

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2023

Mecânica Estatística

08/03/2023 - 9h00 às 12h00

→ Escolha três dentre as quatro questões.

→ Informe apenas seu CPF (não escreva seu nome na prova).

QUESTÃO 1 – TERMODINÂMICA

Cada uma de três amostras idênticas (1, 2 e 3) possui capacidade térmica C . As três amostras estão individualmente isoladas, com temperaturas $T_1^{(0)} = 1,0$ K, $T_2^{(0)} = T$ e $T_3^{(0)} = 4,5$ K, com $1 \text{ K} < T < 4,5 \text{ K}$. O sistema composto por 1, 2 e 3 passa por um processo em duas etapas: (i) Primeiro, 1 e 2 são postas em contato térmico até que o equilíbrio seja atingido, sendo separadas e isoladas em seguida. Finalmente, (ii) 2 e 3 são postas em contato térmico até que o equilíbrio seja atingido. Durante todo o processo o sistema composto permanece isolado e os volumes e os números de moles das amostras são mantidos constantes.

- (a) (40%) Calcule as temperaturas finais $T_1^{(f)}$, $T_2^{(f)}$ e $T_3^{(f)}$ após o fim do processo completo, em função de T .
- (b) (40%) Determine a variação da entropia do sistema composto, ΔS , após o processo completo, em função de T .
- (c) (20%) Para que valor de T a variação ΔS é mínima?

QUESTÃO 2 – SÓLIDO DE EINSTEIN NO FORMALISMO MICROCANÔNICO

Numa descrição elementar das propriedades macroscópicas de um sólido, considera-se que o mesmo é composto por N osciladores harmônicos quânticos unidimensionais, localizados e com mesma frequência angular ω .

- (a) (30%) Determine o número de microestados acessíveis ao sistema com energia total E e número de osciladores N , ambos fixos.
- (b) (30%) Calcule a entropia por oscilador $s = S/N$ em função da energia por oscilador $u = E/N$, no limite termodinâmico.
- (c) (20%) Determine u como função da temperatura T .
- (d) (20%) Podemos investigar propriedades mecânicas considerando que a frequência angular ω depende de $v = V/N$, onde V é o volume total do sistema. Assuma que $w(v) = \xi v^\gamma$, com $\xi > 0$, calcule a pressão p em termos de (u, v, γ) e determine que condição γ deve satisfazer para que $p > 0$.

Dado: $\ln(X!) \approx X \ln X - X$, para $X \rightarrow \infty$.

QUESTÃO 3 – ENSEMBLES CANÔNICO E GRANDE-CANÔNICO

Um gás ideal clássico de N partículas monoatômicas de massa m está confinado a uma câmara de volume V a uma temperatura T .

- (a) (25%) Calcule a função de partição $Z(T, V, N)$ do gás por integração direta no espaço de fase clássico. Use o fator semiclássico de correção $1/(N!h^{3N})$.
- (b) (25%) A partir da sua resposta ao item anterior, mostre que o potencial químico é

$$\mu(T, P) = k_B T \ln \left(\frac{P \lambda^3}{k_B T} \right)$$

onde P é a pressão do gás e $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ é o comprimento de onda térmico.

Suponha agora que as paredes da câmara possuem sítios de adsorção fixos e independentes. Cada sítio de adsorção pode estar (i) desocupado, com energia 0, ou (ii) ocupado com apenas um átomo, com energia $-\epsilon$.

- (c) (25%) Calcule a grande função de partição $\mathcal{Z}(T_a, \mu_a)$ de um sítio de adsorção de temperatura T_a e potencial químico μ_a .
- (d) (25%) Supondo que o gás no interior da câmara funciona como um reservatório térmico e de partículas para os sítios de adsorção, calcule a fração média de sítios ocupados, n_o , como uma função da temperatura T e da pressão P do gás na câmara.

Dado: $\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-s^2} = \sqrt{\pi}$

QUESTÃO 4 – GÁS DE FERMI DEGENERADO

- (a) (20%) Esboce o gráfico da função que descreve a ocupação dos níveis quânticos de um gás de férmions livres no limite degenerado ($T = 0$). Mostre, por argumentos físicos, que o potencial químico do gás nessas condições é $\mu(T = 0) = \epsilon_F$, onde ϵ_F é a energia do último nível ocupado (energia de Fermi).
- (b) (50%) Calcule a energia de Fermi $\epsilon_F(N, V)$ de um gás ideal de nêutrons de massa m e spin $1/2$. Supondo que o gás está degenerado ($T = 0$), mostre que sua energia interna é dada por $U_d(N, V) = \frac{3}{5}N\epsilon_F(N, V)$.
- (c) (30%) Um modelo simplificado para uma estrela de nêutrons considera sua densidade tão alta que podemos desprezar flutuações térmicas e tratá-la como um gás ideal de Fermi degenerado. Nesse caso, a energia interna da estrela é dada por $U = U_d + U_g$, onde U_g é a contribuição gravitacional. Na aproximação Newtoniana,

$$U_g = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

onde $M = Nm$, R é o raio da estrela e G é a constante gravitacional. Com essas informações e usando seu resultado para o item anterior, calcule o raio de equilíbrio da estrela como uma função de sua massa M e das constantes m , h (ou \hbar), e G .