



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2020

Mecânica Clássica

29/10/2020 - 13h00 às 16h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – FUNDAMENTOS DA MECÂNICA CLÁSSICA

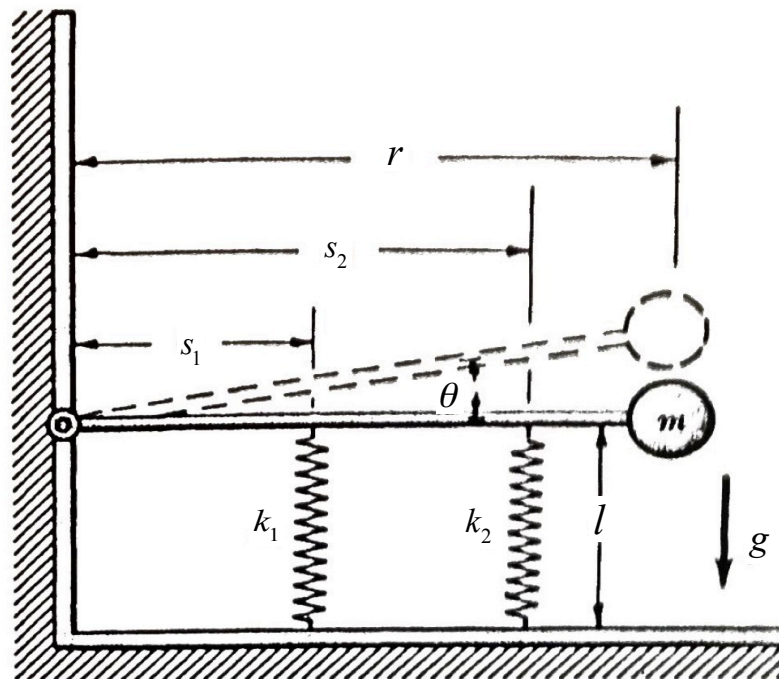
Suponha que a energia potencial dependente das coordenadas espaciais de um sistema seja uma função homogênea de grau k . Considerando o fator de escala temporal e o lagrangeano do sistema, estabeleça:

- (a) (60%) As relações de similaridade entre tempos e dimensões lineares de trajetórias geometricamente similares.
- (b) (40%)) Como as relações derivadas em (a) impactam no caso da interação de Newton entre duas massas, em particular na terceira lei de Kepler.

QUESTÃO 2 – PEQUENAS OSCILAÇÕES

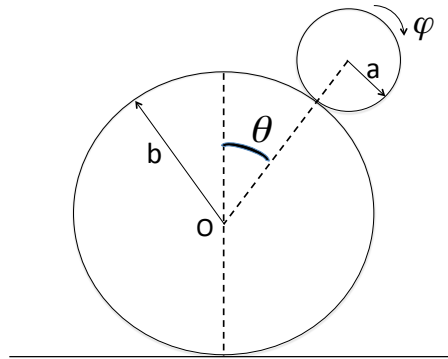
Uma partícula com massa m está presa a uma das extremidade de uma haste sem peso e de comprimento r ; a outra extremidade está fixada em um ponto da parede vertical, o qual define a origem das coordenadas polares, como mostra a figura abaixo. Também presas à haste, nos pontos s_1 e s_2 , temos duas molas de constantes k_1 e k_2 e comprimentos naturais l_1 e l_2 , respectivamente. A outra extremidade de cada mola está conectada ao piso. O sistema encontra-se em equilíbrio para $\theta=0$.

- (a) (30%) Determine a condição de equilíbrio em termos dos parâmetros do sistema.
- (b) (30%) Escreva o lagrangeano do sistema.
- (c) (40%) Encontre o período de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio. Interprete o resultado tendo em vista as forças que atuam no sistema.



QUESTÃO 3 – CORPO RÍGIDO - ROLAMENTO

Uma esfera de massa m , raio a e momento de inércia $I = (2/5)ma^2$, em relação ao seu centro de massa, rola sem deslizar sobre um cilindro fixo de raio b . Veja figura abaixo.



- (a) (30 %) Identifique as forças que atuam na esfera, escreva as equações de Newton para os movimentos de translação e rotação da esfera e obtenha a equação de movimento:
 $\ddot{\theta} = f(\theta)$
- (b) (30 %) Escreva o lagrangeano $L(\theta, \dot{\theta})$ do sistema.
- (c) (40 %) Use as equações de Euler-Lagrange para confirmar as equações de Newton do item (a).

QUESTÃO 4 – MOVIMENTO EM UM CAMPO CENTRAL E TRANSFORMAÇÃO CANÔNICA

- (a) Uma partícula de massa m está se movendo no plano (x, y) sob a influência de uma força central dependendo apenas de sua distância à origem.
- (i) (30%) Escreva o lagrangeano e o hamiltoniano do sistema em coordenadas polares.
- (ii) (30%) Use (i) para obter as equações de movimento de Hamilton.
- (b) (40%) Considere agora um movimento no espaço unidimensional em que as variáveis conjugadas da partícula são (q, p) . Demonstre que a transformação

$$\begin{cases} P = \frac{1}{2}(q^2 + p^2), \\ Q = \arctan\left(\frac{q}{p}\right), \end{cases} \quad (1)$$

é canônica.