5	0,0022	0,0054	-	-	-	-	0,0111	0,1991	-	-
	8	0,0015	0,0069	-	-	-	-	0,0038	0,1730	-	-
	10	0,0013	0,0084	-	-	-	-	0,0019	0,1635	-	-
	15	0,0007	0,0132	-	-	-	-	0,0003	0,1473	-	-
	20	0,0003	0,0236	-	-	-	-	0,00005	0,1518	-	-
3	5	0,0026	0,0050	0,0040	0,0077	-	-	0,0035	0,0772	0,2828	-
	8	0,0020	0,0070	0,0047	0,0111	-	-	0,0007	0,0563	0,2610	-
	10	0,0016	0,0090	0,0056	0,0144	-	-	0,0004	0,0539	0,2640	-
	15	0,0010	0,0170	0,0087	0,0264	-	-	0,00002	0,0532	0,2712	-
	20	0,0008	0,0282	0,0119	0,0355	-	-	$< 10^{-6}$	0,0134	0,2134	-
4	5	0,0032	0,0057	0,0057	0,0087	0,0055	0,0116	0,0012	0,0382	0,1434	0,3355
	8	0,0060	0,0012	0,0023	0,0072	0,0048	0,0115	$< 10^{-6}$	0,0013	0,0633	0,2703
	10	0,0021	0,0110	0,0079	0,0164	0,0088	0,0224	$< 10^{-6}$	0,0286	0,1365	0,3382
	15	0,0017	0,0280	0,0177	0,0282	0,0119	0,0320	$< 10^{-6}$	0,0108	0,0909	0,3042
	20	0,0027	0,0016	0,0026	0,0223	0,0054	0,0295	$< 10^{-6}$	$< 10^{-6}$	0,0027	0,1815

**Figura 3.6:** Comportamento da probabilidade  $P(0^m | 1)$  de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para SNR=5 dB.

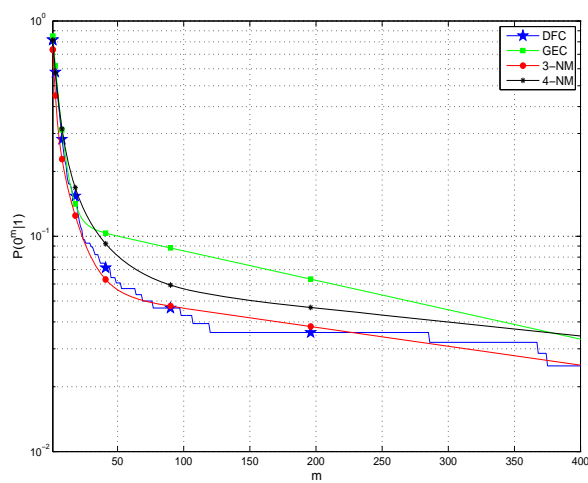




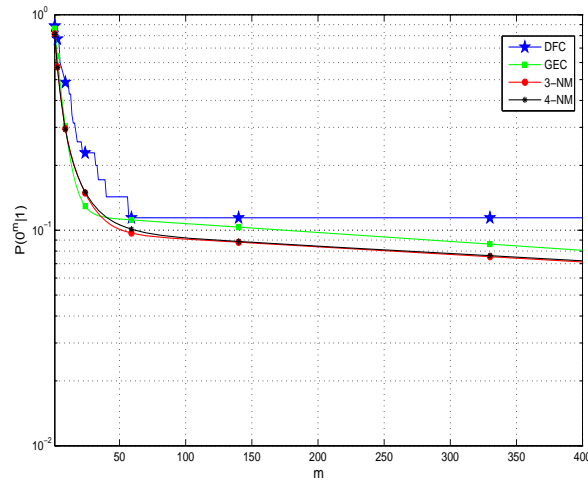
**Figura 3.7:** Comportamento da probabilidade  $P(0^m | 1)$  de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para  $SNR=8$  dB.



**Figura 3.8:** Comportamento da probabilidade  $P(0^m | 1)$  de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para  $SNR=10$  dB.



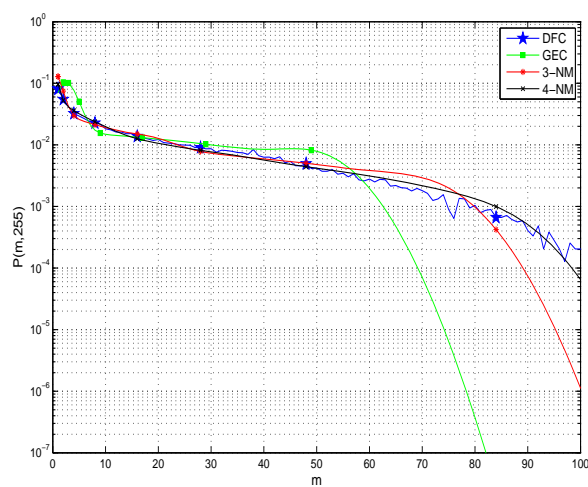
**Figura 3.9:** Comportamento da probabilidade  $P(0^m | 1)$  de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para  $SNR=15$  dB.



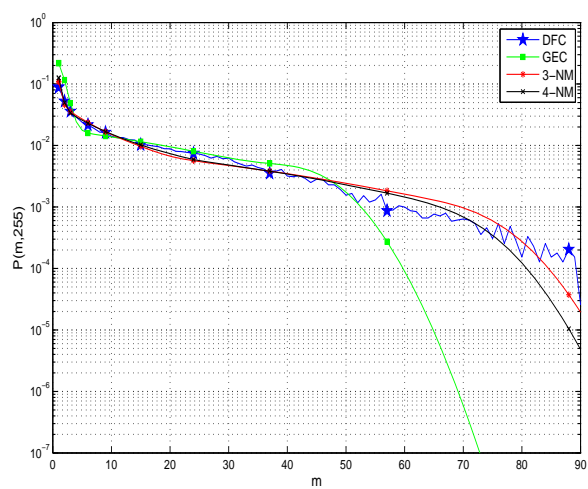
Observando-se as curvas das Figuras 3.6-3.9 é possível perceber que, para valores menores de SNR, neste caso 5 dB, 8 dB e 10 dB, o GEC possui uma capacidade reduzida de reproduzir o comportamento do DFC quando comparado com modelos de ordem superior. Já para os casos em que os valores de SNR são maiores, i.e., 15 dB, o GEC consegue alcançar uma performance satisfatória na reprodução do comportamento do DFC.

Analisando-se a segunda estatística obtida,  $P(m, n)$ , cujas curvas estão nas Figuras 3.10-3.13, é possível ratificar a conclusão alcançada por meio da análise da  $P(0^m | 1)$ . De forma detalhada, para 5 dB, ambas as estatísticas indicam que o 4-NM é o modelo com melhor resolução para reproduzir o comportamento do DFC. Para 8 dB e 10 dB, observa-se que o modelo 3-NM é o que mais se aproxima do comportamento do DFC. Fica claro, para 15 dB, que o GEC é adequado para reproduzir o DFC. Em suma, é possível concluir-se que a comparação do comportamento dos modelos indica que  $J = 4$  é o modelos mais indicado para o caso de 5 dB,  $J = 3$  para 8 dB e 10 dB e o GEC é bom para 15 dB, até mesmo pela sua menor complexidade.

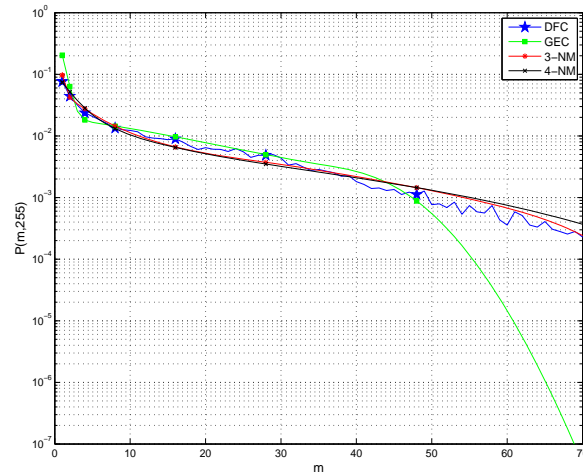
**Figura 3.10:** Comportamento da probabilidade  $P(m, 255)$  de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para  $SNR=5$  dB.



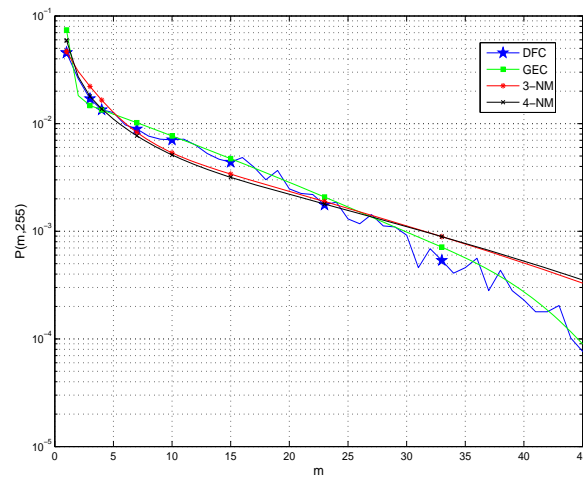
**Figura 3.11:** Comportamento da probabilidade  $P(m, 255)$  de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para  $SNR=8$  dB.



**Figura 3.12:** Comportamento da probabilidade  $P(m, 255)$  de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para  $SNR=10$  dB.



**Figura 3.13:** Comportamento da probabilidade  $P(m, 255)$  de quatro canais, DFC, GEC, 3-NM e 4-NM, para  $SNR=15$  dB.



Os valores estudados de  $J$  para os modelos  $J$ -NM que reproduzem o DFC para os diferentes valores de SNR analisados são mostrados na Tabela 3.7.

Esta seção tratou apenas do caso  $f_D T = 10^{-3}$ , que caracteriza um canal lento, mas a metodologia empregada pode ser repetida para outros valores desse parâmetro, o que é feito no capítulo seguinte.

**Tabela 3.7:** Modelos  $J$ -NM que aproximam um DFC com  $f_{DT} = 10^{-3}$  para SNR = 5, 8, 10 e 15 dB.

$f_{DT}$	SNR	$J$
$10^{-3}$	5 dB	4
	8 dB	3
	10 dB	3
	15 dB	2

# 4

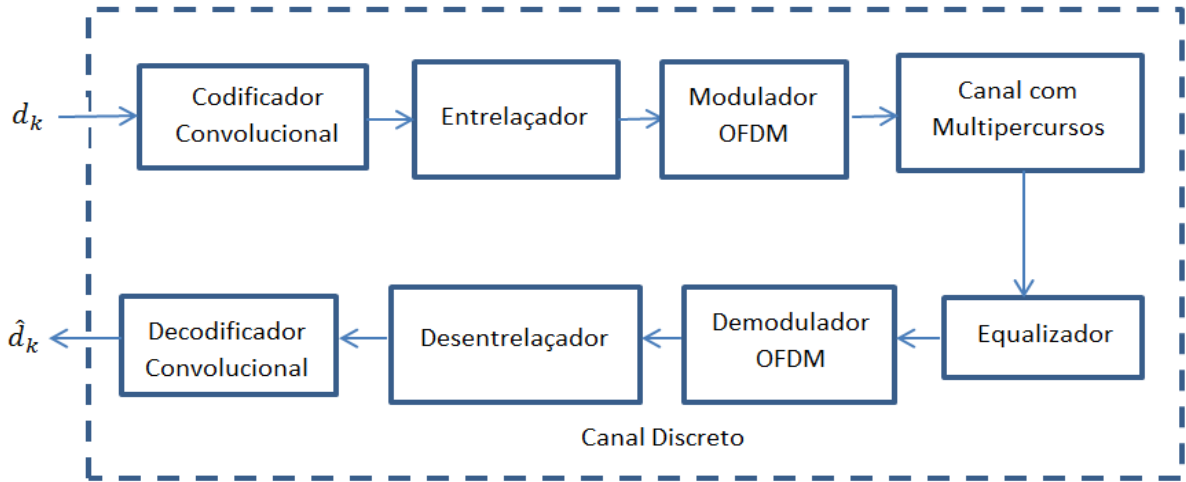
## MODELAMENTO MARKOVIANO USANDO SISTEMAS OFDM EM CANAIS SELETIVOS EM FREQUÊNCIA

NESTE capítulo, será avaliada a pertinência de utilizar-se um modelo de canal de estados finitos Markovianos, mais especificamente modelos GEC, 3-NM e 4-NM, de modo a reproduzir o comportamento de um SCD, baseado no padrão IEEE 802.11, com modulação OFDM e desvanecimento seletivo em frequência. É modelada uma sequência de erro de símbolo produzida pela transmissão de palavras-código de um codificador RS concatenado externamente ao SCD. A precisão do modelo, cujos parâmetros são calculados utilizando-se o algoritmo BW, será avaliada comparando-se algumas estatísticas produzidas pelo SCD e pelo FSMC. Avalia-se, também, o comportamento do modelo quando um entrelaçador finito, com nível de entrelaçamento  $I_d$ , é inserido no SCD.

### 4.1 Descrição do Sistema de Comunicações

Considera-se um sistema de comunicações discreto, denominado de SCD, baseado na norma IEEE 802.11 [62], como ilustrado na Figura 4.1. A entrada e a saída do SCD são sequências binárias denotadas por  $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots)$  e  $\hat{\mathbf{d}} = (\hat{d}_0, \hat{d}_1, \dots)$ , respectivamente. Este sistema é composto por um codificador convolucional, um entrelaçador, um modulador OFDM com símbolos PSK/QAM em cada uma das  $N_s$  subportadoras e um canal com desvanecimento seletivo em frequência, correlacionado no tempo, com ruído aditivo gaussiano branco. Na recepção, o sinal recebido passa por um equalizador, depois pelo demodulador OFDM, sendo

**Figura 4.1:** SCD baseado no padrão IEEE 802.11.



então desentrelaçado e decodificado pelo algoritmo de Viterbi. A seguir, serão descritos os blocos mostrados na Figura 4.1.

O esquema de codificação convolutiva utilizado possui taxa  $R = 1/2$  e 64 estados, sendo os polinômios geradores dados por:

$$\begin{aligned} G_1(D) &= 1 + D^2 + D^3 + D^5 + D^6 \\ G_2(D) &= 1 + D + D^2 + D^3 + D^6. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para taxas superiores de codificação, deve ser feito um procedimento de puncionamento. A ordem dos bits codificados é alterada por duas permutações realizadas pelo entrelaçador. A primeira permutação garante que bits codificados adjacentes não sejam mapeados em portadoras adjacentes. A segunda permutação garante que bits codificados adjacentes sejam mapeados alternativamente em bits menos significativos e mais significativos da constelação. Consoante o descrito em [62], sendo  $\alpha$  o índice dos bits codificados,  $\beta$  o índice correspondente depois da primeira permutação e  $\gamma$  o índice depois da segunda permutação, o entrelaçador implementa as seguintes operações:

$$\begin{aligned} \beta &= (N_{CBPS}/16)(\alpha \bmod 16) + \lfloor \alpha/16 \rfloor, \quad k = 0, 1, \dots, N_{CBPS} - 1 \\ \gamma &= s \times \lfloor \beta/s \rfloor + (\beta + N_{CBPS} - \lfloor 16 \times \beta/N_{CBPS} \rfloor) \bmod s, \quad \beta = 0, 1, \dots, N_{CBPS} - 1 \end{aligned}$$

**Tabela 4.1:** Esquemas de modulação e codificação usados no padrão 802.11

Modulação	$R$	$N_{BPSC}$	$N_{CBPS}$	Taxa de dados (Mbits/s)
BPSK	1/2	1	48	6
BPSK	3/4	1	48	9
QPSK	1/2	2	96	12
QPSK	3/4	2	96	18
16-QAM	1/2	4	192	24
16-QAM	3/4	4	192	36
64-QAM	2/3	6	288	48
64-QAM	3/4	6	288	54

em que  $N_{CBPS}$  é o número de bits em um único símbolo OFDM,  $s = \max(N_{BPSC}/2, 1)$ ,  $N_{BPSC}$  é o número de bits codificados por subportadora e  $\lfloor x \rfloor$  é o maior valor inteiro igual ou menor que  $x$ . A Tabela 4.1 mostra os diferentes esquemas possíveis de modulação e codificação para o 802.11, bem como parâmetros que dependem da modulação escolhida, como  $N_{BPSC}$ ,  $N_{CBPS}$  e a taxa de dados (em Mbits/s) resultante de cada um, para um canal com 20 MHz de banda. A técnica OFDM surgiu como uma evolução da multiplexação por divisão de frequência por meio do uso de uma sobreposição espectral das subportadoras, o que não acontecia na técnica original [63]. Essa sobreposição, que melhora a eficiência espectral, é possível porque as subportadoras utilizadas são ortogonais entre si, sob condições ideais de propagação, permitindo que exista uma sobreposição sem que haja interferência entre as subportadoras. Se a banda passante em cada subportadora é menor que a banda de coerência do canal, obtém-se uma condição de desvanecimento plano em cada subportadora. Outro fator interessante dessa técnica é que as subportadoras não precisam ser contíguas, ou seja, não se faz necessária a disponibilização de um amplo bloco de frequências para que se possa realizar uma comunicação com altas taxas de transmissão com o uso do esquema OFDM [64].

Seja  $N_s$  o número de subportadoras. Para cada símbolo OFDM no tempo  $t$ , denota-se a sequência de dados modulada como  $D_t(0), D_t(1), \dots, D_t(N_s - 1)$ . Após a transformada inversa discreta de Fourier, o sinal OFDM no domínio do tempo pode ser expresso como

$$s_t(g) = \frac{1}{N_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} D_t(k) e^{j2\pi kg/N_s}, g = 0, 1, \dots, N_s - 1 \quad (4.2)$$

em que  $j^2 = -1$ . Para cada símbolo OFDM, 4 subportadoras são reservadas para os sinais piloto, que visam tornar a detecção coerente mais robusta contra desvios de frequência e ruídos de fase. São utilizadas 48 subportadoras para transmissão de dados, resultando assim em 52 subportadoras de um total de 64. As subportadoras restantes são preenchidas com



zeros. Após a aplicação da transformada rápida inversa de Fourier sobre as 64 subportadoras, um prefixo cíclico é adicionado ao símbolo OFDM. A função do prefixo cíclico é mitigar a interferência intersimbólica, haja vista que o prefixo cíclico é uma redundância de parte dos dados amostrados, os quais poderão ser descartados sem causar prejuízos à sequência original de informação transmitida.

Supõe-se que a resposta ao impulso do canal com desvanecimento e multipercursos, no instante  $t$ , é modelada como um filtro com resposta ao impulso finita com  $L$  estágios não nulos  $h_t(g)$ ,  $g = 0, 1, \dots, L - 1$ . Assim, a função de transferência deste filtro é expressa por:

$$H_t(k) = \sum_{g=0}^{L-1} h_t(g) e^{-j2\pi kg/N_s}, \quad k = 0, 1, \dots, N_s - 1. \quad (4.3)$$

O sinal recebido, no tempo  $t$ ,  $r_t(g)$ ,  $g = 0, 1, \dots, N_s - 1$ , após passar pelo conversor analógico-digital e ter o prefixo cíclico removido, passa por uma transformada discreta de Fourier, o que resulta em

$$R_t(k) = \sum_{g=0}^{N_s-1} r_t(g) e^{-j2\pi kg/N_s} = H_t(k) D_t(k) + N_t(k), \quad k = 0, 1, \dots, N_s - 1 \quad (4.4)$$

em que  $N_t(k)$  é uma variável aleatória Gaussiana complexa, independente e identicamente distribuída para todo  $t$  e  $k$ , com média zero e variância  $N_0/2$  por dimensão. Neste trabalho, para cada tempo  $t$ , assume-se que os coeficientes dos estágios do canal  $h_t(g)$ ,  $g = 0, 1, \dots, L - 1$ , são variáveis aleatórias complexas mutuamente independentes, as quais podem ser expressas da forma  $h_t(g) = |h_t(g)| e^{j\phi_t(g)}$ . As fases  $\phi_t(g)$  são mutuamente independentes, uniformemente distribuídas em  $[0, 2\pi)$  e são independentes da amplitude  $|h_t(g)|$ , que é modelada pela função densidade de probabilidade Rayleigh:

$$p_{|h_t(g)|}(r) = \frac{2r}{\Omega_g} e^{-\frac{r^2}{\Omega_g}}. \quad (4.5)$$

O perfil de potência dos multipercursos  $\Omega_g$ , utilizado em (4.5), tem decaimento exponencial:

$$\Omega_g = \Omega_0 e^{-\frac{gT_s}{\tau_m}}, \quad g = 0, \dots, L - 1 \quad (4.6)$$

em que  $T_s$  é o intervalo total de duração do símbolo e  $\tau_m$  é o valor quadrático médio do perfil de potência dos multipercursos,  $\mathbf{E}[|h_t(g)|^2] = \Omega_g$ . O valor de  $\Omega_0$  é escolhido tal que

$$\sum_{g=0}^{L-1} \Omega_g = 1. \quad (4.7)$$

Para um dado estágio  $g$ , as componentes complexas do desvanecimento  $G_t^I(g)$  e  $G_t^Q(g)$ , em que  $h_t(g) = G_t^I(g) + jG_t^Q(g)$ , têm a mesma função covariância  $C(\tau)$ :

$$E \left[ G_t^I(g) G_{t+\tau}^I(g) \right] = E \left[ G_t^Q(g) G_{t+\tau}^Q(g) \right] = C(\tau). \quad (4.8)$$

Apesar da análise feita no presente trabalho poder ser aplicada a processos de desvanecimento com diferentes funções covariância  $C(\tau)$ , adota-se aqui o modelo de correlação de Clarke para  $C(\tau)$  [58]:

$$C(\tau) = 0,5J_0(2\pi f_D \tau) \quad (4.9)$$

em que  $J_0$  é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero e  $f_D$  é a máxima frequência Doppler. O sinal recebido, após passar pela transformada discreta de Fourier, passa por um equalizador, com o objetivo de atenuar o efeito da interferência inter-simbólica causada pelo atraso das componentes de multipercursos. Foi utilizado um equalizador ideal em que

$$H_t^{eq}(k) = 1/H_t(k). \quad (4.10)$$

Assim, o sinal na saída do equalizador é dado por

$$R_t(k) = (H_t(k)D_t(k) + N_t(k)) H_t^{eq}(k) = D_t(k) + N_t'(k) \quad (4.11)$$

em que  $N_t'(k)$  é o ruído Gaussiano colorido com densidade espectral de potência  $N_0/|H_t(k)|^2$ . Na sequência, o sinal é desentrelaçado com a aplicação das expressões de permutação inversas e, em seguida, é decodificado com o uso do algoritmo de Viterbi.

#### 4.1.1 Codificador Reed-Solomon

Com o intuito de aumentar a robustez do sistema de comunicações, foi utilizado um código RS externo, concatenado ao SCD ilustrado na Figura 4.1, resultando em um sistema mostrado na Figura 4.2. O codificador RS utiliza símbolos que estão sobre o campo de Galois  $GF(2^b)$ , em que as palavras código são de comprimento  $N = 2^b - 1$  símbolos e possuem  $K$  símbolos de informação.

Considera-se  $c^n = (c_0, \dots, c_{N-1})$  uma palavra-código em que  $c_k \in \text{GF}(2^b)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ . Cada símbolo  $c_k$  é mapeado em uma sequência binária de  $b$  bits,  $c_k^b = (c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kb})$ , sendo a representação do espaço vetorial dos elementos do campo. Cada bit de  $c_k$  é transmitido pelo SCD (representado pela notação  $d_n$  na Figura 4.1), resultando em uma sequência recebida  $r^n = (r_0, \dots, r_{N-1})$  na entrada do decodificador RS. Constitui-se uma sequência binária de erros de símbolo  $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$  em que o evento  $Z_k = 0$  indica que o  $k$ -ésimo símbolo transmitido é recebido corretamente ( $c_k = r_k$ ). Em contrapartida,  $Z_k = 1$  indica que o símbolo transmitido difere do recebido ( $c_k \neq r_k$ ). Na próxima seção, parametrizam-se-se modelos GEC para caracterizar essa sequência de erros de símbolo. Uma vez determinado o modelo, é possível estudar teoricamente o desempenho do código RS concatenado a um SCD.

#### 4.1.2 Parâmetros Utilizados

Este trabalho considera um espaçamento de canal de 20 MHz, sendo os parâmetros do sistema OFDM que dependem desse espaçamento descritos na Tabela 4.2.

**Tabela 4.2:** Valores dos parâmetros OFDM para uma banda de 20 MHz.

Parâmetro	Valor (canal com 20 MHz)
$N_{SD}$ : número de subportadoras de dados	48
$N_{SP}$ : número de subportadoras piloto	4
$N_{ST}$ : número de subportadoras total	64
$\Delta_F$ : banda da subportadora	0,3125 MHz (20 MHz/64)
$T_{FFT}$ : período da subportadora	3,2 $\mu\text{s}$ ( $1/\Delta_F$ )
$T_{GI}$ : duração do intervalo de guarda	0,8 $\mu\text{s}$ ( $T_{FFT}/4$ )
$T_s$ : intervalo total de duração do símbolo	4 $\mu\text{s}$ ( $T_{GI} + T_{FFT}$ )

As modulações adotadas são QPSK e 16-QAM, com energia média por bit transmitido  $\bar{E}_b$ . A SNR média recebida em cada subportadora é dada por

$$\frac{\bar{E}_b}{N_0} \sum_{g=0}^{L-1} \Omega_g$$

**Figura 4.2:** Sistema de comunicações com codificador RS.



o que, com a condição (4.7), corresponde à  $\text{SNR} = \bar{E}_b/N_0$ . Considera-se que o sistema opera na faixa de frequência  $f = 2,4 \text{ GHz}$ . Logo, o comprimento de onda  $\lambda$  é dado por

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{2,4 \times 10^9} = 0,125 \text{ m} \quad (4.12)$$

em que  $c$  é a velocidade de propagação da luz. Logo, considerado-se uma velocidade máxima  $v = 5,4 \text{ km/h} = 1,5 \text{ m/s}$  do receptor em relação ao transmissor, a máxima frequência Doppler  $f_D$  é dada por:

$$f_D = \frac{v}{\lambda} = \frac{1,5}{0,125} = 12 \text{ Hz}. \quad (4.13)$$

Assim, o valor de  $f_D$  utilizado é 12 Hz. Dois valores de  $\tau_m$  foram considerados, 100 ns, com  $L = 20$  e  $\Omega_0 = 0,393$ , e 200 ns, com  $L = 40$  e  $\Omega_0 = 0,221$ , que correspondem aos atrasos dos multipercursos em ambientes *indoor*, e suburbano, respectivamente [64]. Duas modulações foram analisadas, QPSK e 16-QAM, ambas previstas na norma [62], sendo que a quantidade de símbolos transmitida em cada iteração da simulação foi mantida igual a 128 em todos os casos, sendo a quantidade de iterações igual a  $10^6$ . Os sistemas obtidos com estes parâmetros estão dispostos na Tabela 4.3. Nesta Tabela, denota-se cada canal por SCD- $i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

**Tabela 4.3:** *Sistemas de comunicação discretos com codificação não-binária.*

Modelo	Símbolos	Modulação	$\tau_m$	$b$ (RS)
SCD-1	128	QPSK	100ns	8
SCD-2	128	QPSK	200ns	8
SCD-3	128	16-QAM	100ns	8
SCD-4	128	QPSK	100ns	4

## 4.2 Avaliação do GEC que modela um SCD com Codificador RS

O primeiro passo para a obtenção do GEC é a simulação do SCD com parâmetros fixos, para caracterizar a sequência de símbolos  $\{Z_k\}$ . Assim, obtém-se a sequência de erro binária deste SCD, isto é,  $E_k = D_k \oplus \hat{D}_k$ , em que  $\oplus$  denota soma módulo 2. As sequências binárias de erros utilizadas neste trabalho possuem comprimento  $S = 10^8$  bits. A partir desta sequência binária, gera-se a sequência binária de erro de símbolo  $\{Z_k\}$  da seguinte forma: a sequência  $\{E_k\}$  é dividida em subsequências de comprimento  $b$  bits. Se a  $k$ -ésima subsequência é composta por  $b$  zeros consecutivos, então o símbolo RS correspondente é recebido corretamente, o que é

indicado por  $Z_k = 0$ . Caso contrário, o símbolo recebido difere do símbolo RS transmitido, então  $Z_k = 1$ . A sequência de erro de símbolo  $\{Z_k\}$  é a entrada do algoritmo BW [29] que estima os valores dos parâmetros do modelo.

Investiga-se, inicialmente, a capacidade de modelos GEC em reproduzir o comportamento da sequência de símbolo gerada por um SCD. Para a obtenção dos parâmetros do modelo, utiliza-se o algoritmo BW com as cinco condições iniciais descritas na Tabela 4.4, sendo o número de iterações (para cada condição inicial) fixado em 20. A escolha de tal valor deve-se ao fato do algoritmo BW convergir rapidamente (entre 8 e 16 iterações), o que foi constatado observando-se a razão da verossimilhança.

**Tabela 4.4:** Condições iniciais do BW para parametrizar um modelo GEC.

$p_{0,1} (Q)$	$p_{1,0} (q)$	$P_0$	$P_1$	Condição
0,01	0,01	0,01	0,01	1
0,001	0,001	0,001	0,01	2
0,005	0,05	0,05	0,5	3
0,001	0,01	0,01	0,1	4
0,01	0,01	0,01	0,1	5

**Tabela 4.5:** Valores dos parâmetros do GEC que modelam o canal SCD-1.

SNR	Condição inicial	$p_{0,1}$	$p_{1,0}$	$P_0$	$P_1$
10	1	0,01	0,01	0,0192	0,0192
10	2	0,0074	0,1781	0,0004	0,4758
10	3	0,0081	0,2613	0,0004	0,6173
10	4	0,0074	0,1843	0,0004	0,4891
10	5	0,0075	0,1837	0,0004	0,4850
15	1	0,01	0,01	0,0037	0,0037
15	2	0,0018	0,1072	0,0001	0,2197
15	3	0,0018	0,1222	0,0001	0,2474
15	4	0,0018	0,1076	0,0001	0,2218
15	5	0,0019	0,1088	0,0001	0,2175
20	1	0,01	0,01	0,0009	0,0009
20	2	0,0005	0,0931	0,00002	0,1659
20	3	0,0005	0,0992	0,00002	0,1754
20	4	0,0005	0,0932	0,00002	0,1661
20	5	0,0006	0,0972	0,00002	0,1593

Para o modelo SCD-1, definido na Tabela 4.3, foram considerados sete valores de SNR para cada condição inicial. Os valores de cada parâmetro das condições iniciais investigadas, detalhados na Tabela 4.4, buscou manter uma proporcionalidade entre os estados "bom" e "ruim", oriundos da definição do GEC. Na Tabela 4.5, é possível verificar-se os valores obtidos para três valores distintos de SNR. Nota-se que, à exceção da condição 1, que adota todos os parâ-

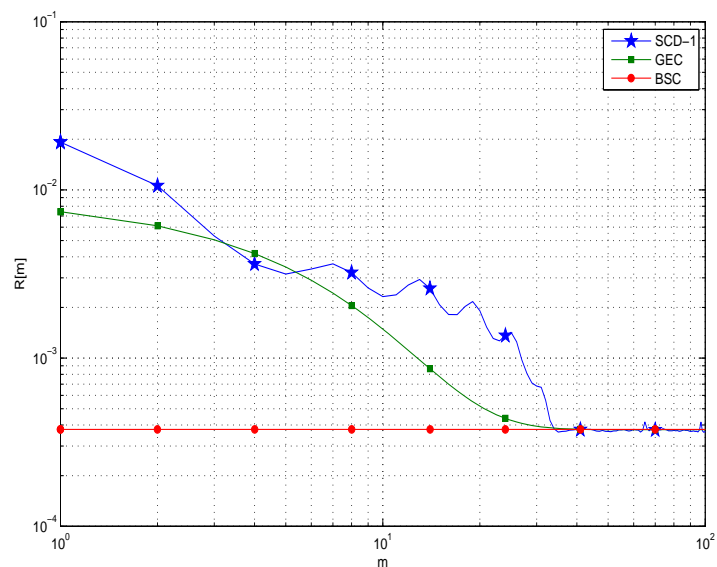
metros com valores iguais, os parâmetros obtidos com as outras condições iniciais convergem para valores aproximados, fato que também ocorreu com os demais valores de SNR analisados. Constatou-se (figuras não mostradas) que as curvas do GEC obtidas com as condições iniciais 2, 3, 4 e 5 são indistinguíveis. Portanto, apenas a condição inicial 2 será considerada nas comparações, dada a sua simplicidade, i.e., as probabilidades de transição de estados possuem os mesmos valores e a probabilidade de erros no estado "bom" é inferior à do estado "ruim". Os parâmetros calculados com essa condição estão dispostos na Tabela 4.5. Com intuito de verificar qual modelo GEC é capaz de reproduzir mais fidedignamente a sequência de erro de símbolo do SCD, são comparadas algumas estatísticas do SCD, obtidas por simulação, com as do GEC, obtidas teoricamente. Três estatísticas foram consideradas:

- ▷  $R[m]$ ;
- ▷  $P(0^m | 1)$ ;
- ▷ PCE.

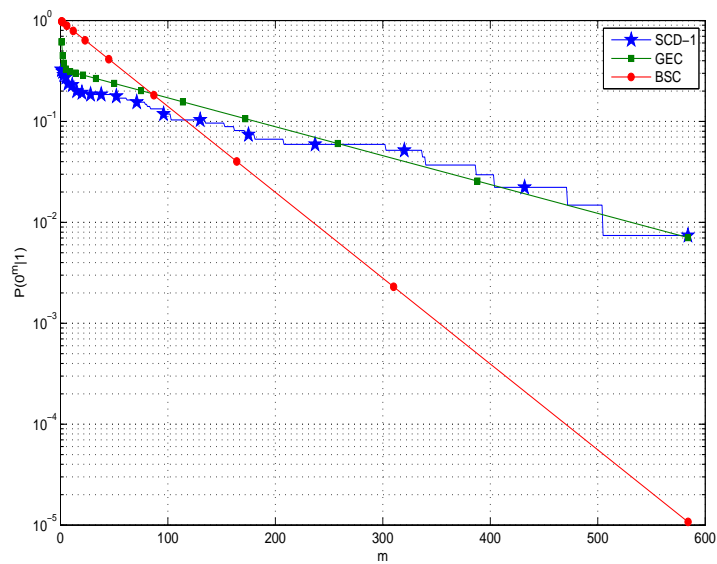
Com o objetivo de investigar se existe memória na sequência de símbolos do canal SCD-1, modela-se essa sequência como um canal BSC, o qual depende apenas de um parâmetro, a probabilidade de erro de símbolo,  $P_S = P(Z_m = 1)$ .

As Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 mostram, respectivamente,  $R[m]$ ,  $P(0^m | 1)$  e  $P(m, n)$ , definidos na Seção 2.3, para o SCD-1, o GEC e o BSC, para SNR igual a 10 dB. Observando-se as curvas, fica claro que utilizar o BSC para modelar o SCD-1 implica em resultados imprecisos, uma vez que o comportamento deste, em nível de símbolos, possui uma memória que o BSC não consegue representar, uma vez que trata-se de um modelo para canais sem memória. Esse comportamento também pode ser observado nos outros valores de SNR, dispostos na Tabela 4.5.

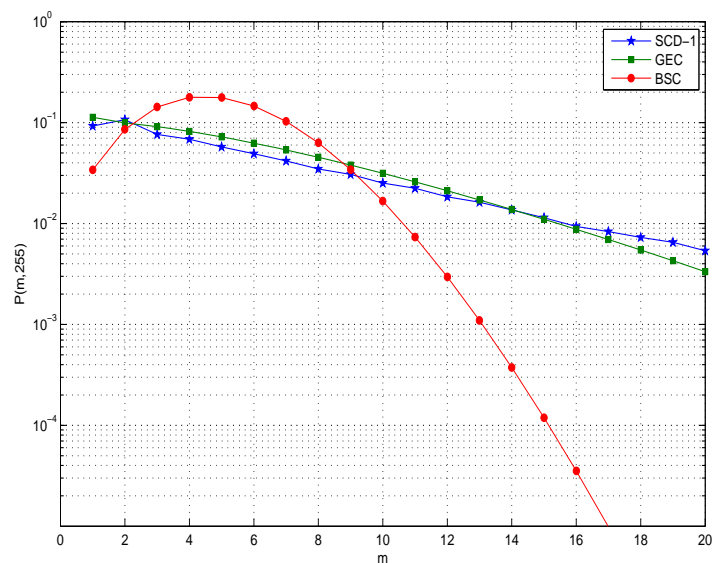
**Figura 4.3:** Comportamento da função autocorrelação para os canais SCD-1, GEC e BSC, com  $SNR=10$  dB, para os parâmetros dispostos na Tabela 4.5.



**Figura 4.4:** Comportamento da probabilidade  $P(0^m | 1)$  de três canais, SCD-1, GEC e BSC, para  $SNR=10$  dB, para os parâmetros dispostos na Tabela 4.5.

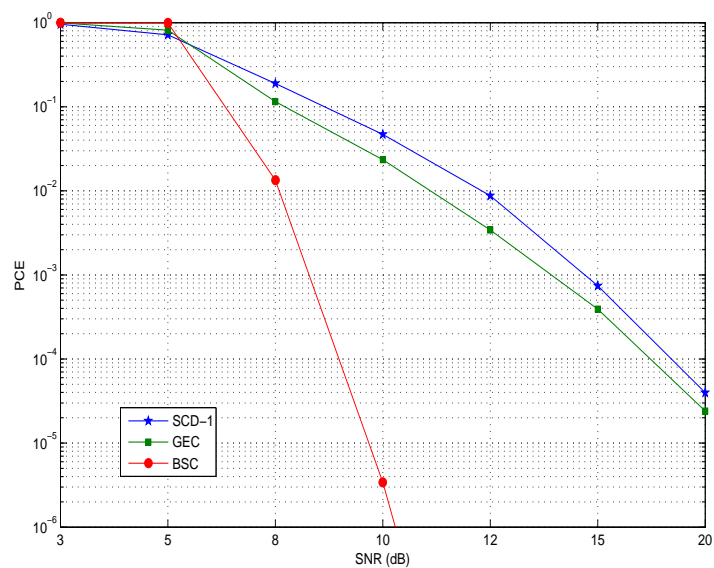


**Figura 4.5:** Comportamento da probabilidade  $P(m, 255)$  de três canais, SCD-1, GEC e BSC, para  $SNR=10$  dB, para os parâmetros dispostos na Tabela 4.5.



Na Figura 4.6, é possível visualizar o comportamento da PCE em função da SNR, para os três modelos avaliados. Nota-se que o GEC aproxima-se bem, para a faixa de SNR avaliada, da curva do SCD-1 mas, no entanto, ambos distam razoavelmente do comportamento do BSC.

**Figura 4.6:**  $PCE \times SNR$  para três canais, SCD-1, GEC e BSC, com  $N = 255$  e  $t_c = 17$ . Os parâmetros do GEC estão na Tabela 4.5.



Situação semelhante foi observada para o SCD-2, cujos parâmetros calculados estão dis-

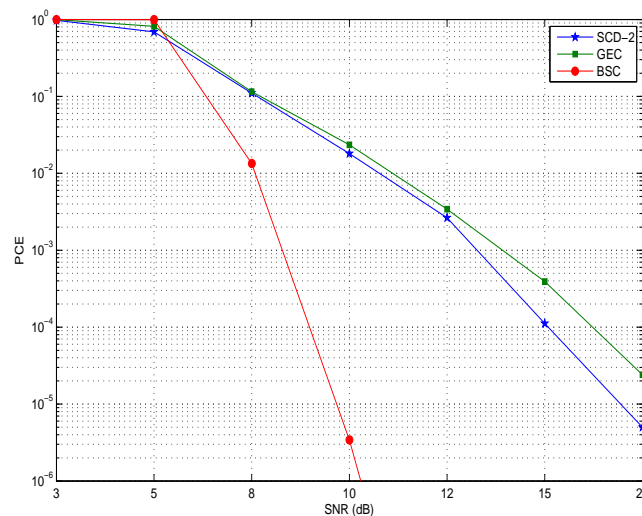


postos na Tabela 4.6. Na Figura 4.7, é possível visualizar o comportamento da PCE em função da SNR, para os três modelos avaliados, para  $N = 255$  e  $t_c = 17$ . Nota-se que o GEC também representa a contento a curva do SCD-2, fato que mostra que este é um bom modelo para o caso apresentado.

**Tabela 4.6:** Valores dos parâmetros do GEC que modelam o SCD-2.

SNR	$p_{0,1}$	$p_{1,0}$	$P_0$	$P_1$
3	0,0655	0,2432	0,0008	0,9664
5	0,0374	0,3258	0,00049	0,9237
8	0,0155	0,2593	0,00030	0,5613
10	0,0081	0,1583	0,0003	0,3318
12	0,0050	0,1508	0,0001	0,2717
15	0,0024	0,1271	0,00007	0,2090
20	0,0010	0,1427	0,00003	0,1991

**Figura 4.7:**  $PCE \times SNR$  para três canais, SCD-2, GEC e BSC, com  $N = 255$  e  $t_c = 17$ . Os parâmetros do GEC estão na Tabela 4.6.



A Tabela 4.7 mostra os valores dos parâmetros do GEC que modelam o canal SCD-3, também definido na Tabela 4.3, considerando-se a condição inicial 2.

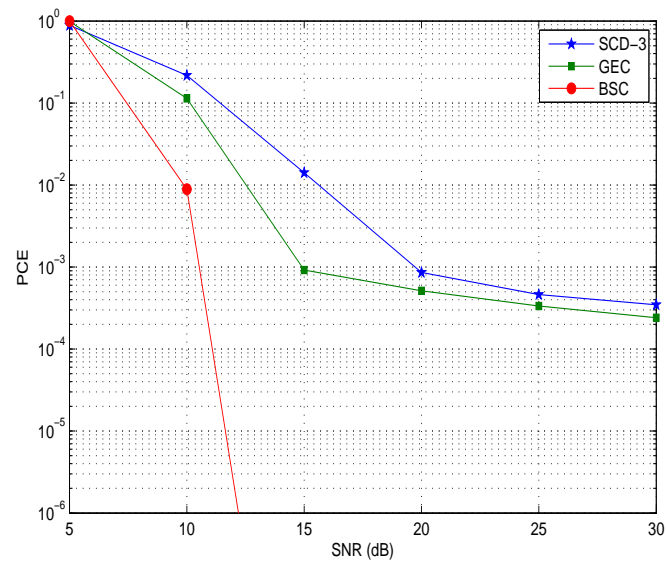
Nas Figuras 4.8 e 4.9, é possível visualizar o comportamento da PCE em função da SNR, para o SCD-3 e SCD-4, respectivamente. Ressalta-se que o SCD-4 possui parâmetros idênticos ao SCD-1, com exceção do comprimento do símbolo  $b$ , que no SCD-1 é igual a 8 e no SCD-4 é igual a 4. Nota-se que a curva do GEC possui valores próximos à curva do SCD-3. No caso do SCD-4, em que o comprimento dos símbolos é menor, percebe-se uma nítida evolução da

**Tabela 4.7:** Valores dos parâmetros do GEC que modelam o canal SCD-3.

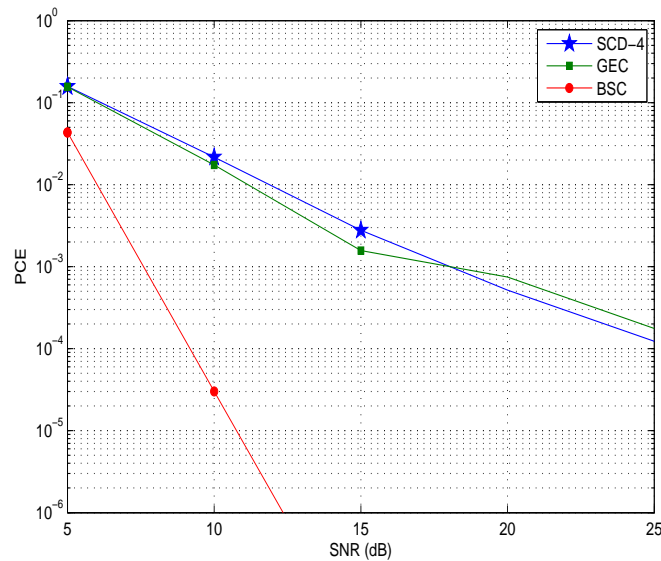
SNR	$p_{0,1}$	$p_{1,0}$	$P_0$	$P_1$
5	0,0496	0,0175	0,0001	0,9713
10	0,0144	0,3584	4e-7	0,9738
15	0,0045	0,2742	3e-6	0,5146
20	0,0009	0,0699	1e-6	0,1813
25	0,0015	0,1092	2e-6	0,2308
30	0,0013	0,1095	1e-6	0,0027

precisão do modelo em reproduzir o comportamento do canal. No entanto, em ambos os casos, há uma razoável distância em relação ao comportamento do BSC.

**Figura 4.8:**  $PCE \times SNR$  para três canais, SCD-3, GEC e BSC, com  $N = 255$  e  $t_c = 17$ . Os parâmetros do GEC estão na Tabela 4.7.



**Figura 4.9:**  $PCE \times SNR$  para três canais, SCD-4, GEC e BSC, com  $N=255$  e  $t_c = 17$ .



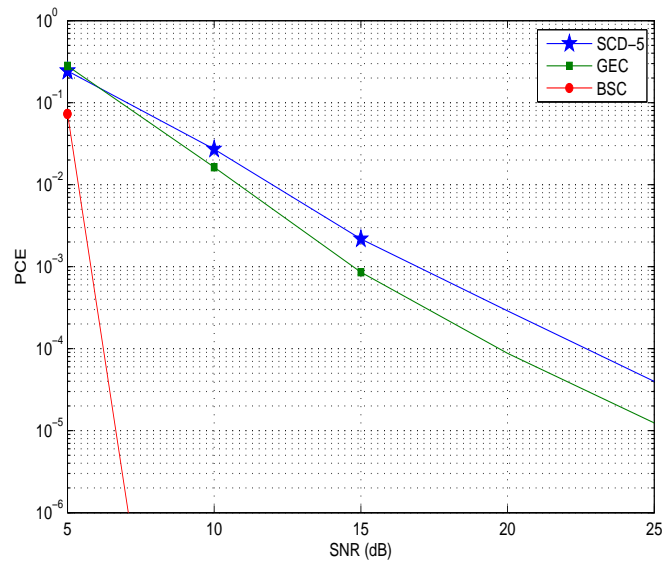
### 4.3 Avaliação do GEC que modela um SCD com Codificador Binário

Avalia-se, aqui, um sistema de comunicações semelhante ao anteriormente descrito, para o qual substituiu-se o codificador RS por um codificador de bloco binário, linear, com comprimento  $N = 255$  e  $t_c = 17$ , com o objetivo de averiguar a robustez do modelo GEC quando concatenado a este tipo de codificador. Os parâmetros utilizados são detalhados na Tabela 4.8, e são semelhantes aos parâmetros do SCD-1, detalhado na Tabela 4.3. No caso do SCD-6, a quantidade de símbolos QPSK transmitidos em cada iteração da simulação é aumentada para 2048. Vê-se, nas Figuras 4.10 e 4.11, que o comportamento da PCE em função da SNR, para o SCD-5 e SCD-6, respectivamente. É possível observar que o GEC representa de forma satisfatória tanto o SCD-5 quanto o SCD-6, visto que as curvas do GEC estão próximas à do SCD em ambos os casos, para os valores de SNR analisados.

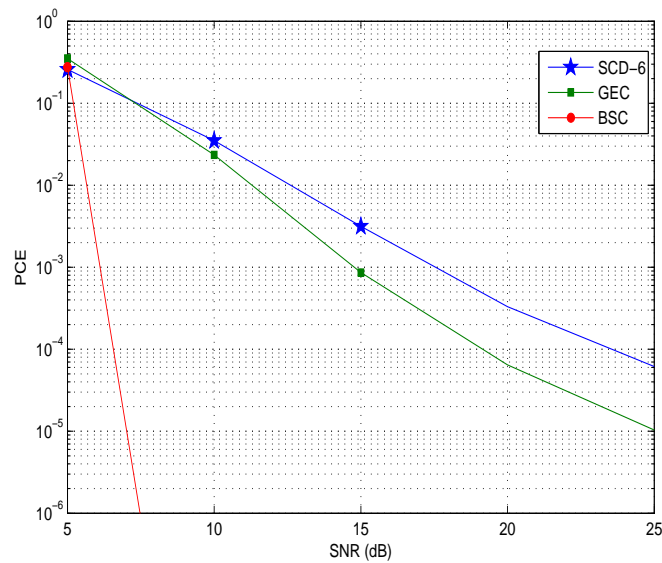
**Tabela 4.8:** *Sistemas de comunicação discretos com codificação binária.*

Modelo	Símbolos	Modulação	$\tau_m$
SCD-5	128	QPSK	100ns
SCD-6	2048	QPSK	100ns

**Figura 4.10:**  $PCE \times SNR$  para três canais, SCD-5, GEC e BSC, com  $N = 255$  e  $t_c = 17$ .



**Figura 4.11:**  $PCE \times SNR$  para três canais, SCD-6, GEC e BSC, com  $N = 255$  e  $t_c = 17$ .



#### 4.4 Avaliação dos modelos 3-NM e 4-NM para modelar o SCD

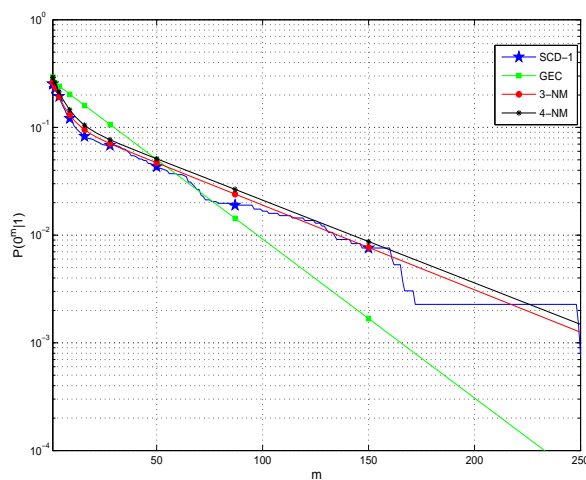
Nesta seção, serão avaliados modelos de ordem superior ao GEC, 3-NM e 4-NM, com vistas a estudar a fidedignidade da reprodução da sequência de erros do SCD. As estatísticas do SCD são obtidas por simulação, enquanto as do  $J$ -NM são obtidas teoricamente. Duas estatísticas são consideradas:  $P(0^m | 1)$  e  $P(m, n)$ .

Na Tabela 4.9, são mostrados os parâmetros dos modelos  $J$ -NM, obtidos utilizando-se o algoritmo BW, que modelam o SCD-1 e o SCD-2, para SNR=3, 5, 8, 10, 12 e 15 dB. Na sequência, as Figuras 4.12-4.19 exibem o comportamento das estatísticas indicadas.

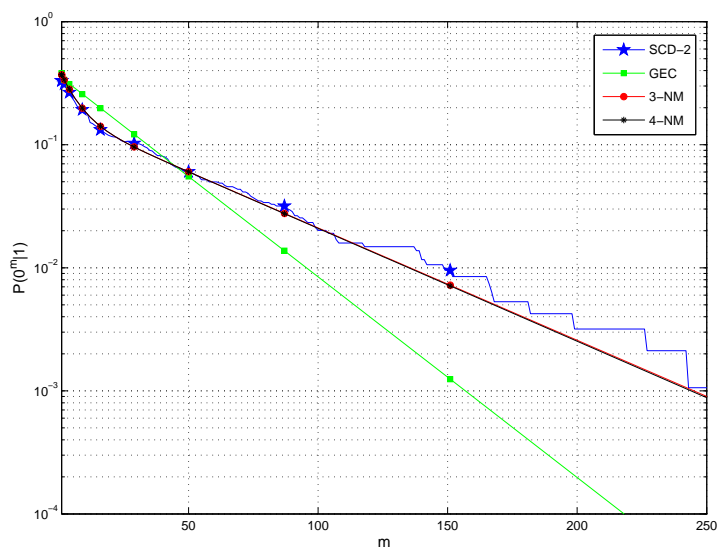
**Tabela 4.9:** Valores dos parâmetros do J-NM, sendo  $J = 3$  e  $4$ , que modelam o SCD para vários valores de SNR.

Modelo	$J$	SNR	$p_{0,1}$	$p_{1,0}$	$p_{1,2}$	$p_{2,1}$	$p_{2,3}$	$p_{3,2}$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	
SCD-1	3	3	0,0328	0,033400	0,1164	0,2059	-	-	$2,1e^{-3}$	$9,3e^{-4}$	$9,8e^{-1}$	-	
		5	0,0270	0,055600	0,1091	0,2857	-	-	$1,2e^{-3}$	$1,7e^{-6}$	$9,9e^{-1}$	-	
		8	0,0110	0,020700	0,0448	0,4034	-	-	$6e^{-5}$	$1e^{-4}$	$9,7e^{-1}$	-	
		10	0,0097	0,057300	0,0613	0,5164	-	-	$6e^{-7}$	$1,5e^{-8}$	$9,9e^{-1}$	-	
		12	0,0047	0,005500	0,0111	0,2752	-	-	$6e^{-6}$	$1,1e^{-4}$	$5,1e^{-1}$	-	
	15	0,0035	0,006500	0,0065	0,1940	-	-	$1e^{-5}$	$3e^{-5}$	$3,2e^{-1}$	-		
	4	3	0,0961	0,000020	0,0328	0,0333	0,1163	0,2058	$1,1e^{-2}$	$2,1e^{-3}$	$9e^{-4}$	0,9865	
		5	0,0537	0,000030	0,0258	0,0500	0,1043	0,2838	$1,9e^{-2}$	$1,2e^{-3}$	$4e^{-5}$	0,9968	
		8	0,0310	0,000069	0,0109	0,0204	0,0444	0,4032	$2,1e^{-3}$	$5,9e^{-6}$	$1,3e^{-4}$	0,9763	
		10	0,0183	0,000100	0,0064	0,0106	0,0239	0,4715	$1,9e^{-4}$	$9e^{-6}$	$1,2e^{-4}$	0,9037	
		12	0,0107	0,000170	0,0048	0,0051	0,0107	0,2679	$3e^{-5}$	$5e^{-6}$	$1,1e^{-4}$	0,5092	
	SCD-2	3	15	0,0057	0,000280	0,0038	0,0063	0,0062	0,1878	$2e^{-5}$	$8,6e^{-6}$	$3e^{-5}$	0,3125
			3	0,0307	0,011800	0,0933	0,2545	-	-	$1,3e^{-3}$	$5e^{-4}$	$9,8e^{-1}$	-
			5	0,034	0,045100	0,0908	0,3696	-	-	$1,9e^{-4}$	$3e^{-8}$	$9,9e^{-1}$	-
			8	0,0101	0,008900	0,0301	0,5205	-	-	$3e^{-6}$	$3e^{-5}$	$9,4e^{-1}$	-
10			0,0116	0,054200	0,0503	0,6510	-	-	$4,7e^{-13}$	$6e^{-13}$	$9,9e^{-1}$	-	
4		12	0,0054	0,002900	0,0089	0,2368	-	-	$2e^{-6}$	$3,8e^{-5}$	$3,7e^{-1}$	-	
		15	0,0042	0,004700	0,0062	0,2224	-	-	$4e^{-6}$	$1,6e^{-5}$	$3e^{-1}$	-	
		3	0,1098	0,000019	0,0169	0,0200	0,1049	0,2594	$1,1e^{-2}$	$1,7e^{-3}$	$2e^{-4}$	0,9891	
		5	0,0875	0,000020	0,0341	0,0451	0,0908	0,3696	$1,1e^{-2}$	$1,8e^{-4}$	$3e^{-8}$	0,9999	
		8	0,0323	0,000060	0,0101	0,0087	0,0299	0,5201	$8e^{-5}$	$3e^{-6}$	$3e^{-5}$	0,9420	
4		10	0,0169	0,000110	0,0063	0,0034	0,0154	0,3464	$1e^{-5}$	$2e^{-6}$	$6,9e^{-5}$	0,5664	
		12	0,0106	0,000100	0,0054	0,0027	0,0086	0,2334	$5e^{-6}$	$1e^{-6}$	$3e^{-5}$	0,3694	
		15	0,0069	0,000230	0,0045	0,0045	0,0060	0,2172	$9e^{-6}$	$3e^{-6}$	$1,5e^{-5}$	0,3006	

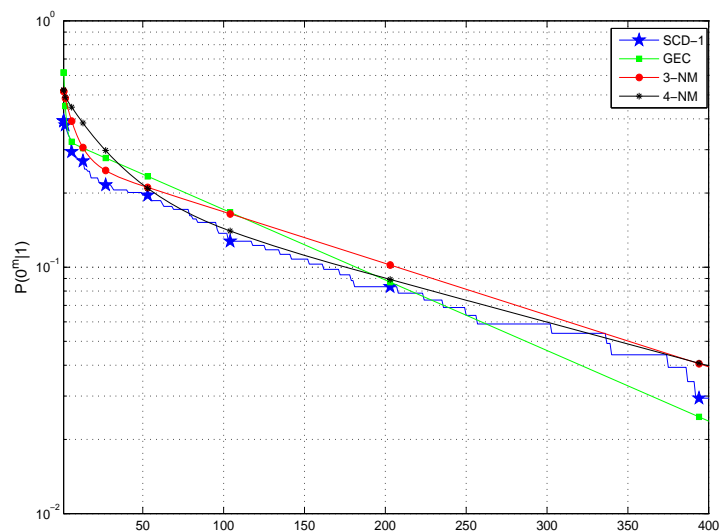
**Figura 4.12:** Comportamento da probabilidade  $P(0^m | 1)$  de quatro canais, SCD-1, GEC, 3-NM e 4-NM, cujos parâmetros estão na Tabela 4.9, para  $SNR=5$  dB.



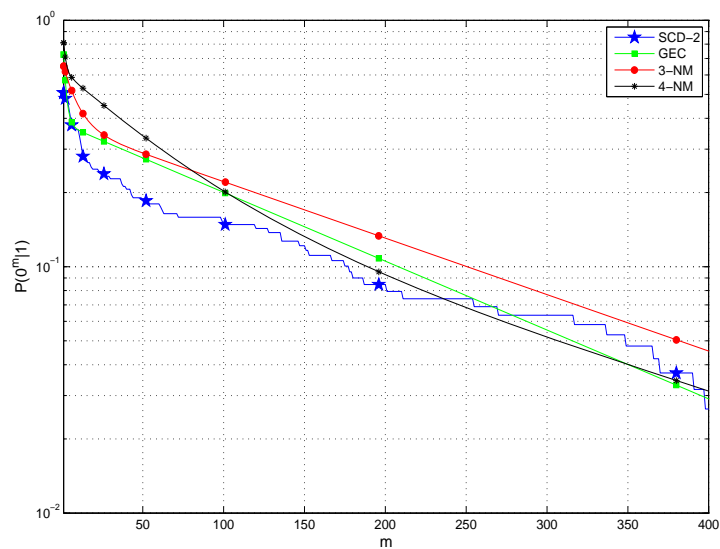
**Figura 4.13:** Comportamento da probabilidade  $P(0^m | 1)$  de quatro canais, SCD-2, GEC, 3-NM e 4-NM, cujos parâmetros estão na Tabela 4.9, para  $SNR=5$  dB.



**Figura 4.14:** Comportamento da probabilidade  $P(0^m | 1)$  de quatro canais, SCD-1, GEC, 3-NM e 4-NM, cujos parâmetros estão na Tabela 4.9, para  $SNR=10$  dB.



**Figura 4.15:** Comportamento da probabilidade  $P(0^m | 1)$  de quatro canais, SCD-2, GEC, 3-NM e 4-NM, cujos parâmetros estão na Tabela 4.9, para  $SNR=10$  dB.

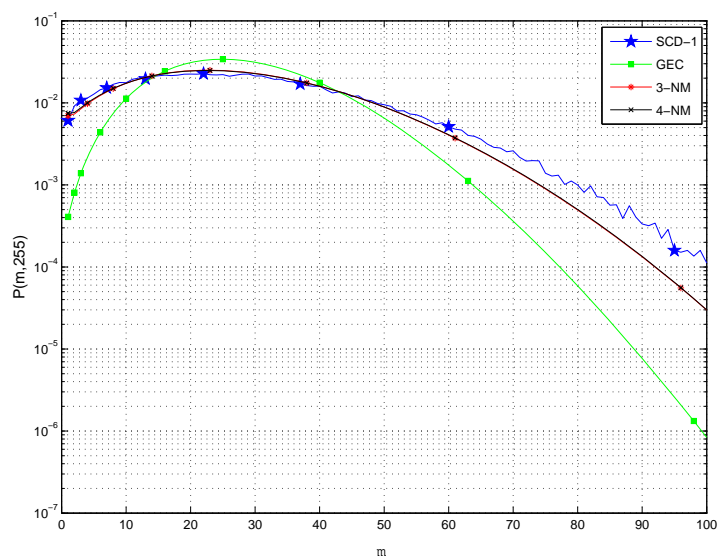


Observando-se as curvas das Figuras 4.12 e 4.13 percebe-se que, para  $SNR=5$  dB, os modelos de ordem 3 e 4 possuem uma capacidade superior ao GEC para reproduzir o comportamento do SCD-1 e SCD-2. Já nos casos em que os valores de  $SNR=10$  dB, mostrados nas Figuras 4.14 e 4.15, o GEC consegue alcançar uma performance satisfatória na reprodução do comportamento

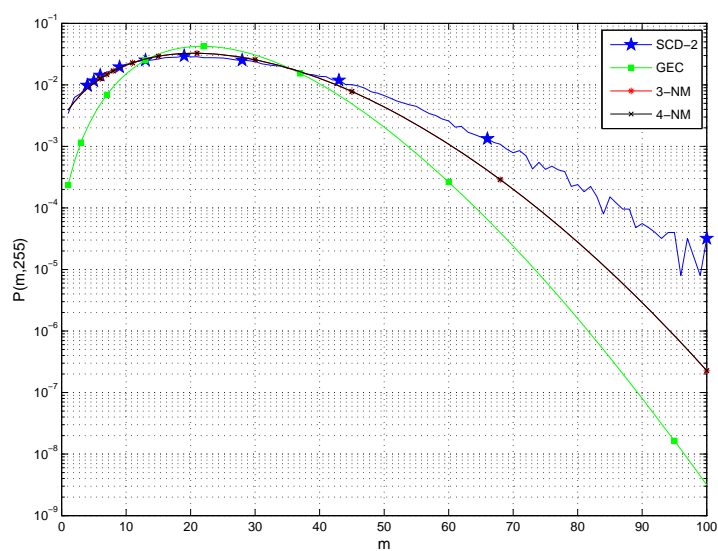


do SCD-1 e SCD-2.

**Figura 4.16:** Comportamento da probabilidade  $P(m, 255)$  de quatro canais, SCD-1, GEC, 3-NM e 4-NM, para  $SNR=5$  dB.



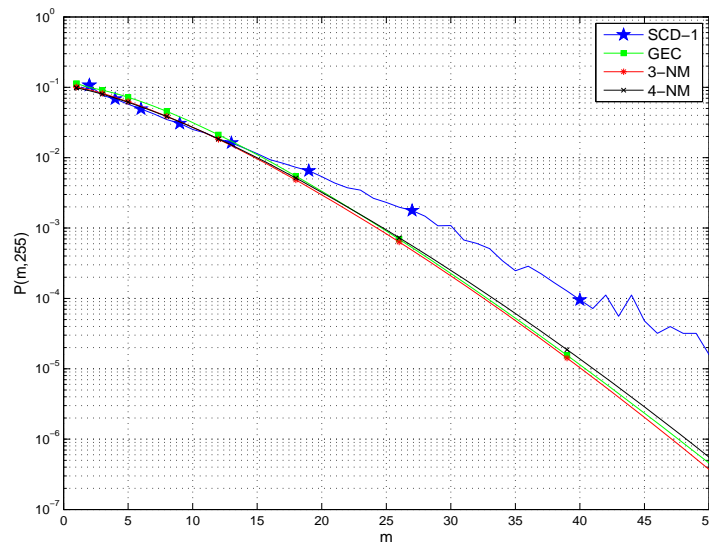
**Figura 4.17:** Comportamento da probabilidade  $P(m, 255)$  de quatro canais, SCD-2, GEC, 3-NM e 4-NM, para  $SNR=5$  dB.



**Tabela 4.10:** Modelos  $J$ -NM que aproximam um SCD com  $f_D T = 10^{-3}$  para  $SNR = 3, 5, 8, 10, 12$  e  $15$  dB.

<i>Canal</i>	SNR	$J$
SCD-1/SCD-2	3 dB	4
	5 dB	3
	8 dB	3
	10 dB	2
	12 dB	2
	15 dB	2

**Figura 4.18:** Comportamento da probabilidade  $P(m, 255)$  de quatro canais, SCD-1, GEC, 3-NM e 4-NM, para  $SNR=10$  dB.

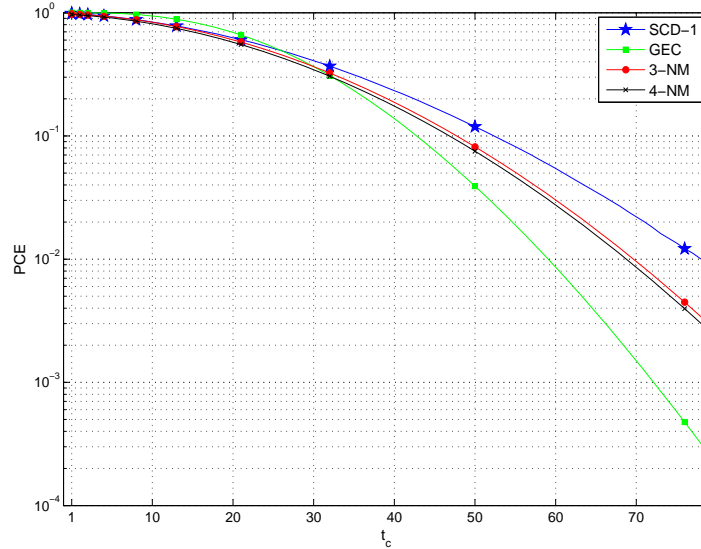


Analisando-se a segunda estatística obtida,  $P(m, n)$ , mais especificamente as curvas que estão nas Figuras 4.16 e 4.17, para  $SNR=5$  dB, é possível identificar a superioridade dos modelos de ordens 3 e 4, em relação ao GEC, na reprodução do comportamento do SCD-1 e SCD-2. Todavia, o modelo de ordem 4 é mais complexo e não apresenta vantagem em relação ao de ordem 3. Essa conclusão também foi alcançada por meio da análise da  $P(0^m | 1)$  (figuras não mostradas). Para  $SNR=10$  dB, a Figura 4.18 mostra que não houve uma melhora na performance do 3-NM em relação ao GEC. Os valores escolhidos de  $J$  para os modelos  $J$ -NM que reproduzem o SCD-1 e SCD-2 para os diferentes valores de SNR analisados são mostrados na Tabela 4.10.

A Figura 4.19 mostra o comportamento da PCE em função da capacidade de correção do código  $t_c$ . Observa-se, por fim, que o SCD-1 possui valores da PCE mais próximos dos modelos

3-NM e 4-NM, quando  $t_c \geq 35$ , do que do GEC.

**Figura 4.19:**  $PCE \times t$  para quatro canais, SCD-1, GEC, 3-NM e 4-NM, para  $N = 255$  e  $SNR=5$  dB. Os parâmetros dos FSMC estão nas Tabelas 4.7 e 4.9.



## 4.5 Entrelaçamento Finito

Esta seção avalia o comportamento do modelo quando um entrelaçador finito é inserido no sistema de comunicação discreto. Em [65] esse problema foi abordado, onde verificou-se que o uso do entrelaçamento causa uma diminuição nos efeitos da memória do canal. O diagrama de blocos de um sistema codificado com entrelaçamento finito é mostrado na Figura 4.20. Seja  $u^k = (u_0 u_1 \dots u_{K-1})$  uma sequência de  $K$  dígitos binários de informação que é a entrada de um codificador de bloco de parâmetros  $(N, K)$ . A saída do codificador é uma palavra-código binária  $c^n = (c_0 c_1 \dots c_{N-1})$ , a qual, após passar pelo entrelaçador com nível de entrelaçamento  $I_d$ , é representada por  $\bar{c}^n$ . Os efeitos indesejados da propagação são modelados como uma sequência binária de ruídos  $z^n = (z_i z_{i+1} \dots z_{i+N-1})$ , de comprimento  $N$ , produzida pelo canal. A sequência  $\bar{r}^n = (\bar{r}_0 \bar{r}_1 \dots \bar{r}_{N-1})$  chega na entrada do desentrelaçador, no qual a sequência de ruído em cada linha será separada de  $I_d$  posições, ou seja,  $\bar{z}^n = (\bar{z}_i \bar{z}_{i+1} \dots \bar{z}_{i+N-1}) = (z_i z_{i+I_d} \dots z_{i+(N-1)I_d})$ . Em seguida, a sequência  $\mathbf{r}$  entra no decodificador e, finalmente, obtém-se  $\hat{u}^k$  na saída do sistema. Dada uma sequência  $\bar{\mathbf{z}}$  específica, define-se um conjunto  $\mathcal{X}_N$  formado pela inserção do conjunto  $\zeta_{I_d-1}^*$  entre cada dígito da sequência  $\bar{z}^n$ , ou seja,  $\mathcal{X}_N = \{\zeta_{I_d-1}^* z_i \zeta_{I_d-1}^* z_{i+I_d} \dots \zeta_{I_d-1}^* z_{i+(N-1)I_d}\}$ .



**Figura 4.20:** Sistema de comunicações com entrelaçamento.

Utilizando-se a mesma metodologia e definições da Seção 3.4, é possível determinar a probabilidade de ocorrerem  $m$  erros em um bloco de comprimento  $n$  levando em consideração  $I_d$ ,  $P^{I_d}(m, n)$ . Para tal, define-se inicialmente uma série geradora para o conjunto  $\mathcal{X}_N$ :

$$F_{\mathcal{X}_N} = F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_{z_i} F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_{z_{i+I_d}} \cdots F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_{z_{i+(N-1)I_d}} \quad (4.14)$$

onde  $F_{\zeta_{I_d-1}^*} = (x_0 + x_1)^{I_d-1}$  é a série geradora do conjunto  $\zeta_{I_d-1}^*$ . A probabilidade da sequência  $z^n$  é dada por:

$$\begin{aligned} P(z_i z_{i+I_d} \cdots z_{i+(n-1)I_d}) &= \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\mathcal{X}_N}) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \left( \prod_{k=0}^{N-1} \Delta (x_0 + x_1)^{I_d-1} x_{z_{i+kI_d}} \right) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \left( \prod_{k=0}^{N-1} \{ \mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1) \}^{I_d-1} \mathbf{P}(z_{i+kI_d}) \right) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \left( \prod_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}^{I_d-1} \mathbf{P}(z_{i+kI_d}) \right) \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

sendo  $\Delta$  definida em (3.19). Em seguida, será determinada a probabilidade do  $J$ -NM entrelaçado, com nível de entrelaçamento  $I_d$ , gerar  $m$  dígitos errados em uma palavra recebida de comprimento  $n$  em cada linha do entrelaçador, denotada por  $P^{I_d}(m, n)$ . Seja o conjunto  $\mathcal{X}_N^m$  a união de todos os conjuntos  $\mathcal{X}_N$ , no qual a sequência  $z^n$  possui  $m$  erros. Portanto, observa-se que  $P^{I_d}(m, n) = P(\mathcal{X}_N^m)$ . Assim, é possível determinar  $P^{I_d}(m, n)$  calculando-se, inicialmente, uma expressão para a série geradora de  $\mathcal{X}_N^m$  e utilizando-se a mesma idéia contida em (3.18), ou seja,

$$P^{I_d}(m, n) = \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\mathcal{X}_N^m}) \mathbf{1}. \quad (4.16)$$

Define-se o conjunto  $\mathcal{X}^*$  como a união de todos os possíveis conjuntos  $\mathcal{X}_N$  para todas as sequências produzidas pelo canal entrelaçado. A série geradora para  $\mathcal{X}_N^*$  é:

$$F_{\mathcal{X}_N^*} = \left( F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_0 + F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_1 \right)^n, \quad \in \mathbb{R} \langle x_0, x_1 \rangle. \quad (4.17)$$

Utilizando-se os indeterminantes  $s$  e  $z$  para enumerar o peso de Hamming e o comprimento de cada sequência em  $F_{\mathcal{X}_N^*}$ , respectivamente, define-se a seguinte série geradora:

$$\begin{aligned} F^{I_d}(x_0, x_1, s, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left( F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_0 + F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_1 \right)^i \\ &= \left( 1 - z((x_0 + x_1)^{I_d-1} x_0 + s(x_0 + x_1)^{I_d-1} x_1) \right)^{-1} \in \mathbb{R} \langle x_0, x_1 \rangle [[s, z]]. \end{aligned}$$

A partir da qual, chega-se à seguinte relação:

$$P^{I_d}(m, n) = P(\mathcal{X}_n^m) = [s^m z^n] \mathbf{\Pi}^T \left( \mathbf{I} - \mathbf{P}^{I_d-1} \{z\mathbf{P}(0) + zs\mathbf{P}(1)\} \right)^{-1} \mathbf{1}. \quad (4.18)$$

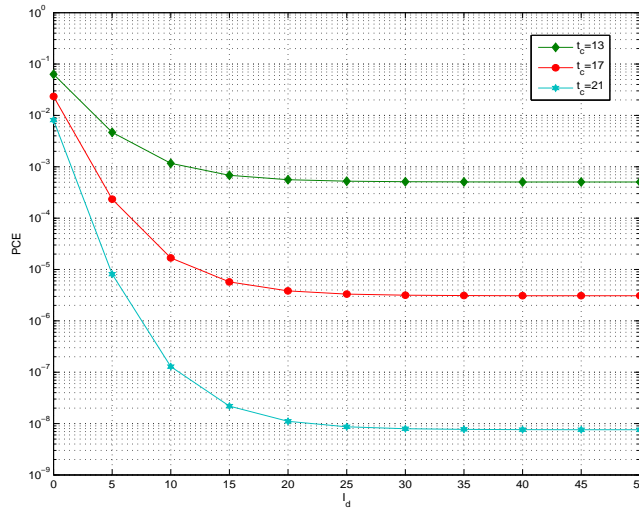
Substituindo-se as matrizes de probabilidades de transição de estados do  $J$ -NM, dadas em (2.45) e (2.47), em (4.18), obtém-se  $P^{I_d}$  para o canal entrelaçado. Para o GEC, a matrix  $\mathbf{P}$  elevada a uma potência  $m$  pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{P}^m = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{Q}{q} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-q-Q)^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{q}{q+Q} & \frac{Q}{q+Q} \\ -\frac{q}{q+Q} & \frac{q}{q+Q} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

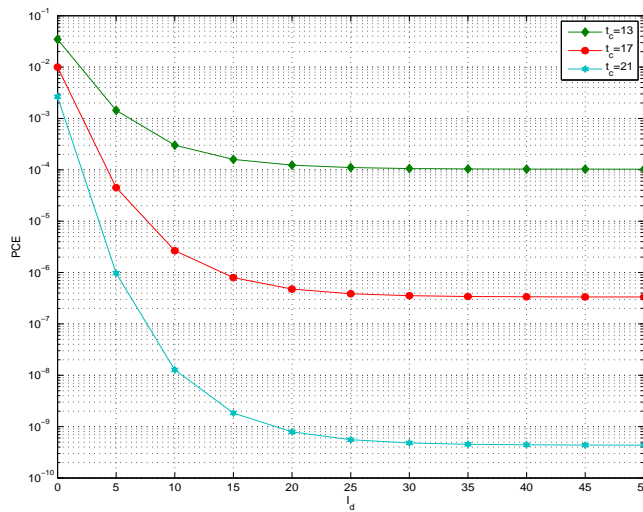
o que, substituído em (4.18), verifica-se que o canal entrelaçado é um novo GEC em que  $Q$  é substituído por  $\frac{Q}{q+Q} - \frac{Q(1-q-Q)^{I_d}}{q+Q}$  e  $q$  é substituído por  $\frac{q}{q+Q} - \frac{Q(1-q-Q)^{I_d}}{q+Q}$ , possibilitando calcular todas as citadas estatísticas para um determinado valor de  $I_d$ .

A Figura 4.21 mostra o comportamento da PCE em função do aumento do nível de entrelaçamento  $I_d$  para o canal SCD-1, sendo  $N = 255$ , SNR=10 dB e  $t_c = 13, 17$  e  $21$ . É possível concluir que para  $I_d \geq 20$  a PCE não apresenta uma melhoria significativa. Neste caso, o aumento de  $I_d$  implicaria apenas em um maior atraso no processamento. O mesmo pode ser concluído acerca da Figura 4.22, que mostra o comportamento do canal SCD-2.

**Figura 4.21:**  $PCE \times I_d$ , para o canal SCD-1, com  $N = 255$  e  $SNR=10$  dB, para  $t_c=13, 17, 21$ .



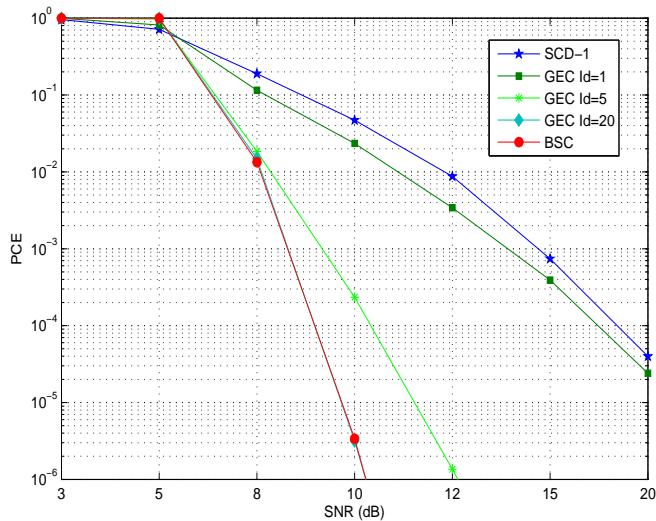
**Figura 4.22:**  $PCE \times I_d$ , para o canal SCD-2, com  $N = 255$  e  $SNR=10$  dB, para  $t_c = 13, 17, 21$ .



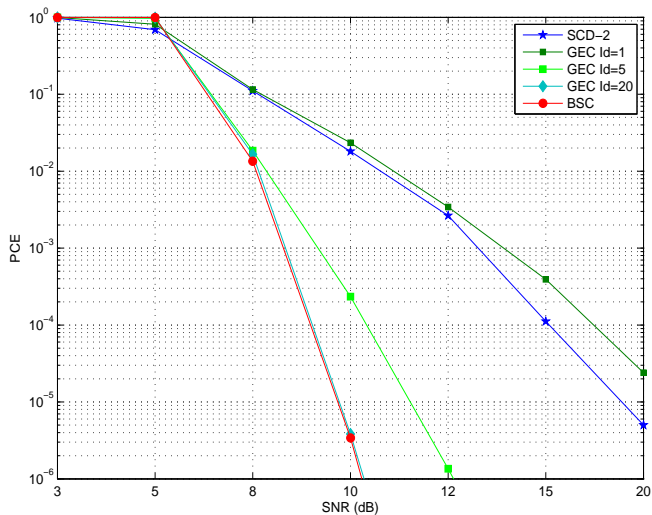
É possível observar, na Figura 4.23, que para  $I_d \geq 20$  o canal se comporta como um canal sem memória, dado que a curva do GEC com  $I_d = 20$  está sobreposta pela curva do BSC. Em outras palavras, observa-se que a incorporação de um entrelaçador entre o canal discreto e o codificador RS propicia um ganho substancial de desempenho, podendo o sistema atingir o desempenho do BSC. O mesmo pode ser deduzido para o SCD-2, observando-se a Figura 4.24, e para o SCD-3, na Figura 4.25. Também pode deduzir-se que, para valores mais baixos de SNR, não é interessante utilizar-se o entrelaçamento, uma vez que não há uma melhora

considerável do canal em decorrência do processamento extra requerido.

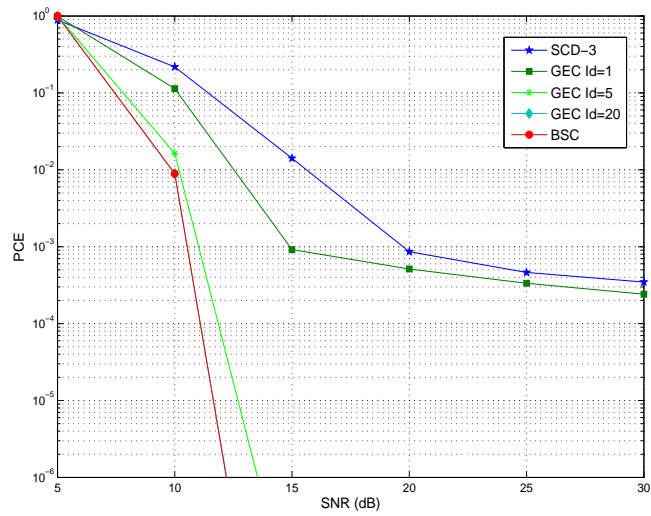
**Figura 4.23:**  $PCE \times SNR$  para três canais,  $SCD-1$ ,  $GEC$  e  $BSC$ , para  $N = 255$  e  $t_c = 17$ . Os parâmetros do  $GEC$  estão na Tabela 4.5.



**Figura 4.24:**  $PCE \times SNR$  para três canais,  $SCD-2$ ,  $GEC$  e  $BSC$ , para  $N = 255$  e  $t_c = 17$ . Os parâmetros do  $GEC$  estão na Tabela 4.6.



**Figura 4.25:**  $PCE \times SNR$  para três canais, SCD-3, GEC e BSC, para  $N = 255$  e  $t_c = 17$ . Os parâmetros do GEC estão na Tabela 4.7.





# 5

## MODELO FSMC COM DECODIFICAÇÃO SUAVE

ESTE capítulo apresenta um modelo FSMC não binário para capturar tanto a informação de decisão suave como a correlação temporal de um canal DFC com  $2^\xi$  níveis de quantização. Em seguida, é discutido um esquema de decodificação iterativa, baseado no algoritmo soma-produto, para a decodificação e estimação de estado do canal de forma conjunta. Este esquema foi proposto em [37] para o canal GEC e é estendido neste capítulo para um canal não binário. Em seguida, é estudado o desempenho de códigos LDPC em canais FSMC não binários. Quantifica-se, particularmente, o ganho de codificação obtido com o aumento do número de níveis do alfabeto de saída do canal.

### 5.1 Modelo de Canal Não-Binário

Sejam  $\mathcal{X} = \{0, 1\}$  e  $\mathcal{Y} = \{0, 1, \dots, 2^\xi - 1\}$  os alfabetos de entrada e saída de um canal de comunicações discreto, respectivamente. Denota-se o processo de entrada  $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ ,  $X_k \in \mathcal{X}$  e o processo de saída  $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ ,  $Y_k \in \{0, 1, \dots, 2^\xi - 1\}$ . É conveniente se ter uma expressão da saída  $\{Y_k\}$  de um canal como uma função explícita do processo de entrada  $\{X_k\}$  e do processo de ruído  $\{Z_k\}$ , em que os processos  $\{Z_k\}$  e  $\{X_k\}$  são independentes entre si. Neste caso, o processo de ruído pode ser modelado por um modelo FSMC independente da entrada do canal. Considere-se um canal de entrada binária e saída  $2^\xi$ -ária dado por [66]:

$$Y_k = (2^\xi - 1)X_k + (-1)^{X_k} Z_k \quad (5.1)$$

onde  $k = 1, 2, \dots$ . Refere-se ao canal descrito por (5.1) como o canal discreto de ruído não-binário (NBND, *Non-Binary Noise Discrete Channel*), em que a saída  $Y_k$  é expressa em termos da entrada  $X_k$  e do ruído  $Z_k$ . Assume-se que o processo de ruído  $\{Z_k\}$  em (5.1) é governado por uma distribuição de ordem  $n$ ,  $P_{\text{NBND}}^{(n)}(z^n) \triangleq P_{\text{NBND}}^{(n)}(Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n)$ , para  $z_k \in \mathcal{Y}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Segue diretamente de (5.1) e do fato que os processos de entrada e de ruído são independentes que, para cada  $n \geq 1$ , a probabilidade condicional de ordem  $n$  do NBND é dada por

$$P_{\text{NBND}}(y^n | x^n) = P_{\text{NBND}}(z^n) \quad (5.2)$$

em que  $z^n$  é um vetor de erro cujas componentes são dadas por

$$z_k = \frac{y_k - (2^\xi - 1)x_k}{(-1)^{x_k}}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.3)$$

Dados  $x^n \in \mathcal{X}^n$  e  $y^n \in \mathcal{Y}^n$ , fazendo-se  $P_{\text{NBND}}(z^n)$  igual à expressão em (3.7), para todo  $n \geq 1$ , com cada  $z_k$  dado em (5.3), obtém-se  $P_{\text{DFC}}(y^n | x^n) = P_{\text{NBND}}(y^n | x^n)$ , para todo  $n \geq 1$ . Desta maneira, o NBND fornece uma representação alternativa do DFC. No caso especial em que  $\xi = 1$  (demodulação por decisão abrupta), a expressão (5.1) se reduz a

$$Y_k = X_k \oplus Z_k, \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

em que  $\oplus$  denota adição módulo-2, a qual é usada para modelar canais discretos binários (entrada binária, saída binária) com memória [21, 22, 67]. Na próxima seção será estudada a capacidade de um canal NBND.

## 5.2 Capacidade do Canal

Seja o canal NBND, definido em (5.1), no qual o processo de ruído  $\{Z_k\}$  é estacionário e ergódico. A capacidade desse canal é dada por [20, 68]

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C^{(n)} \quad (5.5)$$

onde  $C^{(n)}$  é definido como

$$C^{(n)} \triangleq \max_{p(x^n)} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n) \quad (5.6)$$

em que  $I(X^n; Y^n)$  é a informação mútua entre  $X^n$  e  $Y^n$ . Considerando-se que  $X^n$  e  $Z^n$  são

independentes, é possível deduzir que

$$\begin{aligned} I(X^n; Y^n) &= H(Y^n) - H(Y^n | X^n) \\ &= H(Y^n) - H(Z^n) \end{aligned} \quad (5.7)$$

em que  $H(Y^n)$  é a entropia de  $Y^n$  e  $H(Z^n)$  é a entropia de  $Z^n$ . Assim,  $C^{(n)}$  pode ser expresso como

$$\begin{aligned} C^{(n)} &= \frac{1}{n} \left( \max_{p(x^n)} \{H(Y^n)\} - H(Z^n) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \tilde{H}(Y^n) - H(Z^n) \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde  $\tilde{H}(Y^n)$  é a máxima entropia de  $Y^n$ . Para calcular  $C^{(n)}$  é preciso achar a distribuição de entrada que maximiza  $H(Y^n)$ . Em [66], foi mostrado que

$$\max_{p(x^n)} [H(Y^n)] = n + H(W^n) \quad (5.9)$$

onde  $W_k \in \mathcal{W} = \{0, 1, \dots, 2^{\xi-1} - 1\}$  e é definido da seguinte forma [66]:

$$W_k = \min\{Z_k, 2^{\xi} - 1 - Z_k\}. \quad (5.10)$$

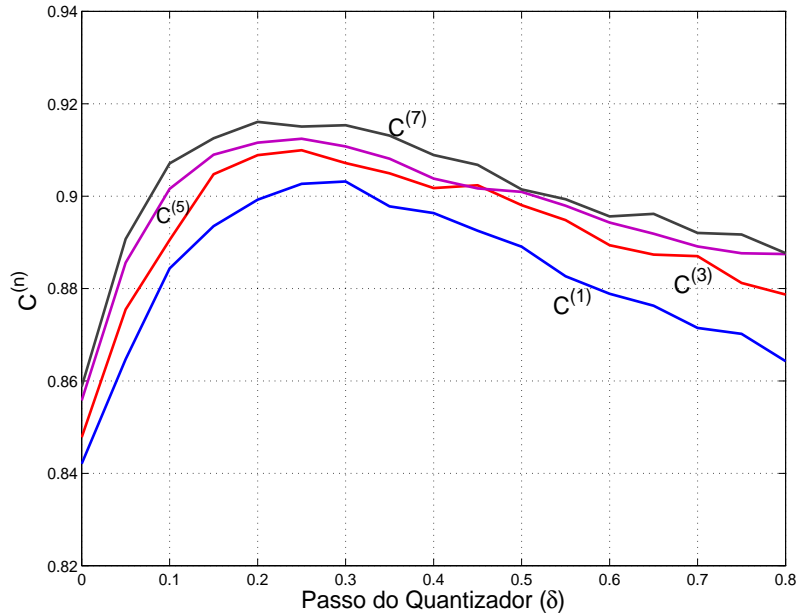
Assim, substituindo-se (5.9) em (5.8), resulta

$$C^{(n)} = 1 + \frac{1}{n} [H(W^n) - H(Z^n)]. \quad (5.11)$$

A capacidade  $C$  em (5.5) é o limite de  $C^{(n)}$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Neste trabalho, o valor do parâmetro  $\delta$  do DFC é selecionado de modo a maximizar o valor de  $C^{(n)}$  para um valor suficientemente elevado de  $n$ . A Figura 5.1 mostra o gráfico de  $C^{(n)}$ , em bits/uso, versus  $\delta$  para  $E_s/N_0 = 10$  dB, com  $f_D T = 0,005$  e  $\xi = 2$ . É possível verificar que, para esse canal, o valor de  $\delta$  que maximiza a capacidade é aproximadamente  $\delta = 0,25$ . Ademais, percebe-se que a capacidade também aumenta com o aumento do valor de  $n$ , ou seja, o número de utilizações do canal, devido à memória desse. Esta análise será repetida para determinar  $\delta$  para cada valor de  $E_s/N_0$  e  $f_D T$ .

A seguir, será descrito um canal FSMC não binário que será empregado para modelar um

**Figura 5.1:**  $C^{(n)}$  versus o passo normalizado do quantizador  $\delta$  para diferentes valores de  $n$ ,  $n=1, 3, 5, 7$ .



DFC não binário.

### 5.3 FSMC Não-Binário

O canal FSMC consiste de uma cadeia de Markov  $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$  com  $J$  estados, homogênea, estacionária,  $S_k \in \{0, 1, \dots, J-1\}$ . A  $J \times J$  matriz de transição de probabilidade  $\mathbf{P}$  tem como elementos as probabilidades  $p_{i,j} = P(S_k = j | S_{k-1} = i)$ . O vetor de probabilidade estacionária é  $\boldsymbol{\pi} = [\pi_0, \dots, \pi_{J-1}]$ . A densidade de probabilidade conjunta de ordem  $n$  de uma sequência de estados da cadeia é fatorada da seguinte forma:

$$P(s^n) = P(s_1) \prod_{i=1}^{n-1} p(s_{i+1} | s_i).$$

O mecanismo de transição de estados independe da sequência de entrada do canal. A cada estado da cadeia é associado um canal discreto sem memória (DMC, *discrete memoryless channel*) especificado pela probabilidade condicional  $P(y | x, s) = P(Y_k = y | X_k = x, S_k = s)$ ,  $y \in \mathcal{Y}$  e  $x \in \mathcal{X}$ . O canal é condicionalmente independente, dado uma sequência de estados, isto é:

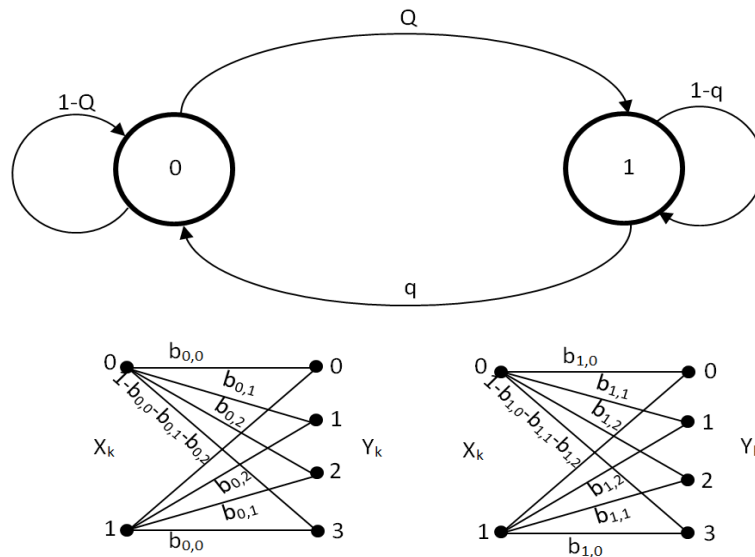
$$P_{\text{FSMC}}(y^n | x^n, s^n) = \prod_{i=1}^n P(y_i | x_i, s_i).$$

As probabilidades condicionais do DMC satisfazem a uma condição de simetria dada por:

$$P(y | 0, s) = P(2^\xi - 1 - y | 1, s) \quad (5.12)$$

de tal forma que pode-se estabelecer a probabilidade de um ruído ser gerado em cada estado da forma  $b_{s_k, z_k} = P(Z_k = z_k | S_k = s_k)$ , em que  $z_k \in \mathcal{Y}$  e é relacionado com a saída e entrada do canal via (5.3). Propõe-se, neste trabalho, um modelo FSMC não binário, que possui dois estados cujas probabilidades de transição de estados da cadeia de Markov,  $p_{0,1}$  e  $p_{1,0}$ , são denotadas por  $Q$  e  $q$ , respectivamente. A cada estado está associado um DMC com entrada binária e saída  $2^\xi$ -ária, no qual a probabilidade condicional de transmitir-se um símbolo  $i$  e receber-se um símbolo  $j$ , em cada estado, satisfaz (5.12) e é expressa em termos de  $b_{s_k, z_k}$ . A Figura 5.2 ilustra o caso particular em que  $\xi = 2$ .

**Figura 5.2:** FSMC com 2 estados e  $\xi = 2$ .



## 5.4 Grafo de Fatores para um Código LDPC em canais NBND- FSMC

Esta seção desenvolve um grafo de fatores para estimação conjunta do estado do canal e da palavra-código. Admitindo-se a transmissão de palavras-código binárias codificadas por um código LDPC  $(N, K)$ , cada vetor de informação binário de comprimento  $K$  é codificado em uma palavra-código  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ , com  $X_i \in \mathcal{X}$ . Esta palavra-código é transmitida em um canal discreto não binário produzindo o vetor  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ , com  $Y_i \in \mathcal{Y}$ .

Assumindo que a transmissão é realizada em um canal FSMC, a sequência de estados visitados pelo canal durante cada símbolo transmitido é denotada por  $\mathbf{S} = (S_1, S_2, \dots, S_N)$ , com  $S_i \in \{0, \dots, J-1\}$ . O decodificador de máxima probabilidade *a posteriori* maximiza a probabilidade de um símbolo de informação  $x_i$  dado o vetor recebido  $\mathbf{y}$ , calculada pela regra MAP (*maximum a posteriori probability*):

$$\hat{x}_i^{\text{MAP}} = \operatorname{argmax}_{x_i \in \mathcal{X}} P(x_i | \mathbf{y}) = \operatorname{argmax}_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{\sim x_i} P(\mathbf{y} | \mathbf{x}) h(\mathbf{x}) \quad (5.13)$$

$$= \operatorname{argmax}_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{\sim x_i} \sum_{\mathbf{s}} P(\mathbf{y}, \mathbf{s} | \mathbf{x}) h(\mathbf{x}) \quad (5.14)$$

$$= \operatorname{argmax}_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{\sim x_i} \sum_{\mathbf{s}} P(\mathbf{s}) P(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{s}) h(\mathbf{x}) \quad (5.15)$$

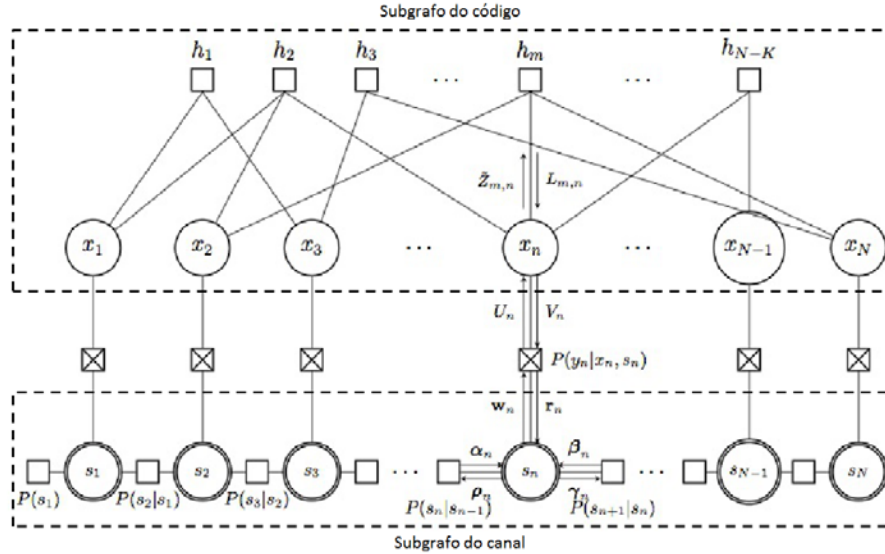
$$= \operatorname{argmax}_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{\sim x_i} \sum_{\mathbf{s}} P(s_1) \prod_{i=2}^N P(s_i | s_{i-1}) P(y_i | x_i, s_i) h(\mathbf{x}) \quad (5.16)$$

em que  $h(\mathbf{x})$  é a função característica de um código corretor de erro [51].

A partir de (5.16) é possível obter o grafo de fatores da Figura 5.3 e então aplicar o ASP neste grafo para estimar cada símbolo de entrada  $x_i$ . Este grafo representa a estrutura do código bem como a do canal e pode ser decomposto em dois subgrafos, um dos quais envolve variáveis e funções relativas ao código, denominado *subgrafo do código*, e outro que envolve variáveis e funções relacionadas à dinâmica do canal, o *subgrafo do canal*. Ambos os grafos são grafos biparticionados, em que as variáveis  $x_1$  a  $x_N$ , representam os  $N$  bits transmitidos, e  $h_1$  a  $h_{N-K}$  representam as  $(N - K)$  equações de paridade do código. Este algoritmo usa uma estratégia de estimação-decodificação no grafo de fatores em que as mensagens de saída do grafo do código  $V_n$  são combinadas de maneira a estimar a distribuição de probabilidade dos estados do canal para cada instante  $n$  (esta distribuição é representada nesta figura pelo vetor  $\mathbf{w}_n$ ). Esta distribuição é usada para calcular as mensagens de razão de verossimilhança (LLR)  $U_n$ 's que são a entrada do subgrafo de código e são usadas na decodificação da palavra código na próxima iteração. Durante o processo iterativo, estas mensagens são trocadas entre os subgrafos para refinar o processo de estimação-decodificação com o intuito de convergir para a decodificação da palavra-código correta.

A seguinte notação é utilizada para as mensagens passadas no grafo de fatores utilizado na decodificação em um canal FSMC:

**Figura 5.3:** Grafo de fatores para decodificar um código LDPC para transmissão em um canal NBND-FCMC.



$Z_{m,n}$	Mensagens em LLR do nó de bit $n$ ao nó de checagem $m$
$L_{m,n}$	Mensagens em LLR do nó de checagem $m$ ao nó de bit $n$
$V_n$	Mensagens em LLR do nó de bit $x_n$ ao subgrafo de canal associado
$U_n$	Mensagens em LLR do subgrafo de canal aos nós $x_n$
$\mathbf{r}_n = [r_n(k)]$	Vetores probabilísticos do subgrafo de código ao nó de estado do canal no tempo $n$
$\mathbf{w}_n = [w_n(k)]$	Vetores probabilísticos do estado do canal no tempo $n$ ao subgrafo do código
$\boldsymbol{\alpha}_n = [\alpha_n(k)]$	Vetores probabilísticos do nó de função $P(s_n s_{n-1})$ ao estado $s_n$
$\boldsymbol{\rho}_n = [\rho_n(k)]$	Vetores probabilísticos do estado $s_n$ ao nó de função $P(s_n s_{n-1})$
$\boldsymbol{\beta}_n = [\beta_n(k)]$	Vetores probabilísticos do nó de função $P(s_{n+1} s_n)$ ao estado $s_n$
$\boldsymbol{\gamma}_n = [\gamma_n(k)]$	Vetores probabilísticos do estado $s_n$ ao nó de função $P(s_{n+1} s_n)$ .

As mensagens passadas no subgrafo do canal ( $\mathbf{w}_n, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\rho}_n, \boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{\gamma}_n$ ) são vetores de dimensão  $J$  (número de estados da cadeia de Markov).

#### 5.4.1 Escalonamento de passagem de mensagens

Há diversas maneiras de organizar o escalonamento (*scheduling*) de passagem de mensagens na execução do ASP. No decodificador utilizado nesta seção, escolhe-se executar uma iteração no subgrafo de código e, em seguida, uma iteração no subgrafo de canal. No subgrafo de canal, primeiramente todos os vetores  $\boldsymbol{\alpha}_n$  são passados no sentido de  $n$  crescente e todas as mensagens são armazenadas nos seus respectivos nós de estado. Quando o  $n$ -ésimo estado é

atingido, todos os vetores  $\beta_n$  são calculados no sentido de  $n$  decrescente, fornecendo também as mensagens  $\mathbf{w}_n$  e  $U_n$ .

## 5.5 Decodificação pelo ASP aplicada ao modelo FSMC

Nesta seção, são apresentadas as mensagens do ASP que são trocadas pelos nós do grafo de fatores na Figura 5.3 quando o canal usado na decodificação é o FSMC. Se o canal que corrompe cada palavra-código é um DFC, então assume-se que este é modelado por um FSMC que é usado na decodificação.

Dado um vetor recebido  $\mathbf{y}$ , as mensagens trocadas no ASP são descritas a seguir.

▷ **Inicialização:** Para  $n = 1$  a  $N$ , cada elemento dos vetores  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  são :

$$\alpha_n(k) = \beta_n(k) = \pi_k, \quad k = 0, 1, \dots, J-1. \quad (5.17)$$

Computa-se  $\bar{y}_n = 2^\xi - 1 - y_n$ , para  $n = 1$  até  $N$ . As LLRs  $U_n$ 's são mensagens do subgrafo de canal para os nós de bits associados a estes. Então

$$\begin{aligned} U_n &= \ln \left( \frac{\sum_{k=0}^{J-1} P_{FSMC}(y_n | x_n = 0, s_n = k) \pi_k}{\sum_{k=0}^{J-1} P_{FSMC}(y_n | x_n = 1, s_n = k) \pi_k} \right) \\ &= \ln \left( \frac{\sum_{k=0}^{J-1} b_{k,y_n} \pi_k}{\sum_{k=0}^{J-1} b_{k,\bar{y}_n} \pi_k} \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Faça  $\tilde{Z}_{m,n} = U_n$ , para  $m \in \mathcal{N}(n)$ .

▷ **Processamento Iterativo**

- *Processamento no subgrafo do código*

1. Para  $m = 1$  até  $N - K$  e  $n \in \mathcal{N}(m)$ , as mensagens  $\{L_{m,n}\}$  passadas do nó de restrição  $m$  para o nó de bit  $n$  são calculadas de acordo com a regra “tanh”

$$L_{m,n} = 2 \arctan \left( \prod_{n' \in \mathcal{N}(m) \setminus n} \tanh \left( \frac{1}{2} \tilde{Z}_{m,n'} \right) \right).$$



2. Para  $n = 1$  até  $N$ , as mensagens passadas do subgrafo do código para o subgrafo do canal são  $V_n = \sum_{m \in \mathcal{M}(n)} L_{m,n}$ . A representação probabilística de  $V_n$  é:

$$v_n(0) = e^{V_n} / (1 + e^{V_n}), \quad v_n(1) = 1 / (1 + e^{V_n}).$$

- *Processamento no subgrafo do canal*

As mensagens passadas neste subgrafo são vetores de dimensão  $J$ . Os elementos destes vetores são descritos a seguir.

a) Para  $n = 1$  a  $N$ , as mensagens  $r_n(k)$  são

$$\begin{aligned} r_n(k) &= \sum_{x_n=0}^1 P_{FSMC}(y_n|x_n, s_n = k) v_n(x_n) \\ &= P_{FSMC}(z_n = y_n | s_n = k) v_n(0) + P_{FSMC}(z_n = \bar{y}_n | s_n = k) v_n(1) \\ &= b_{k,y_n} v_n(0) + b_{k,\bar{y}_n} v_n(1). \end{aligned}$$

b) As mensagens enviadas pelo nó de estado são:

$$\begin{cases} \gamma_n(k) = \alpha_n(k) r_n(k), & \text{para } n = 1 \text{ até } N - 1 \\ \rho_n(k) = \beta_n(k) r_n(k), & \text{para } n = 2 \text{ até } N. \end{cases}$$

c) As mensagens  $\alpha_n(k)$ , para  $n = 2$  até  $N$ , e  $\beta_n(k)$ , para  $n = 1$  a  $N - 1$ , são dadas por:

$$\alpha_n(k) = \sum_{j=0}^{J-1} p_{j,k} \gamma_{n-1}(j)$$

e

$$\beta_n(k) = \sum_{j=0}^{J-1} p_{k,j} \rho_{n+1}(j).$$

d) Para  $n = 1$  até  $N - 1$ :  $w_n(k) = \alpha_n(k) \beta_n(k)$ .

3. Para  $n = 1$  até  $N$ , as mensagens  $U_n$  são dadas por

$$U_n = \ln \left( \frac{\sum_{k=0}^{J-1} b_{k,y_n} w_k}{\sum_{k=0}^{J-1} b_{k,\bar{y}_n} w_k} \right).$$

▷ **Atualização dos nós de bit e decisão abrupta**

1. Para  $n = 1$  a  $N$  e para  $m \in \mathcal{M}(n)$ :

$$Z_{m,n} = U_n + \sum_{m' \in \mathcal{M}(n) \setminus m} L_{m',n}.$$

2. (Decisão Abrupta) Para  $n = 1$  até  $N$ :

$$\begin{cases} \hat{x}_n = 0, & \text{if } U_n + \sum_{m \in \mathcal{M}(n)} L_{m,n} > 0 \\ \hat{x}_n = 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.19)$$

Se  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$  satisfaz todas as restrições de paridade, ou o número total de iterações é igual ao número máximo de iterações pré-determinado, então a decodificação é interrompida. Caso contrário, executa-se uma nova iteração.

## 5.6 Resultados

### 5.6.1 Algoritmo Baum-Welch

O algoritmo BW é usado para estimar os parâmetros do FSMC que aproxima um DFC com parâmetros fixos (SNR,  $f_D T$ ,  $\xi$ ,  $\delta$ ). Este algoritmo estima a matriz de transição de probabilidade  $\mathbf{P}$  e a matriz  $\mathbf{B}$  (de dimensão  $J \times 2^\xi$ ), em que  $(i, j)$ -ésimo elemento desta matriz é  $b_{i,j} = P(Z_k = j \mid S_k = i)$ . As Tabelas 5.1 e 5.2 mostram os parâmetros de modelos FSMC de dois estados com decisão suave para  $\xi = 2, 3$ , que aproximam um DFC com  $f_D T = 0,001$  e  $0,005$ , respectivamente, e vários valores de SNR.

**Tabela 5.1:** Modelos FSMC que modelam um DFC com  $f_{DT} = 10^{-3}$  e decisão suave.

SNR	$\xi$	$\delta$	$p_{0,1}$	$p_{1,0}$	$i$	$b_{i,0}$	$b_{i,1}$	$b_{i,2}$	$b_{i,3}$	$b_{i,4}$	$b_{i,5}$	$b_{i,6}$	$b_{i,7}$
2,5dB	2	0,45	0,0034	0,0042	0	0,9008	0,0808	0,0167	0,0018	-	-	-	-
	3	0,25	0,0038	0,0040	1	0,5123	0,2889	0,1494	0,0495	-	-	-	-
3dB	2	0,45	0,0033	0,0044	0	0,7992	0,0991	0,0584	0,0280	0,0108	0,0034	0,0008	0,0002
	3	0,20	0,0036	0,0042	1	0,3268	0,1744	0,1729	0,1411	0,0946	0,0528	0,0243	0,0132
3,5dB	2	0,45	0,0033	0,0045	0	0,9077	0,0773	0,0138	0,0012	-	-	-	-
	3	0,20	0,0036	0,0042	1	0,5085	0,3022	0,1473	0,0420	-	-	-	-
4dB	2	0,45	0,0033	0,0045	0	0,8630	0,0650	0,0387	0,0199	0,0087	0,0033	0,0010	0,0003
	3	0,20	0,0036	0,0043	1	0,4095	0,1513	0,1422	0,1156	0,0819	0,0508	0,0276	0,0211
4dB	2	0,40	0,0032	0,0047	0	0,915	0,0731	0,0111	0,0007	-	-	-	-
	3	0,20	0,0036	0,0045	1	0,5054	0,3155	0,1441	0,0350	-	-	-	-
4dB	2	0,40	0,0032	0,0047	0	0,8700	0,0649	0,0369	0,0177	0,0072	0,0024	0,0007	0,0002
	3	0,20	0,0036	0,0045	1	0,4012	0,1594	0,1491	0,1190	0,0817	0,0483	0,0246	0,0166
4dB	2	0,40	0,0032	0,0047	0	0,9320	0,0579	0,0093	0,0007	-	-	-	-
	3	0,20	0,0036	0,0045	1	0,5354	0,2907	0,1362	0,0377	-	-	-	-
4dB	2	0,40	0,0032	0,0047	0	0,8765	0,0647	0,0351	0,0157	0,0058	0,0018	0,0004	0,0001
	3	0,20	0,0036	0,0045	1	0,3923	0,1678	0,1563	0,1222	0,0811	0,0457	0,0217	0,0129

**Tabela 5.2:** Modelos FSMC que modelam um DFC com  $f_{DT} = 5 \times 10^{-3}$  e decisão suave.

SNR	$\xi$	$\delta$	$p_{0,1}$	$p_{1,0}$	$i$	$b_{i,0}$	$b_{i,1}$	$b_{i,2}$	$b_{i,3}$	$b_{i,4}$	$b_{i,5}$	$b_{i,6}$	$b_{i,7}$
1dB	2	0,45	0,0143	0,0157	0	0,8889	0,0836	0,0233	0,0042	-	-	-	-
	3	0,20	0,0145	0,0147	1	0,5081	0,2575	0,1565	0,0779	-	-	-	-
1,5dB	2	0,45	0,0140	0,0162	0	0,8446	0,0619	0,0417	0,0255	0,0141	0,007	0,0031	0,0021
	3	0,20	0,0143	0,0150	1	0,4249	0,1248	0,1191	0,1033	0,0818	0,0591	0,0393	0,0477
2dB	2	0,45	0,0138	0,0165	0	0,8963	0,0809	0,0198	0,003	-	-	-	-
	3	0,20	0,0140	0,0153	1	0,5043	0,2703	0,157	0,0684	-	-	-	-
2,5dB	2	0,45	0,0134	0,0168	0	0,8529	0,0619	0,0404	0,0235	0,0122	0,0056	0,0022	0,0013
	3	0,20	0,0140	0,0153	1	0,4183	0,1315	0,1252	0,1073	0,0829	0,0578	0,0369	0,0401
3dB	2	0,45	0,0132	0,0173	0	0,9036	0,0777	0,0166	0,0021	-	-	-	-
	3	0,20	0,0137	0,0156	1	0,5017	0,2835	0,1556	0,0592	-	-	-	-
4dB	2	0,45	0,0132	0,0173	0	0,8594	0,0623	0,0392	0,0216	0,0105	0,0044	0,0016	0,0010
	3	0,20	0,0137	0,0156	1	0,4092	0,1392	0,1319	0,0015	0,0842	0,0564	0,0341	0,0335
5dB	2	0,45	0,0134	0,0168	0	0,9104	0,0743	0,0139	0,0015	-	-	-	-
	3	0,20	0,0137	0,0156	1	0,4973	0,2975	0,1540	0,0512	-	-	-	-
6dB	2	0,45	0,0132	0,0173	0	0,6278	0,1085	0,0921	0,0701	0,0473	0,0283	0,0148	0,0113
	3	0,20	0,0137	0,0156	1	0,6418	0,1005	0,0838	0,0645	0,0457	0,0294	0,0174	0,0171
7dB	2	0,45	0,0132	0,0173	0	0,9172	0,0708	0,0112	0,0008	-	-	-	-
	3	0,20	0,0132	0,0173	1	0,4929	0,3115	0,1524	0,0432	-	-	-	-
8dB	2	0,45	0,0127	0,0182	0	0,3961	0,1547	0,1449	0,1185	0,0841	0,0521	0,0280	0,0216
	3	0,20	0,0127	0,0182	1	0,8743	0,0618	0,0357	0,0174	0,0072	0,0024	0,0006	0,0006
9dB	2	0,45	0,0127	0,0182	0	0,9289	0,0637	0,0070	0,0004	-	-	-	-
	3	0,20	0,0127	0,0182	1	0,4823	0,3415	0,1460	0,0302	-	-	-	-
10dB	2	0,45	0,0127	0,0182	0	0,3781	0,1715	0,1599	0,1255	0,0832	0,0465	0,0219	0,0134
	3	0,20	0,0127	0,0182	1	0,8870	0,0613	0,0319	0,0134	0,0046	0,0012	0,0004	0,0002

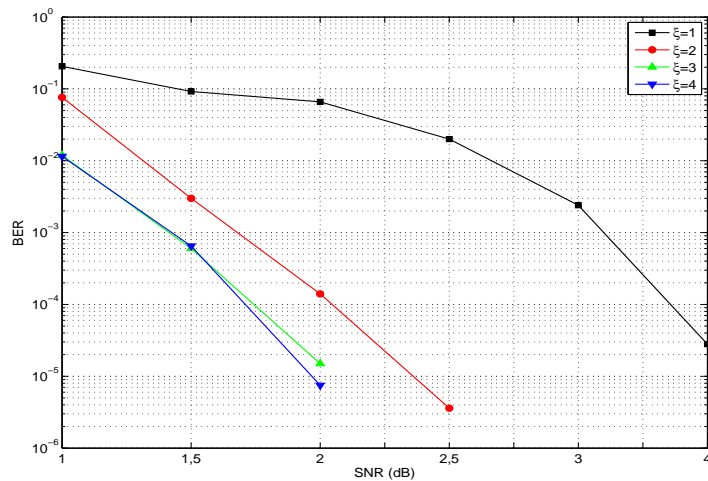
### 5.6.2 Análise de Desempenho

Para avaliar o desempenho de um código LDPC em um decodificador projetado para o canal FSMC, com entrada binária e saída  $2^\xi$ -ária, foi implementado o decodificador iterativo apresentado na Seção 5.5 com 200 iterações. Empregou-se um código LDPC binário, regular, com parâmetros ( $N = 15000$ ,  $K = 7500$ ) com grau de coluna constante igual a  $d_v = 3$ . A matriz de verificação de paridade  $\mathbf{H}$  é gerada usando o algoritmo PEG (*progressive edge growth*) [69]. O canal que corrompe cada palavra-código é um DFC quantizado com  $2^\xi$  níveis. Portanto, gera-se uma sequência ruidosa  $\{Z_k\}$  de acordo com o modelo DFC quantizado e usa-se (5.3) para gerar a sequência recebida a partir da sequência ruidosa e da palavra-código transmitida. Este modelo de canal é denominado DFC. Neste trabalho assume-se que a palavra-código constituída de todos os símbolos iguais a zero é transmitida. Assume-se, ainda, que o receptor conhece os parâmetros do DFC e escolhe um modelo FSMC adequado que aproxime este canal (os parâmetros dos modelos FSMC considerados neste trabalho estão listados nas Tabelas 5.1 e 5.2) e emprega este modelo na decodificação conjunta usando o algoritmo proposto na Seção 5.5 (isto é, emprega-se um decodificador projetado para canal NBND-FC para decodificar uma palavra-código transmitida em um canal NBND-FC). Então, existe um descasamento entre o canal que corrompe a palavra-código e o canal usado na decodificação, diferentemente do que foi proposto em [37], em que o processo de ruído que corrompe uma palavra-código é gerado pelo mesmo FSMC usado no ASP do decodificador. Assim, o modelo aqui proposto é mais realista, já que o processo de ruído é gerado por um DFC que é aproximado por um FSMC usado na decodificação (assume-se que o receptor não conhece perfeitamente o modelo de canal, mas apenas uma aproximação FSMC deste). Este procedimento pode ser adotado para outros modelos de canais.

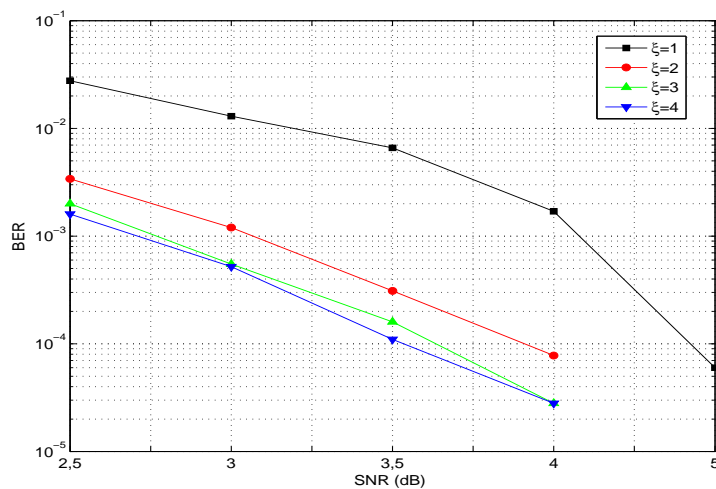
A Figura 5.4 mostra a BER versus SNR para um canal NBND-FC decodificado por um modelo FSMC que aproxima um DFC com parâmetros  $f_D T = 0,005$ ,  $\xi = 1, 2, 3, 4$ . Observa-se um ganho de aproximadamente 1,7 dB (para BER= $10^{-4}$ ) quando comparam-se as curvas para  $\xi = 1$  (decisão abrupta) e  $\xi = 2$  (decisão suave). Ademais, aumentar o valor de  $\xi$  de 2 para 3 propicia um ganho de 0,3 dB e um ganho desprezível é observado se compararmos  $\xi = 3$  com  $\xi = 4$ . Percebe-se um comportamento similar quando o valor de  $f_D T$  é diminuído para 0,001, como pode ser visto na Figura 5.5, na qual observa-se um ganho de aproximadamente 1 dB (para BER= $10^{-4}$ ) quando comparam-se as curvas para  $\xi = 1$  e  $\xi = 2$ . Portanto, para o sistema de comunicações considerado, um ganho de codificação importante é obtido com o

emprego de decisão suave e este satura para  $\xi \geq 3$ .

**Figura 5.4:**  $BER \times SNR$  com  $f_D T = 5 \times 10^{-3}$  e decisão suave, código LDPC(15000, 7500).



**Figura 5.5:**  $BER \times SNR$  com  $f_D T = 10^{-3}$  e decisão suave, código LDPC(15000, 7500).



# 6

## CONCLUSÕES

NESTA tese, foram comparados três métodos para estimação dos parâmetros de um modelo de canal de estados finitos Markovianos: o método proposto por Wilhelmsson e Milstein e o algoritmo de Baum-Welch, já utilizados para essa finalidade na literatura, e o método de minimização da divergência de Kullback-Leibler, cuja utilização para essa finalidade é uma proposição desta tese. Foi mostrado que, de acordo com as estatísticas analisadas, o método de minimização da divergência de Kullback-Leibler mostrou-se aderente, resultando na obtenção de valores de parâmetros cujos modelos reproduzem de forma coerente os sistemas de comunicações estudados.

Em seguida, foram desenvolvidas expressões de recorrência inéditas. Por meio do uso de técnicas da teoria de enumeração de sequências discretas, foram obtidas expressões para o cálculo da probabilidade da decodificação sem sucesso, ou seja, a probabilidade do canal markoviano gerar  $m$  erros em uma sequência de comprimento  $n$ , para modelos Nascimento e Morte de ordens 3 e 4. Assim, foi possível avaliar-se, também, a mencionada estatística com o objetivo de averiguar os valores de  $J$  ideais para os modelos  $J$ -NM que reproduzem o sistema de comunicações discreto.

Foi avaliada a pertinência de utilizarem-se modelos de canal de estados finitos Markovianos, mais especificamente Nascimento e Morte de ordens, 2 (GEC), 3 e 4, com o objetivo de reproduzir o comportamento estatístico de um sistema de comunicações discreto, baseado no padrão IEEE 802.11 (Wi-Fi). Os objetivos da utilização do citado padrão foram a sua grande penetração na sociedade, bem como o seu elevado grau de complexidade, uma vez que

utiliza codificação convolucional, entrelaçamento em dois estágios e modulação OFDM com desvanecimento seletivo em frequência.

Foi mostrado que, de acordo com as estatísticas analisadas, o GEC representou de forma satisfatória as seis variantes do sistema de comunicações modelado. Essas seis variantes estudadas foram agrupadas em dois ambientes de propagação, suburbano e *indoor*. Também verificou-se que há um ganho de fidedignidade quando da utilização de modelos de ordem superior para a reprodução do comportamento estatístico do mesmo sistema de comunicações. Outro aspecto abordado constituiu-se na avaliação da inserção de um entrelaçador finito no sistema, em que mostrou-se uma metodologia de definição de um valor ótimo do nível de entrelaçamento finito, com vistas à melhoria do desempenho do sistema de comunicações. Essa melhoria estudada constituiu-se na mitigação da memória do canal, por meio do uso da técnica de entrelaçamento, sem, no entanto, introduzir no sistema de comunicações um maior requerimento por processamento e um conseqüente e indesejável atraso.

Foi apresentado o canal discreto de ruído não-binário, cujos alfabetos de entrada e saída foram dados, respectivamente, por  $\mathcal{X} = \{0, 1\}$  e  $\mathcal{Y} = \{0, 1, \dots, 2^\xi - 1\}$ , em que  $\xi$  é um inteiro positivo. Mostrou-se que a definição do valor do passo do quantizador, que estabelece os limiares entre as regiões de decisão, foi escolhido de forma a maximizar a capacidade do canal. Para modelar esse canal, foi proposto um modelo FSMC, não binário, para capturar tanto a informação de decisão suave como a correlação temporal de um canal DFC com  $2^\xi$  níveis de quantização.

Foi proposto um esquema de decodificação iterativa, que faz uso do algoritmo soma-produto, para a decodificação e estimação do estado do canal de forma conjunta, por meio do escalonamento de passagem de mensagens entre o subgrafo de código e subgrafo de canal. Ressalta-se que o canal Markoviano utilizado pelo decodificador do receptor é diverso do que foi utilizado para gerar uma sequência de ruído que corrompe as palavras-código transmitidas, diferentemente do que fora proposto em [37].

Assim, foi possível avaliar o desempenho de um código LDPC em um decodificador projetado para o canal FSMC, com entrada binária e saída  $2^\xi$ -ária. Observou-se que, para o sistema de comunicações considerado, um ganho de codificação importante é obtido com o emprego de decisão suave (aumento do valor de  $\xi$ ).



## 6.1 Sugestões para futuros estudos

Outros tópicos que podem ser abordados em pesquisas futuras:

- ▷ Avaliar modelos NM para canais DFC com modulação QAM, para outros modelos para a função densidade de probabilidade da amplitude do desvanecimento, tais como, Rice, Nakagami, bem como para outros modelos da função autocorrelação [70];
- ▷ Averiguar a precisão do modelo GEC para modelar o sistema 802.11 a partir de dados coletados experimentalmente. Comparar com os resultados do Capítulo 4;
- ▷ Realizar o modelamento FSMC para sistemas de comunicações móveis de quarta e quinta gerações;
- ▷ Projetar códigos LDPC para o canal NBND-FCFSMC, estendendo o método proposto em [71].

## REFERÊNCIAS

- [1] K. Pahlavan and P. Krishnamurthy, *Principles of Wireless Networks*. Prentice-Hall, 2002.
- [2] C. Cox, *An Introduction to LTE: LTE, LTE-Advanced, SAE and 4G Mobile Communications*. Wiley, 2012.
- [3] “IMT vision - framework and overall objectives of the future development of imt (international mobile telecommunicationss) for 2020 and beyond,” Radiocommunication Sector of International Telecommunications Union, REcommendation ITU-R M.2083-0 ITU-R M.2083-0, Sept. 2015.
- [4] [Online]. Available: <http://www.anatel.gov.br/dados/>
- [5] P. S. S. A. Kennedy, P. B. Rapajic, and R. Shams, “Finite-state Markov modeling of fading channels,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 5, pp. 57–80, Sept. 2008.
- [6] S. Lin. and D. J. C. Jr., *Error Control Coding*, 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2004.
- [7] T. Cover and J. Thomas, *Elements of Information Theory*, 2nd ed. New York: Wiley-Interscience, 2006.
- [8] C. Pimentel and I. F. Blake, “Non-interleaved Reed-Solomon coding performance on finite state channels,” *IEEE Int. Conf. Communication*, vol. 3, pp. 1493–1497, 1997.
- [9] H. P. Lin and M. J. Tseng, “Two layer multistate Markov model for modeling a 1.8 GHz narrow-band wireless propagation channel in urban taipei city,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 54, no. 2, pp. 435–446, Mar. 2005.
- [10] K. Vieira and J. F. Rezende, “Accurate hidden Markov modeling of packet losses in indoor 802.11 networks,” *IEEE Commun. Letters*, vol. 13, no. 6, pp. 417–419, June 2009.

- [11] S. Lin, L. Kong, L. He, K. Guan, B. Ai, Z. Zhong, and C. Briso-Rodriguez, "Finite-state Markov modeling for high-speed railway fading channels," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 14, pp. 954–957, Dec. 2015.
- [12] M. Y. Zhai and L. D. Su, "Research on the memory order of the power-line communication channel," *International Journal of Communication Systems*, vol. 28, no. 6, pp. 1068–1079, Apr. 2015.
- [13] Y. Sun, B. L. Mark, and Y. Ephraim, "Collaborative spectrum sensing via online estimation of hidden bivariate Markov models," *IEEE Trans. Wire. Commun.*, vol. 15, no. 8, pp. 5430–5439, Aug. 2016.
- [14] K. Fukawa, H. Suzuki, and Y. Tateishi, "Packet-error-rate analysis using Markov models of the signal-to-interference ratio for mobile packet systems." *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 61, no. 6, pp. 2517–2530, Jul. 2012.
- [15] J. M. Park and G. U. Hwang, "Mathematical modeling of Rayleigh fading channels based on finite-state Markov chains," *IEEE Commun. Letters*, vol. 13, no. 10, pp. 764–766, Oct. 2009.
- [16] Y. H. Salih, C. X. Wang, and D. Yuan, "Deterministic process-based generative models for characterizing packet-level burst error sequences," *Wirel. Commun. Mob. Comput.*, 2013.
- [17] H. Wang, F. R. Yu, L. Zhu, T. Tang, and B. Ning, "Finite-state Markov modeling for wireless channels in tunnel communication-based train control systems," *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.*, vol. 15, no. 3, pp. 1083–1090, Jun. 2014.
- [18] E. N. Gilbert, "Capacity of a burst-noise channel," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 39, pp. 1253–1266, Sep. 1960.
- [19] E. O. Elliott, "Estimates of error rates for codes on burst-noise channels," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 42, pp. 1977–1997, Sep. 1963.
- [20] R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communications*. New York: Wiley, 1968.
- [21] F. Babich, O. Kelly, and G. Lombardi, "Generalized Markov modeling for flat fading," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, no. 4, pp. 547–551, Apr. 2000.

- [22] L. Zhong, F. I. Alajaji, and G. Takahara, "A binary communication channel with memory based on a finite queue," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 53, no. 8, pp. 2815–2840, Aug. 2007.
- [23] C. Pimentel and F. Alajaji, "Packet-based modeling of Reed-Solomon block-coded correlated fading channels via a Markov finite queue model," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 58, no. 7, pp. 3124–3136, Sept. 2009.
- [24] J. Singh, O. Dabeer, and U. Madhow, "On the limit of communication with low-precision analog-to-digital conversion at the receiver," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 57, no. 12, pp. 3629–3639, Dez. 2009.
- [25] I. Moreira, C. Pimentel, F. P. Barros, and D. P. B. Chaves, "Modeling fading channels with binary erasure finite state Markov channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 66, no. 5, pp. 4429–4434, May 2017.
- [26] N. Phamdo and F. Alajaji, "Soft-decision demodulation design for COVQ over white, colored and ISI Gaussian channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, no. 9, pp. 1499–1506, Sept. 2000.
- [27] F. I. Alajaji and N. C. Phamdo, "Soft-decision COVQ for Rayleigh-fading channels," *IEEE Commun. Letters*, vol. 2, no. 6, pp. 162–164, June 1998.
- [28] L. Wilhelmsson and L. B. Milstein, "On the effect of imperfect interleaving for the Gilbert-Elliott channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, no. 5, pp. 681–688, May 1999.
- [29] L. E. Baum, T. Petrie, G. Soules, and N. Weiss, "A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains," *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 41, Feb. 1970.
- [30] C. Pimentel and I. F. Blake, "Enumeration of Markov chains and burst error statistics for finite state channel models," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 48, no. 2, pp. 415–428, Mar. 1999.
- [31] H. Al-Lawati and F. A. A. Pimentel, "On symbol versus bit interleaving for block coded binary Markov channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 59, no. 5, pp. 2582–2588, June 2010.

- [32] F. R. Kschischang, “Codes defined on graphs,” *IEEE Commun. Magazine*, pp. 118–125, Aug. 2003.
- [33] J. Garcia-Frias and J. D. Villasenor, “Turbo decoding of Gilbert-Elliott channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, no. 3, pp. 357–363, Mar. 2002.
- [34] J. Garcia-Frias, “Decoding of low-density parity-check codes over finite-state binary Markov channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, no. 11, pp. 1840–1843, Nov. 2004.
- [35] C. Nicola, F. Alajaji, and T. Linder, “Decoding LDPC codes over binary channels with additive Markov noise,” *Proc. 9th Can. Workshop Inf. Theory*, pp. 187–190, Jun. 2005.
- [36] A. W. Eckford, F. R. Kschischang, and S. Pasupathy, “Analysis of low-density parity check codes for the Gilbert-Elliott channels,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 11, pp. 3872–3889, Nov. 2005.
- [37] J. Chen and R. M. Tanner, “A hybrid coding scheme for the Gilbert-Elliott channel,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 54, no. 10, pp. 1787–1796, Oct. 2006.
- [38] M. K. L. Winsted, “Decoding LDPC convolutional codes on Markov channels,” *EURASIP J. Wireless Commun. Netw.*, no. 1, pp. 1–8, Mar. 2008.
- [39] X. Jin and A. W. A. W. E. E. Fuja, “LDPC codes for non-coherent block fading channels with correlation: Analysis and design,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 56, no. 1, pp. 77–80, Jan. 2008.
- [40] R. M. Gray, *Entropy and Information Theory*. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [41] T. K. Moon, *Error Correction Coding Mathematical Method and Algorithms*. John Wiley and sons, 2005.
- [42] S. B. Wicker, *Error Control Systems for Digital Communication and Storage*. Prentice-Hall, 1995.
- [43] C. Pimentel and V. C. da Rocha Jr., “On the power spectral density of constrained sequences,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 55, no. 3, pp. 409–416, Mar. 2007.
- [44] R. P. Ramos and C. Pimentel, “Análise de desempenho de códigos de bloco em canais de estados finitos entrelaçados,” *Proc. IX Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica, João Pessoa, PB*, pp. 405–499, Ago. 2000.

- [45] C. Pimentel and R. L. Siqueira, "Analysis of the Go-Back-N protocol on finite-state Markov Rician fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, no. 4, pp. 2627–2632, July 2008.
- [46] R. Bose and D. Ray-Chaudhuri, "On a class of error-correcting binary codes," *Inf. and Control*, vol. 3, pp. 68–79, 1960.
- [47] A. Hocquenghem, "Codes correcteurs d'erreurs," *Chiffres*, vol. 2, pp. 147–156, 1959.
- [48] S. Y. Chung, G. Forney, T. J. Richardson, and R. Urbanke, "On the design of low-density parity-check codes within 0.0045 dB of the Shannon limit," *IEEE Communications Letters*, vol. 5, no. 2, pp. 58–60, Feb. 2001.
- [49] R. M. Tanner, "A recursive approach to low complex codes," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-27, pp. 533–547, Sept. 1981.
- [50] R. G. Gallager, *Low-Density Parity-Check Codes*. M.I.T. Press, 1963.
- [51] F. R. Kschischang, B. J. Frey, and H.-A. Loeliger, "Factor graphs and the sum-product algorithm," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 498–518, Feb. 2001.
- [52] W. E. Ryan and S. Lin, *Channel Codes: Classical and Modern*. Cambridge University Press, 2009.
- [53] M. Papaleo, R. Ferrincieli, G. E. Corazza, and A. Vanelli-Coralli, "Packet coding performance with correlated fading and shadowing," *Proc. IEEE GLOBECOM*, pp. 1–8, 2009.
- [54] C.-M. Lee, Y. T. Su, and L.-D. Jeng, "Performance analysis of block codes in hidden Markov channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 56, no. 1, pp. 1–4, Jan. 2008.
- [55] C.-M. Lee and Y. T. Su, "Performance of block-coded land mobile satellite systems," *International Journal of Satellite Communications*, vol. 26, no. 3, pp. 251–267, May/Jun. 2008.
- [56] F. Hamidi-Sepehr, Y. Cai, H. D. Pfister, and J.-F. Chamberland, "Queueing behavior of the Gilbert-Elliott channel: BCH and Poisson arrivals," *IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings*, pp. 1806–1810, Jul.-Aug. 2011.
- [57] A. Seddiki, A. Djebbari, J. M. Rouvaen, and A. Taleb-Ahmed, "BCH coding performance evaluation on a land mobile channel based OFDM system," *Information Technology Journal* 5, vol. 5, no. 5, pp. 930–936, 2006.

- [58] R. H. Clarke, "A statistical theory of mobile-radio reception," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 47, pp. 957–1000, 1968.
- [59] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*. Wiley, 1974.
- [60] W. H. Tranter, K. S. Shanmugan, T. S. Rappaport, and K. L. Kosbar, *Principles of Communication Systems Simulation with Wireless Applications*. Prentice Hall, 2003.
- [61] N. M. de Paiva Junior, E. C. Marques, and E. L. Pinto, "Viterbi training for HMM modelling of burst errors," *Proc. of the International Workshop on Telecommunications*, May 2011.
- [62] *IEEE 802.11 - Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications*, IEEE Computer Society Std., 2007.
- [63] E. L. Pinto and C. P. de Albuquerque, "A técnica de transmissão OFDM," *Revista Científica Periódica*, vol. 5, no. 1, Junho 2002.
- [64] A. Goldsmith, *Wireless Communications*, A. D. Panagopoulos, Ed. Cambridge University Press, 2005.
- [65] R. Ramos and C. Pimentel, "Sobre o projeto do nível de entrelaçamento para transmissão de códigos de bloco em canais com memória," *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, vol. 18, no. 2, Dec. 2002.
- [66] P. Melo, C. Pimentel, and F. Alajaji, "LDPC decoding over nonbinary queue-based burst noise channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 65, no. 1, pp. 452–457, Jan. 2016.
- [67] C. Pimentel and I. F. Blake, "Modeling burst channels using partitioned Fritchman's Markov models," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 47, no. 3, pp. 885–899, Aug. 1998.
- [68] S. Verdú and T. S. Han, "A general formula for channel capacity," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 40, no. 4, pp. 1147–1157, Jul. 1994.
- [69] X. Y. Hu, E. Eleftheriou, and D. M. Arnold, "Regular and irregular progressive edge growth Tanner graphs," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 1, pp. 386–398, Jan. 2005.
- [70] K. Liang, J. Lo, and W. Weng, "Design and actualisation of the improved Jakes fading channel," *IET Communications*, vol. 11, no. 3, pp. 385–392, Feb. 2017.

- [71] A. W. Eckford, F. R. Kschischang, and S. Pasupathy, "On designing good LDPC codes for Markov channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 53, no. 1, pp. 5–21, Jan. 2007.



# APÊNDICE A

SEJA a matriz de transição de estados  $\mathbf{P}$ , de tamanho  $J \times J$ , e a matriz de probabilidade de geração de erros  $\mathbf{B}$ , de tamanho  $2^\xi \times J$ , em que  $J$  é o número de estados e  $2^\xi$  a quantidade de níveis de quantização. O algoritmo de Baum-Welch [29] é um procedimento iterativo para a estimação dos parâmetros  $\lambda = (\mathbf{P}, \mathbf{B})$  a partir de uma dada sequência de erros,  $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_t, \dots, z_T)$ . Esse algoritmo é projetado para, partindo do valor atual, re-estimar  $\lambda = (\mathbf{P}, \mathbf{B})$ , de modo a maximizar a função de verossimilhança  $P(\bar{Z} | \lambda)$ . A re-estimação das matrizes  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{B}$  ocorre da seguinte maneira:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\text{número esperado de transições de } i \text{ para } j}{\text{número esperado de transições de } i} \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{b}_i(e_k) = \frac{\text{número esperado de vezes que } k \text{ é emitido do estado } i}{\text{número esperado de vezes que o estado } i \text{ é visitado}}. \quad (\text{A.2})$$

Os demais cálculos necessários para a implementação do algoritmo de Baum-Welch são explicitados a seguir.

**Passo 0:** O algoritmo deve ser inicializado com valores iniciais para  $\lambda = (\mathbf{P}, \mathbf{P}(1))$ .

**Passo 1:** Calcular as variáveis para a frente e as variáveis para trás dadas por (A.3) e (A.4), respectivamente, para  $t = 1, 2, \dots, K$ .

$$\alpha_t(i) = P(z_1, z_2, \dots, z_t, s_t = i | \lambda) \quad (\text{A.3})$$

$$\beta_t(i) = P(z_{t+1}, z_{t+2}, \dots, z_T \mid s_t = i \mid \lambda). \quad (\text{A.4})$$

▷ Cálculo das variáveis para a frente.

– Inicialização:

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(z_1), i = 1, 2, \dots, J. \quad (\text{A.5})$$

– Indução:

$$\alpha_{t+1}(j) = \left( \sum_{i=1}^J \alpha_t(i) \alpha_{ij} \right) b_j(z_{t+1}), \quad (\text{A.6})$$

$$1 \leq t \leq T - 1, 1 \leq j \leq K.$$

– Terminação:

$$P(\bar{z} \mid \lambda) = \sum_{i=1}^J \alpha_T(i) \beta_T(i). \quad (\text{A.7})$$

Deve-se atentar que:

$$\sum_{i=1}^J \alpha_T(i) = \sum_{i=1}^J P(z_1, \dots, z_T, s_T = i \mid \lambda) = P(\bar{z} \mid \lambda). \quad (\text{A.8})$$

▷ Cálculo das variáveis para trás.

– Inicialização:

$$\beta_T(i) = 1, i = 1, 2, \dots, J. \quad (\text{A.9})$$

– Indução:

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^J \beta_{t+1}(j) b_j(z_{t+1}) a_{ij}, \quad (\text{A.10})$$

$$1 \leq t \leq T - 1, 1 \leq j \leq J.$$

**Passo 2:** Computar  $\gamma_t(i)$  como segue:

$$\gamma_t(i) = P(s_t = i \mid \bar{z}, \lambda) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(\bar{z} \mid \lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, J. \quad (\text{A.11})$$

A quantidade  $\zeta_t(i, j)$  é definida como:

$$\zeta_t(i, j) = P(s_t = i, s_{t+1} = j \mid \bar{z}, \lambda) = \frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(z_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{P(\bar{z} \mid \lambda)}. \quad (\text{A.12})$$

Assim, (A.1) e (A.2) podem ser calculados por (A.13) e (A.14), respectivamente.

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \zeta_t(i, j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}, \quad (\text{A.13})$$

$$\hat{b}_j(e_k) = \frac{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j)}. \quad (\text{A.14})$$

O número esperado de vezes do estado  $S_i$  no instante  $t = 1$  é dado por:

$$\hat{\pi}_i = \alpha_1(i)\beta_1(i). \quad (\text{A.15})$$

**Passo 3:** Voltar ao Passo 1 com a nova estimativa de  $\lambda$  e repetir o procedimento até que a condição de parada seja atingida.

Vários critérios de parada podem ser utilizados como, por exemplo, estabilização dos elementos de  $\lambda$ , número máximo de iterações e convergência de  $P(\bar{z} \mid \lambda)$ .

# APÊNDICE B

O desenvolvimento das expressões de recorrência para o 3-NM e o 4-NM é detalhado a seguir. O desenvolvimento da recorrência para o 3-NM parte da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} H(s, z) &= \frac{c_{0_p} + c_{1_p}z + c_{2_p}sz + c_{3_p}z^2 + c_{4_p}sz^2 + c_{5_p}s^2z^2}{1 + c_1z + c_2sz + c_3z^2 + c_4sz^2 + c_5s^2z^2 + c_6z^3 + c_7sz^3 + c_8s^2z^3 + c_9s^3z^3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P(m, n) s^m z^n. \end{aligned}$$

Multiplicando-se o denominador da fração pelo somatório duplo, chega-se à

$$\begin{aligned} c_{0_p} + c_{1_p}z + c_{2_p}sz + c_{3_p}z^2 + c_{4_p}sz^2 + c_{5_p}s^2z^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P(m, n) s^m z^n \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_1 P(m, n) s^m z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_2 P(m, n) s^{m+1} z^{n+1} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_3 P(m, n) s^m z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_4 P(m, n) s^{m+1} z^{n+2} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_5 P(m, n) s^{m+2} z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_6 P(m, n) s^m z^{n+3} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_7 P(m, n) s^{m+1} z^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_8 P(m, n) s^{m+2} z^{n+3} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_9 P(m, n) s^{m+3} z^{n+3}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Fazendo-se uma mudança de índices em cada somatório duplo, obtém-se termos apenas com potências  $s^m z^n$ , como mostrado a seguir

$$\begin{aligned}
c_{0_p} + c_{1_p}z + c_{2_p}sz + c_{3_p}z^2 + c_{4_p}sz^2 + c_{5_p}s^2z^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P(m, n) s^m z^n \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} c_1 P(m, n-1) s^m z^n &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n c_2 P(m-1, n-1) s^m z^n \\
+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-2} c_3 P(m, n-2) s^m z^n &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} c_4 P(m-1, n-2) s^m z^n \\
+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n c_5 P(m-2, n-2) s^m z^n &+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-3} c_6 P(m, n-3) s^m z^n \\
+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-2} c_7 P(m-1, n-3) s^m z^n &+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-1} c_8 P(m-2, n-3) s^m z^n \\
+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=3}^n c_9 P(m-3, n-3) s^m z^n. &
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Como os quatro últimos somatórios duplos de (B.2) só têm efeito a partir de  $n = 3$ , é possível separar os seis primeiros somatórios duplos em dois casos:  $n \leq 2$  e  $n \geq 3$ . Então

$$\begin{aligned}
c_{0_p} + c_{1_p}z + c_{2_p}sz + c_{3_p}z^2 + c_{4_p}sz^2 + c_{5_p}s^2z^2 &= P(0, 0) + P(0, 1)z + P(1, 1)sz \\
+ P(0, 2)z^2 + P(1, 2)sz^2 + P(2, 2)s^2z^2 &+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^n P(m, n) s^m z^n + c_1 P(0, 0)z \\
+ c_1 P(0, 1)z^2 + c_1 P(1, 1)sz^2 &+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} c_1 P(m, n-1) s^m z^n + c_2 P(0, 0)sz \\
+ c_2 P(0, 1)sz^2 + c_2 P(1, 1)s^2z^2 &+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=1}^n c_2 P(m-1, n-1) s^m z^n \\
+ c_3 P(0, 0)z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-2} c_3 P(m, n-2) s^m z^n &+ c_4 P(0, 0)sz^2 \\
+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} c_4 P(m-1, n-2) s^m z^n &+ c_5 P(0, 0)s^2z^2 \\
+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=2}^n c_5 P(m-2, n-2) s^m z^n &+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-3} c_6 P(m, n-3) s^m z^n \\
+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-2} c_7 P(m-1, n-3) s^m z^n &+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-1} c_8 P(m-2, n-3) s^m z^n \\
+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=3}^n c_9 P(m-3, n-3) s^m z^n. &
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Como  $P(m, n) = 0$  para  $m, n < 0$  e  $m > n$ , é possível escrever um único índice para os somatórios em  $m$ , de forma que, reagrupando os termos do lado direito de (B.3), obtém-se

$$\begin{aligned}
c_{0_p} + c_{1_p}z + c_{2_p}sz + c_{3_p}z^2 + c_{4_p}sz^2 + c_{5_p}s^2z^2 &= P(0, 0) + \{P(0, 1) + c_1P(0, 0)\}z \\
+ \{P(1, 1) + c_2P(0, 0)\}sz + \{P(0, 2) + c_1P(0, 1) + c_3P(0, 0)\}z^2 &+ \{P(1, 2) + c_1P(1, 1) \\
+ c_2P(0, 1) + c_4P(0, 0)\}sz^2 + \{P(2, 2) + c_2P(1, 1) + c_5P(0, 0)\}s^2z^2 &+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^n \{P(m, n) \\
+ c_1P(m, n-1) + c_2P(m-1, n-1) + c_3P(m, n-2) + c_4P(m-1, n-2) & \\
+ c_5P(m-2, n-2) + c_6P(m, n-3) + c_7P(m-1, n-3) + c_8P(m-2, n-3) & \\
+ c_9P(m-3, n-3)\}s^m z^n. & \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Assim, igualando-se os coeficientes de mesma potência em ambos os lados de (B.4), encontra-se

$$\begin{aligned}
P(0, 0) &= c_{0_p} = 1 \\
P(0, 1) + c_1P(0, 0) &= c_{1_p} \\
P(0, 1) &= c_{1_p} - c_1 \\
P(1, 1) + c_2P(0, 0) &= c_{2_p} \\
P(1, 1) &= c_{2_p} - c_2 \\
P(0, 2) + c_1P(0, 1) + c_3P(0, 0) &= c_{3_p} \\
P(0, 2) &= c_{3_p} - c_3 - c_1P(0, 1) \\
P(1, 2) + c_1P(1, 1) + c_2P(0, 1) + c_4P(0, 0) &= c_{4_p} \\
P(2, 2) + c_2P(1, 1) + c_5P(0, 0) &= c_{5_p}
\end{aligned}$$

para  $n \geq 3$  e  $0 \leq m \leq n$ , bem como

$$\begin{aligned}
&P(m, n) + c_1P(m, n-1) + c_2P(m-1, n-1) + c_3P(m, n-2) + c_4P(m-1, n-2) \\
&+ c_5P(m-2, n-2) + c_6P(m, n-3) + c_7P(m-1, n-3) + c_8P(m-2, n-3) \\
&+ c_9P(m-3, n-3) = 0.
\end{aligned}$$

O desenvolvimento da recorrência para o 4-NM segue a mesma sequência do desenvolvimento da expressão de recorrência do 3-NM, chegando-se ao seguinte determinante

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) = & 1 + c_1 z + c_2 s z + c_3 z^2 + c_4 s z^2 + c_5 s^2 z^2 + c_6 z^3 + c_7 s z^3 + c_8 s^2 z^3 + c_9 s^3 z^3 \\ & + c_{10} z^4 + c_{11} s z^4 + c_{12} s^2 z^4 + c_{13} s^3 z^4 + c_{14} s^4 z^4. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

em que

$$\begin{aligned} c_1 = & (Q_1 Q_2 Q_3 + Q_1 Q_2 q_3 + Q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3)(Q_1 + Q_2 + Q_3 + P_0 + P_1 + P_2 \\ & + P_3 + q_1 + q_2 + q_3 - Q_1 P_0 - Q_2 P_1 - Q_3 P_2 - P_1 q_1 - P_2 q_2 - P_3 q_3 - 4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 = & (Q_1 Q_2 Q_3 + Q_1 Q_2 q_3 + Q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3)(Q_1 P_0 - P_1 - P_2 - P_3 - P_0 \\ & + Q_2 P_1 + Q_3 P_2 + P_1 q_1 + P_2 q_2 + P_3 q_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 = & (Q_1 Q_2 Q_3 + Q_1 Q_2 q_3 + Q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3)(Q_1 Q_2 - 3Q_2 - 3Q_3 - 3P_0 - 3P_1 \\ & - 3P_2 - 3P_3 - 3q_1 - 3q_2 - 3q_3 - 3Q_1 + Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3 + 3Q_1 P_0 + Q_1 P_1 + Q_2 P_0 \\ & + Q_1 P_2 + 3Q_2 P_1 + Q_3 P_0 + Q_1 P_3 + Q_2 P_2 + Q_3 P_1 + Q_2 P_3 + 3Q_3 P_2 + Q_3 P_3 + Q_1 q_2 \\ & + Q_1 q_3 + Q_3 q_1 + Q_2 q_3 + P_0 P_1 + P_0 P_2 + P_0 P_3 + P_1 P_2 + P_1 P_3 + P_2 P_3 + P_0 q_1 \\ & + P_0 q_2 + 3P_1 q_1 + P_0 q_3 + P_1 q_2 + P_2 q_1 + P_1 q_3 + 3P_2 q_2 + P_3 q_1 + P_2 q_3 + P_3 q_2 \\ & + 3P_3 q_3 + q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 - Q_1 Q_2 P_0 - Q_1 Q_2 P_1 - Q_1 Q_3 P_0 - Q_1 Q_3 P_2 \\ & - Q_2 Q_3 P_1 - Q_2 Q_3 P_2 - Q_1 P_0 P_1 - Q_1 P_0 P_2 - Q_2 P_0 P_1 - Q_1 P_0 P_3 - Q_2 P_1 P_2 \\ & - Q_3 P_0 P_2 - Q_2 P_1 P_3 - Q_3 P_1 P_2 - Q_3 P_2 P_3 - Q_1 P_0 q_2 - Q_1 P_0 q_3 - Q_1 P_2 q_2 \\ & - Q_3 P_1 q_1 - Q_2 P_1 q_3 - Q_3 P_2 q_1 - Q_1 P_3 q_3 - Q_2 P_3 q_3 - P_0 P_1 q_1 - P_0 P_2 q_2 \\ & - P_1 P_2 q_1 - P_1 P_2 q_2 - P_1 P_3 q_1 - P_0 P_3 q_3 - P_1 P_3 q_3 - P_2 P_3 q_2 - P_2 P_3 q_3 \\ & - P_1 q_1 q_2 - P_1 q_1 q_3 - P_2 q_1 q_2 - P_2 q_2 q_3 - P_3 q_1 q_3 - P_3 q_2 q_3 + Q_1 P_0 P_2 q_2 \\ & + Q_1 P_0 P_3 q_3 + Q_3 P_1 P_2 q_1 + Q_2 P_1 P_3 q_3 + P_1 P_2 q_1 q_2 + P_1 P_3 q_1 q_3 + P_2 P_3 q_2 q_3 \\ & + Q_1 Q_2 P_0 P_1 + Q_1 Q_3 P_0 P_2 + Q_2 Q_3 P_1 P_2 + 6). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 = & (Q_1Q_2Q_3 + Q_1Q_2q_3 + Q_1q_2q_3 + q_1q_2q_3)(3P_0 + 3P_1 + 3P_2 + 3P_3 - 3Q_1P_0 - Q_1P_1 \\
& - Q_2P_0 - Q_1P_2 - 3Q_2P_1 - Q_3P_0 - Q_1P_3 - Q_2P_2 - Q_3P_1 - Q_2P_3 - 3Q_3P_2 - Q_3P_3 \\
& - 2P_0P_1 - 2P_0P_2 - 2P_0P_3 - 2P_1P_2 - 2P_1P_3 - 2P_2P_3 - P_0q_1 - P_0q_2 - 3P_1q_1 - P_0q_3 \\
& - P_1q_2 - P_2q_1 - P_1q_3 - 3P_2q_2 - P_3q_1 - P_2q_3 - P_3q_2 - 3P_3q_3 + Q_1Q_2P_0 \\
& + Q_1Q_2P_1 + Q_1Q_3P_0 + Q_1Q_3P_2 + Q_2Q_3P_1 + Q_2Q_3P_2 + 2Q_1P_0P_1 + 2Q_1P_0P_2 \\
& + 2Q_2P_0P_1 + 2Q_1P_0P_3 + 2Q_2P_1P_2 + 2Q_3P_0P_2 + 2Q_2P_1P_3 + 2Q_3P_1P_2 + 2Q_3P_2P_3 \\
& + Q_1P_0q_2 + Q_1P_0q_3 + Q_1P_2q_2 + Q_3P_1q_1 + Q_2P_1q_3 + Q_3P_2q_1 + Q_1P_3q_3 \\
& + Q_2P_3q_3 + 2P_0P_1q_1 + 2P_0P_2q_2 + 2P_1P_2q_1 + 2P_1P_2q_2 + 2P_1P_3q_1 + 2P_0P_3q_3 \\
& + 2P_1P_3q_3 + 2P_2P_3q_2 + 2P_2P_3q_3 + P_1q_1q_2 + P_1q_1q_3 + P_2q_1q_2 + P_2q_2q_3 \\
& + P_3q_1q_3 + P_3q_2q_3 - 2Q_1P_0P_2q_2 - 2Q_1P_0P_3q_3 - 2Q_3P_1P_2q_1 - 2Q_2P_1P_3q_3 \\
& - 2P_1P_2q_1q_2 - 2P_1P_3q_1q_3 - 2P_2P_3q_2q_3 - 2Q_1Q_2P_0P_1 - 2Q_1Q_3P_0P_2 - 2Q_2Q_3P_1P_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_5 = & -(Q_1Q_2Q_3 + Q_1Q_2q_3 + Q_1q_2q_3 + q_1q_2q_3)(Q_1P_0P_1 - P_0P_2 - P_0P_3 - P_1P_2 - P_1P_3 \\
& - P_2P_3 - P_0P_1 + Q_1P_0P_2 + Q_2P_0P_1 + Q_1P_0P_3 + Q_2P_1P_2 + Q_3P_0P_2 \\
& + Q_2P_1P_3 + Q_3P_1P_2 + Q_3P_2P_3 + P_0P_1q_1 + P_0P_2q_2 + P_1P_2q_1 + P_1P_2q_2 \\
& + P_1P_3q_1 + P_0P_3q_3 + P_1P_3q_3 + P_2P_3q_2 + P_2P_3q_3 - Q_1P_0P_2q_2 - Q_1P_0P_3q_3 \\
& - Q_3P_1P_2q_1 - Q_2P_1P_3q_3 - P_1P_2q_1q_2 - P_1P_3q_1q_3 - P_2P_3q_2q_3 - Q_1Q_2P_0P_1 \\
& - Q_1Q_3P_0P_2 - Q_2Q_3P_1P_2).
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
c_6 = & (Q_1Q_2Q_3 + Q_1Q_2q_3 + Q_1q_2q_3 + q_1q_2q_3)(3Q_1 + 3Q_2 + 3Q_3 + 3P_0 + 3P_1 + 3P_2 + 3P_3 \\
& + 3q_1 + 3q_2 + 3q_3 - 2Q_1Q_2 - 2Q_1Q_3 - 2Q_2Q_3 - 3Q_1P_0 - 2Q_1P_1 - 2Q_2P_0 - 2Q_1P_2 \\
& - 3Q_2P_1 - 2Q_3P_0 - 2Q_1P_3 - 2Q_2P_2 - 2Q_3P_1 - 2Q_2P_3 - 3Q_3P_2 - 2Q_3P_3 - 2Q_1q_2 \\
& - 2Q_1q_3 - 2Q_3q_1 - 2Q_2q_3 - 2P_0P_1 - 2P_0P_2 - 2P_0P_3 - 2P_1P_2 - 2P_1P_3 - 2P_2P_3 \\
& - 2P_0q_1 - 2P_0q_2 - 3P_1q_1 - 2P_0q_3 - 2P_1q_2 - 2P_2q_1 - 2P_1q_3 - 3P_2q_2 - 2P_3q_1 - 2P_2q_3 \\
& - 2P_3q_2 - 3P_3q_3 - 2q_1q_2 - 2q_1q_3 - 2q_2q_3 + Q_1Q_2Q_3 + 2Q_1Q_2P_0 + 2Q_1Q_2P_1 + 2Q_1Q_3P_0 \\
& + Q_1Q_2P_2 + Q_1Q_3P_1 + Q_2Q_3P_0 + Q_1Q_2P_3 + 2Q_1Q_3P_2 + 2Q_2Q_3P_1 + Q_1Q_3P_3 \\
& + 2Q_2Q_3P_2 + Q_2Q_3P_3 + Q_1Q_2q_3 + 2Q_1P_0P_1 + 2Q_1P_0P_2 + 2Q_2P_0P_1 + 2Q_1P_0P_3 \\
& + Q_1P_1P_2 + Q_2P_0P_2 + Q_3P_0P_1 + Q_1P_1P_3 + Q_2P_0P_3 + 2Q_2P_1P_2 + 2Q_3P_0P_2 \\
& + Q_1P_2P_3 + 2Q_2P_1P_3 + Q_3P_0P_3 + 2Q_3P_1P_2 + Q_2P_2P_3 + Q_3P_1P_3 + 2Q_3P_2P_3 \\
& + 2Q_1P_0q_2 + 2Q_1P_0q_3 + Q_1P_1q_2 + Q_3P_0q_1 + Q_1P_1q_3 + 2Q_1P_2q_2 + Q_2P_0q_3 \\
& + 2Q_3P_1q_1 + Q_1P_2q_3 + Q_1P_3q_2 + 2Q_2P_1q_3 + 2Q_3P_2q_1 + 2Q_1P_3q_3 + Q_2P_2q_3 \\
& + Q_3P_3q_1 + 2Q_2P_3q_3 + Q_1q_2q_3 + P_0P_1P_2 + P_0P_1P_3 + P_0P_2P_3 + P_1P_2P_3 \\
& + 2P_0P_1q_1 + P_0P_1q_2 + P_0P_2q_1 + P_0P_1q_3 + 2P_0P_2q_2 + P_0P_3q_1 + 2P_1P_2q_1 \\
& + P_0P_2q_3 + P_0P_3q_2 + 2P_1P_2q_2 + 2P_1P_3q_1 + 2P_0P_3q_3 + P_1P_2q_3 + P_1P_3q_2 \\
& + P_2P_3q_1 + 2P_1P_3q_3 + 2P_2P_3q_2 + 2P_2P_3q_3 + P_0q_1q_2 + P_0q_1q_3 + 2P_1q_1q_2 \\
& + P_0q_2q_3 + 2P_1q_1q_3 + 2P_2q_1q_2 + P_1q_2q_3 + P_2q_1q_3 + P_3q_1q_2 + 2P_2q_2q_3 \\
& + 2P_3q_1q_3 + 2P_3q_2q_3 + q_1q_2q_3 - Q_1P_0P_1P_2 - Q_1P_0P_1P_3 - Q_2P_0P_1P_2 \\
& - Q_1P_0P_2P_3 - Q_2P_0P_1P_3 - Q_3P_0P_1P_2 - Q_2P_1P_2P_3 - Q_3P_0P_2P_3 - Q_3P_1P_2P_3 \\
& - Q_1P_0P_1q_2 \\
& - Q_1P_0P_1q_3 - 2Q_1P_0P_2q_2 - Q_3P_0P_1q_1 - Q_1P_0P_2q_3 - Q_1P_0P_3q_2 - Q_1P_1P_2q_2 \\
& - Q_2P_0P_1q_3 - Q_3P_0P_2q_1 - 2Q_1P_0P_3q_3 - 2Q_3P_1P_2q_1 - Q_1P_1P_3q_3 - Q_1P_2P_3q_2 \\
& - Q_2P_0P_3q_3 - Q_2P_1P_2q_3 - Q_3P_1P_3q_1 - Q_1P_2P_3q_3 - 2Q_2P_1P_3q_3 - Q_3P_2P_3q_1 \\
& - Q_2P_2P_3q_3 - Q_1P_0q_2q_3 - Q_1P_2q_2q_3 - Q_1P_3q_2q_3 - P_0P_1P_2q_1 - P_0P_1P_2q_2 \\
& - P_0P_1P_3q_1 - P_0P_1P_3q_3 - P_0P_2P_3q_2 - P_1P_2P_3q_1 - P_0P_2P_3q_3 - P_1P_2P_3q_2 \\
& - P_1P_2P_3q_3 - P_0P_1q_1q_2 - P_0P_1q_1q_3 - P_0P_2q_1q_2 - 2P_1P_2q_1q_2 - P_0P_2q_2q_3 \\
& - P_0P_3q_1q_3 - P_1P_2q_1q_3 - P_1P_3q_1q_2 - P_0P_3q_2q_3 - P_1P_2q_2q_3 - 2P_1P_3q_1q_3 \\
& - P_2P_3q_1q_2 - P_1P_3q_2q_3 - P_2P_3q_1q_3 - 2P_2P_3q_2q_3 - P_1q_1q_2q_3 - P_2q_1q_2q_3 \\
& - P_3q_1q_2q_3 - Q_1Q_2Q_3P_0 - Q_1Q_2Q_3P_1 - Q_1Q_2Q_3P_2 - 2Q_1Q_2P_0P_1 - Q_1Q_2P_0P_2 \\
& - Q_1Q_3P_0P_1 - Q_1Q_2P_0P_3 - Q_1Q_2P_1P_2 - 2Q_1Q_3P_0P_2 - Q_2Q_3P_0P_1 - Q_1Q_2P_1P_3 \\
& - Q_1Q_3P_0P_3 - Q_1Q_3P_1P_2 - Q_2Q_3P_0P_2 - 2Q_2Q_3P_1P_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - Q_1Q_3P_2P_3 - Q_2Q_3P_1P_3 - Q_2Q_3P_2P_3 - Q_1Q_2P_0q_3 - Q_1Q_2P_1q_3 - Q_1Q_2P_3q_3 \\
& + Q_1Q_2Q_3P_0P_1 + Q_1Q_2Q_3P_0P_2 + Q_1Q_2Q_3P_1P_2 + Q_1Q_2P_0P_1P_2 + Q_1Q_2P_0P_1P_3 \\
& + Q_1Q_3P_0P_1P_2 + Q_2Q_3P_0P_1P_2 + Q_1Q_3P_0P_2P_3 + Q_2Q_3P_1P_2P_3 + Q_1Q_2P_0P_1q_3 \\
& + Q_1Q_2P_0P_3q_3 + Q_1Q_2P_1P_3q_3 + Q_1P_0P_1P_2q_2 + Q_3P_0P_1P_2q_1 + Q_1P_0P_1P_3q_3 \\
& + Q_1P_0P_2P_3q_2 + Q_1P_0P_2P_3q_3 + Q_2P_0P_1P_3q_3 + Q_3P_1P_2P_3q_1 + Q_2P_1P_2P_3q_3 \\
& + Q_1P_0P_2q_2q_3 + Q_1P_0P_3q_2q_3 + Q_1P_2P_3q_2q_3 + P_0P_1P_2q_1q_2 + P_0P_1P_3q_1q_3 \\
& + P_1P_2P_3q_1q_2 + P_0P_2P_3q_2q_3 + P_1P_2P_3q_1q_3 + P_1P_2P_3q_2q_3 + P_1P_2q_1q_2q_3 \\
& + P_1P_3q_1q_2q_3 + P_2P_3q_1q_2q_3 - P_1P_2P_3q_1q_2q_3 - Q_1Q_2Q_3P_0P_1P_2 - Q_1Q_2P_0P_1P_3q_3 \\
& - Q_1P_0P_2P_3q_2q_3 - 4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_7 = & -(Q_1Q_2Q_3 + Q_1Q_2q_3 + Q_1q_2q_3 + q_1q_2q_3)(3P_0 + 3P_1 + 3P_2 + 3P_3 - 3Q_1P_0 - 2Q_1P_1 \\
& - 2Q_2P_0 - 2Q_1P_2 - 3Q_2P_1 - 2Q_3P_0 - 2Q_1P_3 - 2Q_2P_2 - 2Q_3P_1 - 2Q_2P_3 - 3Q_3P_2 \\
& - 2Q_3P_3 - 4P_0P_1 - 4P_0P_2 - 4P_0P_3 - 4P_1P_2 - 4P_1P_3 - 4P_2P_3 - 2P_0q_1 - 2P_0q_2 \\
& - 3P_1q_1 - 2P_0q_3 - 2P_1q_2 - 2P_2q_1 - 2P_1q_3 - 3P_2q_2 - 2P_3q_1 - 2P_2q_3 - 2P_3q_2 \\
& - 3P_3q_3 + 2Q_1Q_2P_0 + 2Q_1Q_2P_1 + 2Q_1Q_3P_0 + Q_1Q_2P_2 + Q_1Q_3P_1 + Q_2Q_3P_0 \\
& + Q_1Q_2P_3 + 2Q_1Q_3P_2 + 2Q_2Q_3P_1 + Q_1Q_3P_3 + 2Q_2Q_3P_2 + Q_2Q_3P_3 + 4Q_1P_0P_1 \\
& + 4Q_1P_0P_2 + 4Q_2P_0P_1 + 4Q_1P_0P_3 + 2Q_1P_1P_2 + 2Q_2P_0P_2 + 2Q_3P_0P_1 + 2Q_1P_1P_3 \\
& + 2Q_2P_0P_3 + 4Q_2P_1P_2 + 4Q_3P_0P_2 + 2Q_1P_2P_3 + 4Q_2P_1P_3 + 2Q_3P_0P_3 + 4Q_3P_1P_2 \\
& + 2Q_2P_2P_3 + 2Q_3P_1P_3 + 4Q_3P_2P_3 + 2Q_1P_0q_2 + 2Q_1P_0q_3 + Q_1P_1q_2 + Q_3P_0q_1 \\
& + Q_1P_1q_3 + 2Q_1P_2q_2 + Q_2P_0q_3 + 2Q_3P_1q_1 + Q_1P_2q_3 + Q_1P_3q_2 + 2Q_2P_1q_3 \\
& + +2Q_3P_2q_1 + 2Q_1P_3q_3 + Q_2P_2q_3 + Q_3P_3q_1 + 2Q_2P_3q_3 + 3P_0P_1P_2 + 3P_0P_1P_3 \\
& + 3P_0P_2P_3 + 3P_1P_2P_3 + 4P_0P_1q_1 + 2P_0P_1q_2 + 2P_0P_2q_1 + 2P_0P_1q_3 \\
& + 4P_0P_2q_2 + 2P_0P_3q_1 + 4P_1P_2q_1 + 2P_0P_2q_3 + 2P_0P_3q_2 + 4P_1P_2q_2 + 4P_1P_3q_1 \\
& + +4P_0P_3q_3 + 2P_1P_2q_3 + 2P_1P_3q_2 + 2P_2P_3q_1 + 4P_1P_3q_3 + 4P_2P_3q_2 + 4P_2P_3q_3 \\
& + P_0q_1q_2 + P_0q_1q_3 + 2P_1q_1q_2 + P_0q_2q_3 + 2P_1q_1q_3 + 2P_2q_1q_2 + P_1q_2q_3 \\
& + P_2q_1q_3 + P_3q_1q_2 + 2P_2q_2q_3 + 2P_3q_1q_3 + 2P_3q_2q_3 - 3Q_1P_0P_1P_2 \\
& - 3Q_1P_0P_1P_3 - 3Q_2P_0P_1P_2 - 3Q_1P_0P_2P_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 3Q_2P_0P_1P_3 - 3Q_3P_0P_1P_2 - 3Q_2P_1P_2P_3 - 3Q_3P_0P_2P_3 - 3Q_3P_1P_2P_3 - 2Q_1P_0P_1q_2 \\
& - 2Q_1P_0P_1q_3 - 4Q_1P_0P_2q_2 - 2Q_3P_0P_1q_1 - 2Q_1P_0P_2q_3 - 2Q_1P_0P_3q_2 - 2Q_1P_1P_2q_2 \\
& - -2Q_2P_0P_1q_3 - 2Q_3P_0P_2q_1 - 4Q_1P_0P_3q_3 - 4Q_3P_1P_2q_1 - 2Q_1P_1P_3q_3 - 2Q_1P_2P_3q_2 \\
& - 2Q_2P_0P_3q_3 - 2Q_2P_1P_2q_3 - 2Q_3P_1P_3q_1 - 2Q_1P_2P_3q_3 - 4Q_2P_1P_3q_3 - 2Q_3P_2P_3q_1 \\
& - 2Q_2P_2P_3q_3 - Q_1P_0q_2q_3 - Q_1P_2q_2q_3 - Q_1P_3q_2q_3 - 3P_0P_1P_2q_1 - 3P_0P_1P_2q_2 \\
& - 3P_0P_1P_3q_1 - 3P_0P_1P_3q_3 - 3P_0P_2P_3q_2 - 3P_1P_2P_3q_1 - 3P_0P_2P_3q_3 - 3P_1P_2P_3q_2 \\
& - 3P_1P_2P_3q_3 - 2P_0P_1q_1q_2 - 2P_0P_1q_1q_3 - 2P_0P_2q_1q_2 - 4P_1P_2q_1q_2 - 2P_0P_2q_2q_3 \\
& - 2P_0P_3q_1q_3 - 2P_1P_2q_1q_3 - 2P_1P_3q_1q_2 - 2P_0P_3q_2q_3 - 2P_1P_2q_2q_3 - 4P_1P_3q_1q_3 \\
& - 2P_2P_3q_1q_2 - 2P_1P_3q_2q_3 - 2P_2P_3q_1q_3 - 4P_2P_3q_2q_3 - P_1q_1q_2q_3 - P_2q_1q_2q_3 \\
& - P_3q_1q_2q_3 - Q_1Q_2Q_3P_0 - Q_1Q_2Q_3P_1 - Q_1Q_2Q_3P_2 - 4Q_1Q_2P_0P_1 - 2Q_1Q_2P_0P_2 \\
& - -2Q_1Q_3P_0P_1 - 2Q_1Q_2P_0P_3 - 2Q_1Q_2P_1P_2 - 4Q_1Q_3P_0P_2 - 2Q_2Q_3P_0P_1 - 2Q_1Q_2P_1P_3 \\
& - 2Q_1Q_3P_0P_3 - 2Q_1Q_3P_1P_2 - 2Q_2Q_3P_0P_2 - 4Q_2Q_3P_1P_2 - 2Q_1Q_3P_2P_3 - 2Q_2Q_3P_1P_3 \\
& - 2Q_2Q_3P_2P_3 - Q_1Q_2P_0q_3 - Q_1Q_2P_1q_3 - Q_1Q_2P_3q_3 + 2Q_1Q_2Q_3P_0P_1 + 2Q_1Q_2Q_3P_0P_2 \\
& + 2Q_1Q_2Q_3P_1P_2 + 3Q_1Q_2P_0P_1P_2 + 3Q_1Q_2P_0P_1P_3 + 3Q_1Q_3P_0P_1P_2 + 3Q_2Q_3P_0P_1P_2 \\
& + 3Q_1Q_3P_0P_2P_3 + 3Q_2Q_3P_1P_2P_3 + 2Q_1Q_2P_0P_1q_3 + 2Q_1Q_2P_0P_3q_3 + 2Q_1Q_2P_1P_3q_3 \\
& + 3Q_1P_0P_1P_2q_2 + 3Q_3P_0P_1P_2q_1 + 3Q_1P_0P_1P_3q_3 + 3Q_1P_0P_2P_3q_2 + 3Q_1P_0P_2P_3q_3 \\
& + 3Q_2P_0P_1P_3q_3 + 3Q_3P_1P_2P_3q_1 + 3Q_2P_1P_2P_3q_3 + 2Q_1P_0P_2q_2q_3 + 2Q_1P_0P_3q_2q_3 \\
& + 2Q_1P_2P_3q_2q_3 + 3P_0P_1P_2q_1q_2 + 3P_0P_1P_3q_1q_3 + 3P_1P_2P_3q_1q_2 + 3P_0P_2P_3q_2q_3 \\
& + 3P_1P_2P_3q_1q_3 + 3P_1P_2P_3q_2q_3 + 2P_1P_2q_1q_2q_3 + 2P_1P_3q_1q_2q_3 + 2P_2P_3q_1q_2q_3 \\
& - 3P_1P_2P_3q_1q_2q_3 - 3Q_1Q_2Q_3P_0P_1P_2 - 3Q_1Q_2P_0P_1P_3q_3 - 3Q_1P_0P_2P_3q_2q_3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_8 = & -(Q_1Q_2Q_3 + Q_1Q_2q_3 + Q_1q_2q_3 + q_1q_2q_3)(2P_0P_1 + 2P_0P_2 + 2P_0P_3 + 2P_1P_2 + 2P_1P_3 \\
& + 2P_2P_3 - 2Q_1P_0P_1 - 2Q_1P_0P_2 - 2Q_2P_0P_1 - 2Q_1P_0P_3 - Q_1P_1P_2 - Q_2P_0P_2 - Q_3P_0P_1 \\
& - Q_1P_1P_3 - Q_2P_0P_3 - 2Q_2P_1P_2 - 2Q_3P_0P_2 - Q_1P_2P_3 - 2Q_2P_1P_3 - Q_3P_0P_3 - 2Q_3P_1P_2 \\
& - Q_2P_2P_3 - Q_3P_1P_3 - 2Q_3P_2P_3 - 3P_0P_1P_2 - 3P_0P_1P_3 - 3P_0P_2P_3 - 3P_1P_2P_3 - 2P_0P_1q_1 \\
& - P_0P_1q_2 - P_0P_2q_1 - P_0P_1q_3 - 2P_0P_2q_2 - P_0P_3q_1 - 2P_1P_2q_1 - P_0P_2q_3 - P_0P_3q_2 \\
& - 2P_1P_2q_2 - 2P_1P_3q_1 - 2P_0P_3q_3 - P_1P_2q_3 - P_1P_3q_2 - P_2P_3q_1 - 2P_1P_3q_3 - 2P_2P_3q_2 \\
& - 2P_2P_3q_3 + 3Q_1P_0P_1P_2 + 3Q_1P_0P_1P_3 + 3Q_2P_0P_1P_2 + 3Q_1P_0P_2P_3 + 3Q_2P_0P_1P_3 \\
& + 3Q_3P_0P_1P_2 + 3Q_2P_1P_2P_3 + 3Q_3P_0P_2P_3 + 3Q_3P_1P_2P_3 + Q_1P_0P_1q_2 + Q_1P_0P_1q_3 \\
& + 2Q_1P_0P_2q_2 + Q_3P_0P_1q_1 + Q_1P_0P_2q_3 + Q_1P_0P_3q_2 + Q_1P_1P_2q_2 + Q_2P_0P_1q_3 \\
& + Q_3P_0P_2q_1 + 2Q_1P_0P_3q_3 + 2Q_3P_1P_2q_1 + Q_1P_1P_3q_3 + Q_1P_2P_3q_2 + Q_2P_0P_3q_3 \\
& + Q_2P_1P_2q_3 + Q_3P_1P_3q_1 + Q_1P_2P_3q_3 + 2Q_2P_1P_3q_3 + Q_3P_2P_3q_1 + Q_2P_2P_3q_3 \\
& + 3P_0P_1P_2q_1 + 3P_0P_1P_2q_2 + 3P_0P_1P_3q_1 + 3P_0P_1P_3q_3 + 3P_0P_2P_3q_2 + 3P_1P_2P_3q_1 \\
& + 3P_0P_2P_3q_3 + 3P_1P_2P_3q_2 + 3P_1P_2P_3q_3 + P_0P_1q_1q_2 + P_0P_1q_1q_3 + P_0P_2q_1q_2 \\
& + 2P_1P_2q_1q_2 + P_0P_2q_2q_3 + P_0P_3q_1q_3 + P_1P_2q_1q_3 + P_1P_3q_1q_2 + P_0P_3q_2q_3 \\
& + P_1P_2q_2q_3 + 2P_1P_3q_1q_3 + P_2P_3q_1q_2 + P_1P_3q_2q_3 + P_2P_3q_1q_3 + 2P_2P_3q_2q_3 \\
& + 2Q_1Q_2P_0P_1 + Q_1Q_2P_0P_2 + Q_1Q_3P_0P_1 + Q_1Q_2P_0P_3 + Q_1Q_2P_1P_2 + 2Q_1Q_3P_0P_2 \\
& + Q_2Q_3P_0P_1 + Q_1Q_2P_1P_3 + Q_1Q_3P_0P_3 + Q_1Q_3P_1P_2 + Q_2Q_3P_0P_2 + 2Q_2Q_3P_1P_2 \\
& + Q_1Q_3P_2P_3 + Q_2Q_3P_1P_3 + Q_2Q_3P_2P_3 - Q_1Q_2Q_3P_0P_1 - Q_1Q_2Q_3P_0P_2 - Q_1Q_2Q_3P_1P_2 \\
& - 3Q_1Q_2P_0P_1P_2 - 3Q_1Q_2P_0P_1P_3 - 3Q_1Q_3P_0P_1P_2 - 3Q_2Q_3P_0P_1P_2 - 3Q_1Q_3P_0P_2P_3 \\
& - 3Q_2Q_3P_1P_2P_3 - Q_1Q_2P_0P_1q_3 - Q_1Q_2P_0P_3q_3 - Q_1Q_2P_1P_3q_3 - 3Q_1P_0P_1P_2q_2 \\
& - 3Q_3P_0P_1P_2q_1 - 3Q_1P_0P_1P_3q_3 - 3Q_1P_0P_2P_3q_2 - 3Q_1P_0P_2P_3q_3 - 3Q_2P_0P_1P_3q_3 \\
& - 3Q_3P_1P_2P_3q_1 - 3Q_2P_1P_2P_3q_3 - Q_1P_0P_2q_2q_3 - Q_1P_0P_3q_2q_3 - Q_1P_2P_3q_2q_3 \\
& - 3P_0P_1P_2q_1q_2 - 3P_0P_1P_3q_1q_3 - 3P_1P_2P_3q_1q_2 - 3P_0P_2P_3q_2q_3 - 3P_1P_2P_3q_1q_3 \\
& - 3P_1P_2P_3q_2q_3 - P_1P_2q_1q_2q_3 - P_1P_3q_1q_2q_3 - P_2P_3q_1q_2q_3 + 3P_1P_2P_3q_1q_2q_3 \\
& + 3Q_1Q_2Q_3P_0P_1P_2 + 3Q_1Q_2P_0P_1P_3q_3 + 3Q_1P_0P_2P_3q_2q_3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_9 &= -(Q_1Q_2Q_3 + Q_1Q_2q_3 + Q_1q_2q_3 + q_1q_2q_3)(P_0P_1P_2 + P_0P_1P_3 + P_0P_2P_3 + P_1P_2P_3 \\
&\quad - Q_1P_0P_1P_2 - Q_1P_0P_1P_3 - Q_2P_0P_1P_2 - Q_1P_0P_2P_3 - Q_2P_0P_1P_3 - Q_3P_0P_1P_2 \\
&\quad - Q_2P_1P_2P_3 - Q_3P_0P_2P_3 - Q_3P_1P_2P_3 - P_0P_1P_2q_1 - P_0P_1P_2q_2 - P_0P_1P_3q_1 \\
&\quad - P_0P_1P_3q_3 - P_0P_2P_3q_2 - P_1P_2P_3q_1 - P_0P_2P_3q_3 - P_1P_2P_3q_2 - P_1P_2P_3q_3 \\
&\quad + Q_1Q_2P_0P_1P_2 + Q_1Q_2P_0P_1P_3 + Q_1Q_3P_0P_1P_2 + Q_2Q_3P_0P_1P_2 + Q_1Q_3P_0P_2P_3 \\
&\quad + Q_2Q_3P_1P_2P_3 + Q_1P_0P_1P_2q_2 + Q_3P_0P_1P_2q_1 + Q_1P_0P_1P_3q_3 + Q_1P_0P_2P_3q_2 \\
&\quad + Q_1P_0P_2P_3q_3 + Q_2P_0P_1P_3q_3 + Q_3P_1P_2P_3q_1 + Q_2P_1P_2P_3q_3 + P_0P_1P_2q_1q_2 \\
&\quad + P_0P_1P_3q_1q_3 + P_1P_2P_3q_1q_2 + P_0P_2P_3q_2q_3 + P_1P_2P_3q_1q_3 + P_1P_2P_3q_2q_3 \\
&\quad - P_1P_2P_3q_1q_2q_3 - Q_1Q_2Q_3P_0P_1P_2 - Q_1Q_2P_0P_1P_3q_3 - Q_1P_0P_2P_3q_2q_3). \\
c_{10} &= (P_0 - 1)(P_1 - 1)(P_2 - 1)(P_3 - 1)(Q_1Q_2Q_3 + Q_1Q_2q_3 + Q_1q_2q_3 + q_1q_2q_3)(Q_1Q_2 \\
&\quad - Q_2 - Q_3 - q_1 - q_2 - q_3 - Q_1 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3 + Q_1q_2 + Q_1q_3 + Q_3q_1 + Q_2q_3 + q_1q_2 \\
&\quad + q_1q_3 + q_2q_3 - Q_1Q_2Q_3 - Q_1Q_2q_3 - Q_1q_2q_3 - q_1q_2q_3 + 1). \\
c_{11} &= (Q_1Q_2Q_3 + Q_1Q_2q_3 + Q_1q_2q_3 + q_1q_2q_3)(P_0 + P_1 + P_2 + P_3 - 2P_0P_1 - 2P_0P_2 \\
&\quad - 2P_0P_3 - 2P_1P_2 - 2P_1P_3 - 2P_2P_3 + 3P_0P_1P_2 + 3P_0P_1P_3 + 3P_0P_2P_3 + 3P_1P_2P_3 \\
&\quad - 4P_0P_1P_2P_3)(Q_1Q_2 - Q_2 - Q_3 - q_1 - q_2 - q_3 - Q_1 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3 + Q_1q_2 + Q_1q_3 \\
&\quad + Q_3q_1 + Q_2q_3 + q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3 - Q_1Q_2Q_3 - Q_1Q_2q_3 - Q_1q_2q_3 - q_1q_2q_3 + 1). \\
c_{12} &= (Q_1Q_2Q_3 + Q_1Q_2q_3 + Q_1q_2q_3 + q_1q_2q_3)(P_0P_1 + P_0P_2 + P_0P_3 + P_1P_2 + P_1P_3 \\
&\quad + P_2P_3 - 3P_0P_1P_2 - 3P_0P_1P_3 - 3P_0P_2P_3 - 3P_1P_2P_3 + 6P_0P_1P_2P_3)(Q_1Q_2 - Q_2 - Q_3 \\
&\quad - q_1 - q_2 - q_3 - Q_1 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3 + Q_1q_2 + Q_1q_3 + Q_3q_1 + Q_2q_3 + q_1q_2 + q_1q_3 \\
&\quad + q_2q_3 - Q_1Q_2Q_3 - Q_1Q_2q_3 - Q_1q_2q_3 - q_1q_2q_3 + 1). \\
c_{13} &= (Q_1Q_2Q_3 + Q_1Q_2q_3 + Q_1q_2q_3 + q_1q_2q_3)(P_0P_1P_2 + P_0P_1P_3 + P_0P_2P_3 + P_1P_2P_3 \\
&\quad - 4P_0P_1P_2P_3)(Q_1Q_2 - Q_2 - Q_3 - q_1 - q_2 - q_3 - Q_1 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3 + Q_1q_2 + Q_1q_3 \\
&\quad + Q_3q_1 + Q_2q_3 + q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3 - Q_1Q_2Q_3 - Q_1Q_2q_3 - Q_1q_2q_3 - q_1q_2q_3 + 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{14} &= P_0 P_1 P_2 P_3 (Q_1 Q_2 Q_3 + Q_1 Q_2 q_3 + Q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3) (Q_1 Q_2 - Q_2 - Q_3 - q_1 - q_2 \\
&- q_3 - Q_1 + Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3 + Q_1 q_2 + Q_1 q_3 + Q_3 q_1 + Q_2 q_3 + q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 \\
&- Q_1 Q_2 Q_3 - Q_1 Q_2 q_3 - Q_1 q_2 q_3 - q_1 q_2 q_3 + 1).
\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{\Pi}^T \text{cof}(\mathbf{B})^T \mathbf{1} = c_{0_p} + c_{1_p} z + c_{2_p} s z + c_{3_p} z^2 + c_{4_p} s z^2 + c_{5_p} s^2 z^2 + c_{6_p} z^3 + c_{7_p} s z^3 + c_{8_p} s^2 z^3 + c_{9_p} s^3 z^3.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
H(s, z) &= \frac{c_{0_p} + c_{1_p} z + c_{2_p} s z + c_{3_p} z^2 + c_{4_p} s z^2 + c_{5_p} s^2 z^2 + c_{6_p} z^3 + c_{7_p} s z^3 + c_{8_p} s^2 z^3 + c_{9_p} s^3 z^3}{1 + c_1 z + c_2 s z + c_3 z^2 + c_4 s z^2 + c_5 s^2 z^2 + c_6 z^3 + c_7 s z^3 + c_8 s^2 z^3 + c_9 s^3 z^3 + c_{10} z^4 + c_{11} s z^4 + c_{12} s^2 z^4 + c_{13} s^3 z^4 + c_{14} s^4 z^4} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P(m, n) s^m z^n.
\end{aligned}$$

Multiplicando-se o denominador da fração pelo somatório duplo, chega-se à

$$\begin{aligned}
& c_{0_p} + c_{1_p} z + c_{2_p} s z + c_{3_p} z^2 + c_{4_p} s z^2 + c_{5_p} s^2 z^2 + c_{6_p} z^3 + c_{7_p} s z^3 + c_{8_p} s^2 z^3 + c_{9_p} s^3 z^3 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P(m, n) s^m z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_1 P(m, n) s^m z^{n+1} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_2 P(m, n) s^{m+1} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_3 P(m, n) s^m z^{n+2} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_4 P(m, n) s^{m+1} z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_5 P(m, n) s^{m+2} z^{n+2} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_6 P(m, n) s^m z^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_7 P(m, n) s^{m+1} z^{n+3} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_8 P(m, n) s^{m+2} z^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_9 P(m, n) s^{m+3} z^{n+3} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_{10} P(m, n) s^m z^{n+4} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_{11} P(m, n) s^{m+1} z^{n+4} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_{12} P(m, n) s^{m+2} z^{n+4} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_{13} P(m, n) s^{m+3} z^{n+4} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_{14} P(m, n) s^{m+4} z^{n+4}.
\end{aligned}$$

Fazendo-se uma mudança de índices em cada somatório duplo, obtém-se termos apenas com

potências  $s^m z^n$ , como em B.7

$$\begin{aligned}
& c_{0_p} + c_{1_p} z + c_{2_p} s z + c_{3_p} z^2 + c_{4_p} s z^2 + c_{5_p} s^2 z^2 + c_{6_p} z^3 + c_{7_p} s z^3 + c_{8_p} s^2 z^3 + c_{9_p} s^3 z^3 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P(m, n) s^m z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} c_1 P(m, n-1) s^m z^n \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-2} c_2 P(m-1, n-1) s^m z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-2} c_3 P(m, n-2) s^m z^n \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} c_4 P(m-1, n-2) s^m z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n c_5 P(m-2, n-2) s^m z^n \\
&+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-3} c_6 P(m, n-3) s^m z^n + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-2} c_7 P(m-1, n-3) s^m z^n \\
&+ \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-1} c_8 P(m-2, n-3) s^m z^n + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=3}^n c_9 P(m-3, n-3) s^m z^n \\
&+ \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-4} c_{10} P(m, n-4) s^m z^n + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-3} c_{11} P(m-1, n-4) s^m z^n \\
&+ \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-2} c_{12} P(m-2, n-4) s^m z^n + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=3}^{n-1} c_{13} P(m-3, n-4) s^m z^n \\
&+ \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=4}^n c_{14} P(m-4, n-4) s^m z^n. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

É possível expandir os somatórios duplos de (B.7) dividindo-os em dois casos,  $n \leq 3$  e  $n \geq 4$ , da seguinte forma

$$\begin{aligned}
& c_{0_p} + c_{1_p}z + c_{2_p}sz + c_{3_p}z^2 + c_{4_p}sz^2 + c_{5_p}s^2z^2 + c_{6_p}z^3 + c_{7_p}sz^3 + c_{8_p}s^2z^3 + c_{9_p}s^3z^3 \\
& = P(0,0) + P(0,1)z + P(1,1)sz + P(0,2)z^2 + P(1,2)sz^2 + P(2,2)s^2z^2 + P(0,3)z^3 \\
& + P(1,3)sz^3 + P(2,3)s^2z^3 + P(3,3)s^3z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=0}^n P(m,n)s^m z^n + c_1 P(0,0)z \\
& + c_1 P(0,1)z^2 + c_1 P(1,1)sz^2 + c_1 P(0,2)z^3 + c_1 P(1,2)sz^3 + c_1 P(2,2)s^2z^3 \\
& + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} c_1 P(m,n-1)s^m z^n + c_2 P(0,0)sz + c_2 P(0,1)sz^2 + c_2 P(1,1)s^2z^2 + c_2 P(0,2)sz^3 \\
& + c_2 P(1,2)s^2z^3 + c_2 P(2,2)s^3z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=1}^n c_2 P(m-1,n-1)s^m z^n + c_3 P(0,0)z^2 \\
& + c_3 P(0,1)z^3 + c_3 P(1,1)sz^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-2} c_3 P(m,n-2)s^m z^n + c_4 P(0,0)sz^2 \\
& + c_4 P(0,1)sz^3 + c_4 P(1,1)s^2z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} c_4 P(m-1,n-2)s^m z^n + c_5 P(0,0)s^2z^2 \\
& + c_5 P(0,1)s^2z^3 + c_5 P(1,1)s^3z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=2}^n c_5 P(m-2,n-2)s^m z^n + c_6 P(0,0)z^3 \\
& + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-3} c_6 P(m,n-3)s^m z^n + c_7 P(0,0)sz^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-2} c_7 P(m-1,n-3)s^m z^n \\
& + c_8 P(0,0)s^2z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-1} c_8 P(m-2,n-3)s^m z^n + c_9 P(0,0)s^3z^3 \\
& + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=3}^n c_9 P(m-3,n-3)s^m z^n + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-4} c_{10} P(m,n-4)s^m z^n \\
& + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-3} c_{11} P(m-1,n-4)s^m z^n + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-2} c_{12} P(m-2,n-4)s^m z^n \\
& + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=3}^{n-1} c_{13} P(m-3,n-4)s^m z^n + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=4}^n c_{14} P(m-4,n-4)s^m z^n. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Como  $P(m,n) = 0$  para  $m,n < 0$  e  $m > n$ , é possível escrever um único índice para os somatórios em  $m$ , de forma que, reagrupando os termos do lado direito de (B.8), obtém-se



$$\begin{aligned}
& c_{0_p} + c_{1_p}z + c_{2_p}sz + c_{3_p}z^2 + c_{4_p}sz^2 + c_{5_p}s^2z^2 + c_{6_p}z^3 + c_{7_p}sz^3 + c_{8_p}s^2z^3 + c_{9_p}s^3z^3 = P(0, 0) \\
& + \{P(0, 1) + c_1P(0, 0)\}z + \{P(1, 1) + c_2P(0, 0)\}sz + \{P(0, 2) + c_1P(0, 1) + c_3P(0, 0)\}z^2 \\
& + \{P(1, 2) + c_1P(1, 1) + c_2P(0, 1) + c_4P(0, 0)\}sz^2 + \{P(2, 2) + c_2P(1, 1) + c_5P(0, 0)\}s^2z^2 \\
& + \{P(0, 3) + c_1P(0, 2) + c_3P(0, 1) + c_6P(0, 0)\}z^3 + \{P(1, 3) + c_1P(1, 2) + c_2P(0, 2) \\
& + c_3P(1, 1) + c_4P(0, 1) + c_7P(0, 0)\}sz^3 + \{P(2, 3) + c_1P(2, 2) + c_2P(1, 2) + c_4P(1, 1) \\
& + c_5P(0, 1) + c_8P(0, 0)\}s^2z^3 + \{P(3, 3) + c_2P(2, 2) + c_5P(1, 1) + c_9P(0, 0)\}s^3z^3 \\
& + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{m=0}^n \{P(m, n) + c_1P(m, n-1) + c_2P(m-1, n-1) + c_3P(m, n-2) \\
& + c_4P(m-1, n-2) + c_5P(m-2, n-2) + c_6P(m, n-3) + c_7P(m-1, n-3) \\
& + c_8P(m-2, n-3) + c_9P(m-3, n-3) + c_{10}P(m, n-4) + c_{11}P(m-1, n-4) \\
& + c_{12}P(m-2, n-4) + c_{13}P(m-3, n-4) + c_{14}P(m-4, n-4)\}s^m z^n. \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Assim, igualando-se os coeficientes de mesma potência em ambos os lados de (B.9), encontra-se

$$P(0, 0) = c_{0_p} = 1$$

$$P(0, 1) + c_1 P(0, 0) = c_{1_p}$$

$$P(0, 1) = c_{1_p} - c_1$$

$$P(1, 1) + c_2 P(0, 0) = c_{2_p}$$

$$P(1, 1) = c_{2_p} - c_2$$

$$P(0, 2) + c_1 P(0, 1) + c_3 P(0, 0) = c_{3_p}$$

$$P(0, 2) = c_{3_p} - c_1 P(0, 1) - c_3,$$

$$P(1, 2) + c_1 P(1, 1) + c_2 P(0, 1) + c_4 P(0, 0) = c_{4_p}$$

$$P(1, 2) = c_{4_p} - c_1 P(1, 1) - c_2 P(0, 1) - c_4$$

$$P(2, 2) + c_2 P(1, 1) + c_5 P(0, 0) = c_{5_p}$$

$$P(2, 2) = c_{5_p} - c_2 P(1, 1) - c_5$$

$$P(0, 3) + c_1 P(0, 2) + c_3 P(0, 1) + c_6 P(0, 0) = c_{6_p}$$

$$P(0, 3) = c_{6_p} - c_1 P(0, 2) - c_3 P(0, 1) - c_6$$

$$P(1, 3) + c_1 P(1, 2) + c_2 P(0, 2) + c_3 P(1, 1) + c_4 P(0, 1) + c_7 P(0, 0) = c_{7_p}$$

$$P(1, 3) = c_{7_p} - c_1 P(1, 2) - c_2 P(0, 2) - c_3 P(1, 1) - c_4 P(0, 1) - c_7$$

$$P(2, 3) + c_1 P(2, 2) + c_2 P(1, 2) + c_4 P(1, 1) + c_5 P(0, 1) + c_8 P(0, 0) = c_{8_p}$$

$$P(2, 3) = c_{8_p} - c_1 P(2, 2) - c_2 P(1, 2) - c_4 P(1, 1) - c_5 P(0, 1) - c_8$$

$$P(3, 3) + c_2 P(2, 2) + c_5 P(1, 1) + c_9 P(0, 0) = c_{9_p}$$

$$P(3, 3) = c_{9_p} - c_2 P(2, 2) - c_5 P(1, 1) - c_9$$

para  $n \geq 4$  e  $0 \leq m \leq n$ , bem como

$$\begin{aligned} & P(m, n) + c_1 P(m, n-1) + c_2 P(m-1, n-1) + c_3 P(m, n-2) + c_4 P(m-1, n-2) \\ & + c_5 P(m-2, n-2) + c_6 P(m, n-3) + c_7 P(m-1, n-3) + c_8 P(m-2, n-3) \\ & + c_9 P(m-3, n-3) + c_{10} P(m, n-4) + c_{11} P(m-1, n-4) + c_{12} P(m-2, n-4) \\ & + c_{13} P(m-3, n-4) + c_{14} P(m-4, n-4) = 0. \end{aligned}$$

# APÊNDICE C

## T RABALHOS Publicados:

1. I. Moreira e C. Pimentel, Estimação de Parâmetros de Canais Gilbert-Elliott, Anais do XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Fortaleza, CE, Set. 2013.
2. I. Moreira e C. Pimentel, Modelamento Markoviano para Transmissão de Símbolos Não Binários Usando Sistemas OFDM em Canais Seletivos em Frequência, Anais do XXXIII SBrT, Juiz de Fora, MG, Set. 2015.
3. I. Moreira e C. Pimentel, Markov Modeling of OFDM Transmission over Frequency Selective Channels, Proceedings of 40th International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP), Barcelona, Espanha, Jul. 2017.
4. I. Moreira e C. Pimentel, Decodificação Iterativa para Canais com Memória e Decodificação Suave, Anais do XXXXV SBrT, São Pedro, SP, Set. 2017.
5. I. Moreira e C. Pimentel, Iterative Decoding of Finite-State Markov Channels with Soft-Decision, Proceedings of 8th IEEE Annual Information Technology, Electronics and Mobile Communication Conference (IEMCON), Vancouver, Canadá, Out. 2017.

## Sobre o Autor



O autor nasceu em Recife, Pernambuco, no dia 1º de agosto de 1982. Concluiu o curso Técnico em Eletrônica em julho de 2001 no Centro Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco. Em agosto de 2005, formou-se em Engenharia Elétrica, modalidade Eletrônica, pela Escola Politécnica da Universidade de Pernambuco. Em dezembro de 2008, concluiu o Mestrado em Engenharia Elétrica, pela Universidade Federal de Pernambuco.

Ja atuou na Empresa Brasileira de Telecomunicações (Embratel) e na Telemar Norte Leste. Desde fevereiro de 2005, atua na Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel) onde, atualmente, ocupa o cargo de Especialista em Regulação de Serviços Públicos de Telecomunicações. Entre suas áreas de interesse estão comunicação digital e processamento de sinais.

Endereço: SAUS, Qd. 6, Bl. H, 9º andar,  
ala sul  
CEP:70070-940  
Brasília-DF

*e-mail*: [igor.moura.leite@gmail.com](mailto:igor.moura.leite@gmail.com)

Esta tese foi diagramada usando  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ <sup>1</sup> pelo autor.

---

<sup>1</sup> $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$  é uma extensão do  $\text{\LaTeX}$ .  $\text{\LaTeX}$  é uma coleção de macros criadas por Leslie Lamport para o sistema  $\text{\TeX}$ , que foi desenvolvido por Donald E. Knuth.  $\text{\TeX}$  é uma marca registrada da Sociedade Americana de Matemática ( $\text{\AA M S}$ ). O estilo usado na formatação desta tese foi escrito por Dinesh Das, Universidade do Texas. Modificado em 2001 por Renato José de Sobral Cintra, Universidade Federal de Pernambuco, em 2005 por André Leite Wanderley, e em 2007 e 2015 por Márcio José de Carvalho Lima.