

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Primeiro Semestre de 2021

**Mecânica Estatística**

25/05/2021 - 13h00 às 16h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

**QUESTÃO 1 – TERMODINÂMICA**

O ciclo de Carnot usual consiste de quatro processos que ocorrem em um gás ideal: duas transformações isotérmicas e duas adiabáticas. Suponha que, em vez de um gás ideal, o ciclo de Carnot ocorra com um gás de fótons. Neste caso, sabe-se que a energia interna de um gás de fótons é  $U = \sigma VT^4$ , onde  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann,  $V$  é o volume do gás e  $T$  é a sua temperatura absoluta.

- (a) (30%) Calcule o calor específico ( $c_V$ ) a volume constante, a entropia ( $S$ ), a pressão ( $p$ ) e o potencial químico ( $\mu$ ) do gás de fótons. Dê suas respostas em função de  $V$ ,  $T$  e  $\sigma$ . Discuta fisicamente o resultado para o potencial químico.
- (b) (20%) Combinando os resultados do item (a) para  $S$  e  $p$ , mostre que a equação de estado do gás de fótons é dada por  $PV^\alpha = f(S)$ , onde a função  $f(S)$  só depende da entropia. Determine  $\alpha$  e  $f(S)$ .
- (c) (20%) Esboce o ciclo de Carnot para o gás de fótons no plano  $p$ - $V$ . Justifique as formas das linhas isotérmicas e adiabáticas.
- (d) (30%) Calcule o calor  $Q_1$  absorvido pelo gás na isotérmica à alta temperatura  $T_1$  e o calor  $Q_2$  cedido na isotérmica à baixa temperatura  $T_2$ . Mostre que a eficiência do ciclo de Carnot com o gás de fótons,  $\eta = 1 - |Q_2|/|Q_1|$ , é idêntica à do ciclo de Carnot com o gás ideal operando entre as mesmas temperaturas.

---

Dados:  $dS = c_V \frac{dT}{T}$ ;  $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{N,T}$  e  $\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{p,T}$ , onde  $F$  é a energia livre de Helmholtz e  $N$  é o número de fótons no gás.

**QUESTÃO 2 – ENSEMBLE CANÔNICO**

Considere um sistema com  $N$  átomos não interagentes na presença de um campo magnético externo uniforme,  $\vec{H} = H\hat{z}$ . Cada átomo  $i$  ( $= 1, 2, \dots, N$ ) possui spin  $1/2$  e momento magnético de spin  $\vec{\mu}_i$ , com componente  $\mu_{iz} = \mu S_{iz}$  ao longo da direção do campo, onde  $\mu > 0$  é uma constante e  $S_{iz} = \pm 1$ . O hamiltoniano do sistema é dado por

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i \cdot \vec{H}.$$

- (a) (20%) Calcule a função de partição canônica do sistema. Expresse sua resposta em função de  $\mu$ ,  $H$ ,  $N$  e  $\beta = 1/(k_B T)$ .
- (b) (20%) Obtenha uma expressão para a energia livre do sistema.
- (c) (20%) Obtenha uma expressão para a energia interna do sistema.
- (d) (20%) Obtenha uma expressão para a entropia do sistema.
- (e) (20%) Levando em consideração a terceira lei da termodinâmica, o que se pode afirmar sobre a degenerescência do estado fundamental deste sistema?

**QUESTÃO 3 – ESTATÍSTICA DE FERMI-DIRAC**

Um bloco cúbico de cobre possui aresta  $L$  e  $N$  elétrons livres. Considere que estes elétrons não interagem nem com os átomos do material nem entre si, formando, portanto, um gás ideal de elétrons livres. O sistema encontra-se à temperatura  $T = 0$  K.

- (a) (20%) Determine o vetor de onda de Fermi  $k_F$  desse gás ideal de elétrons livres.

Expresse sua resposta em função de  $L$  e  $N$ .

Seja  $L = 1$  cm e  $N = 8,5 \times 10^{22}$ . Obtenha a ordem de grandeza da energia de Fermi  $\epsilon_F$  do sistema (em eV).

Dados: considere a massa do elétron  $m = 9,1 \times 10^{-31}$  kg; carga do elétron  $q = -1,6 \times 10^{-19}$  C;  $\hbar = 1,1 \times 10^{-34}$  J·s;  $1 \text{ J} = 6,2 \times 10^{18}$  eV.

- (b) (30%) Encontre uma expressão para a densidade  $D(\epsilon)$  de estados de energia  $\epsilon$  desse gás ideal de elétrons livres.

- (c) (30%) Seja  $\Delta U(T) = U(T) - U(0)$  o incremento na energia livre do gás ideal de elétrons livres quando a sua temperatura absoluta aumenta de  $T = 0$  K até  $T$ . Mostre que  $\Delta U$  pode ser escrito na forma

$$\Delta U(T) = \int_{\epsilon_F}^{\infty} d\epsilon (\epsilon - \epsilon_F) D(\epsilon) f(\epsilon) + \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon (\epsilon_F - \epsilon) D(\epsilon) [1 - f(\epsilon)],$$

onde  $f(\epsilon)$  denota a distribuição de Fermi-Dirac. Interprete fisicamente a contribuição para  $\Delta U$  de cada integral acima.

Sugestão: Some  $\int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon_F D(\epsilon) - \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon_F D(\epsilon) f(\epsilon) - \int_{\epsilon_F}^{\infty} d\epsilon \epsilon_F D(\epsilon) f(\epsilon) = 0$  à definição de  $\Delta U(T)$ .

- (d) (20%) Suponha, agora, que  $k_B T / \epsilon_F \ll 1$ , de modo que  $D(\epsilon) \approx D(\epsilon_F)$ . Considere também o potencial químico  $\mu = \epsilon_F$ . Partindo do resultado do item (c), obtenha uma expressão para o calor específico do sistema. Mostre que a sua dependência com  $T$  é linear para este regime de temperaturas.

Dado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

**QUESTÃO 4 – MODELO DE ISING EM 1D**

Considere uma cadeia unidimensional de  $N$  spins Ising,  $S_i = \pm 1$ , com  $i = 1, 2, \dots, N$ . Apenas spins que são primeiros vizinhos interagem com energia  $-J$ . Na presença de um campo magnético uniforme de módulo  $H$  na direção dos spins, o hamiltoniano do sistema é

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} - \mu H \sum_{i=1}^N S_i,$$

onde  $\mu > 0$  é uma constante com unidade de momento magnético e condições periódicas de contorno são aplicadas,  $S_{N+1} = S_1$ .

(a) (30%) Expresse a função de partição canônica  $\mathcal{Z}_N$  do sistema em termos de

$$T(S_i, S_{i+1}) = \exp \left[ \beta J S_i S_{i+1} + \beta \frac{\mu H}{2} (S_i + S_{i+1}) \right],$$

onde  $\beta = 1/(k_B T)$ .

(b) (30%) Considere  $H = 0$  neste item e nos itens a seguir. De acordo com a definição acima,  $T(S_i, S_{i+1})$  pode ser interpretado como os elementos de uma matriz de dimensão  $2 \times 2$ . Sejam  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  os autovalores dessa matriz a  $H = 0$ , tal que  $\lambda_+ > \lambda_- > 0$ . Calcule  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$ . Expresse  $\mathcal{Z}_N$  em função de  $\lambda_+$ ,  $\lambda_-$  e  $N$ .

(c) (30%) No limite termodinâmico  $N \rightarrow \infty$ , sabe-se que  $\lambda_+^N \gg \lambda_-^N$ . Calcule a energia livre  $f$  por spin nesse limite. Dê sua resposta em termos de  $\beta$  e  $J$ .

(d) (10%) Suponha, agora, um estado ordenado em que todos os spins estejam alinhados para cima,  $S_i = +1$ . Se a partir de um certo ponto na cadeia todos os spins se invertem, considere que a energia livre do sistema sofre uma variação

$$\Delta F = 2J - \beta^{-1} \ln N.$$

Baseado nessa informação, é possível que o sistema Ising em 1D se apresente no equilíbrio termodinâmico no estado ordenado com todos os spins  $S_i = +1$  no limite termodinâmico? Justifique.