

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2021

Eletrodinâmica Clássica

24/05/2021 - 13h00 às 16h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

QUESTÃO 1 – EQUAÇÃO DE LAPLACE

Uma esfera metálica possui raio R e centro na origem do sistema de coordenadas. A esfera tem carga elétrica total nula e encontra-se no vácuo, numa região onde inicialmente havia um campo elétrico uniforme ao longo do eixo z dado por $\vec{E} = E_0 \hat{k}$.

- (a) (40%) Encontre o potencial elétrico fora da esfera no equilíbrio eletrostático.
- (b) (20%) Determine o vetor campo elétrico fora da esfera.
- (c) (20%) Calcule a densidade superficial de cargas na esfera. Integre a densidade de cargas sobre a superfície $r = R$ e comente sobre o resultado obtido.
- (d) (20%) Verifique a validade da condição de contorno em $r = R$ para as componentes tangenciais do vetor campo elétrico.

Dados:

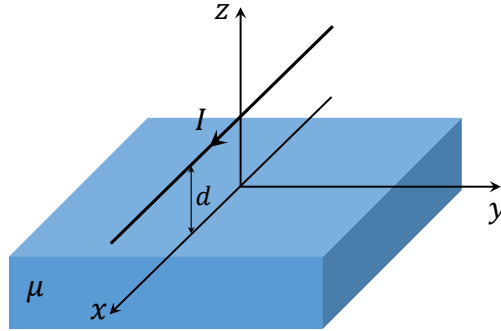
Polinômios de Legendre: $P_{\ell=0}(x) = 1$, $P_{\ell=1}(x) = x$

$$\int_{-1}^1 P_{\ell'}(x) P_{\ell}(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell, \ell'}$$

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

QUESTÃO 2 – MAGNETOSTÁTICA - MÉTODO DAS IMAGENS

A figura mostra um fio condutor retilíneo e infinito que transporta uma corrente elétrica constante I paralela ao eixo x . O fio encontra-se no vácuo, na posição $y = 0$ e $z = d > 0$. Um meio linear semi-infinito de permeabilidade magnética μ ocupa a região $z < 0$. Não há correntes superficiais no plano $z = 0$.



De acordo com o método das imagens, considere que o campo \vec{B} na região $z > 0$ tem contribuições do fio real de corrente I e também do meio, na forma de um fio imagem infinito localizado em $y = 0$ e $z = -d$, transportando uma corrente I' paralela ao eixo x . Por outro lado, o campo \vec{B} na região $z < 0$ tem contribuição apenas de um fio imagem infinito localizado em $y = 0$ e $z = d$, com uma corrente I'' paralela ao eixo x .

- (a) (30%) Para a região $z > 0$, determine os campos \vec{B} e \vec{H} devido a I e I' em um ponto situado ao longo do eixo y , com $z \rightarrow 0^+$.
- (b) (20%) Para a região $z < 0$, determine os campos \vec{B} e \vec{H} devido a I'' em um ponto situado ao longo do eixo y , com $z \rightarrow 0^-$.
- (c) (30%) Utilizando o fato de que não há correntes superficiais no plano $z = 0$, aplique as condições de contorno para os campos \vec{B} e \vec{H} em $z = 0$ e determine I' e I'' em função de I e da permeabilidade relativa $\mu_r = \mu/\mu_0$.
- (d) (20%) Determine as correntes I' e I'' nos seguintes casos limites:
 - (i) o meio é supercondutor com $\mu_r = 0$;
 - (ii) o meio é magnético com $\mu_r = \infty$.

Em ambos os casos, justifique se a força magnética sobre o fio com corrente I é de atração ou repulsão.

QUESTÃO 3 – CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS QUASE-ESTÁTICOS

Considere uma corrente alternada de frequência ω , dada pela expressão $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, que é transportada por um fio condutor retilíneo muito longo. Ao redor do fio existe uma casca cilíndrica condutora coaxial, também muito longa, de raio a e espessura desprezível. A corrente total na casca é igual à corrente no fio, porém com sentido oposto. Na casca cilíndrica a corrente é distribuída uniformemente. Há vácuo na região entre o fio e a casca cilíndrica, e também na região exterior à casca cilíndrica.

- (a) (30 %) Considere que a frequência ω é baixa o suficiente para garantir que os campos eletromagnéticos se encontrem no regime quase-estático. Calcule o campo magnético $\vec{B}(r, t)$ e o campo elétrico induzido $\vec{E}(r, t)$ nas regiões $r < a$ e $r > a$, onde r denota a distância ao fio.
- (b) (20 %) Nesse regime, obtenha uma expressão para a densidade de corrente de deslocamento $\vec{J}_d(r, t)$ na região $r < a$.
- (c) (30 %) Mostre que a corrente de deslocamento na região $r < a$ é dada por

$$I_d(t) = \frac{1}{4} \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 a^2 I(t).$$

- (d) (20 %) Considere que o raio da casca cilíndrica seja $a = 1,0$ cm. Determine a ordem de grandeza da frequência mínima ω_{\min} para que a razão $I_d(t)/I(t)$ seja igual a 1%. A que região do espectro eletromagnético (radiofrequência, microondas, infravermelho, visível, ultravioleta, raios-X, raios gama) corresponde esta frequência?

Dado:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + \text{constante}$$

QUESTÃO 4 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Considere um meio dielétrico ilimitado, linear, homogêneo e isotrópico. O meio possui permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ . Não existem cargas livres e correntes livres nesse meio.

- (a) (30%) Deduza a equação de onda para o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ nesse meio.
- (b) (20%) Considere uma solução do tipo ondas planas com vetor de onda \vec{k} para os campos elétrico e magnético nesse meio. Mostre que o campo elétrico vibra transversalmente à direção de propagação da onda.
- (c) (30%) Nesse meio, deduza a equação que relaciona os vetores $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ e \vec{k} .
- (d) (20%) Considere, agora, dois meios semi-infinitos lineares com parâmetros (ε_1, μ_1) e (ε_2, μ_2) . Os meios estão separados pela interface plana $z = 0$. As ondas eletromagnéticas planas incidente e refratada se propagam nos seus respectivos meios com vetores de onda \vec{k}_1 e \vec{k}_2 . Deduza a lei de refração de Snell para estes meios.

Dados:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla}(e^{\vec{a} \cdot \vec{r}}) = \vec{a} e^{\vec{a} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{\nabla} \times (f \vec{A}) = \vec{\nabla} f \times \vec{A} + f \vec{\nabla} \times \vec{A}$$