

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2021

Mecânica Quântica

26/05/2021 - 13h00 às 16h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

QUESTÃO 1 – OSCILADOR HARMÔNICO 1D

Um oscilador harmônico 1D possui massa m e frequência angular ω . Quando normalizamos os operadores posição, momento linear e hamiltoniano, respectivamente, de acordo com $\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$, $\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}P$ e $\hat{H} = \frac{1}{\hbar\omega}H$, o hamiltoniano normalizado do oscilador harmônico é escrito como

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2).$$

Geralmente, a abordagem do problema do oscilador harmônico 1D é simplificada através do uso dos operadores de destruição e criação, respectivamente definidos por

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}) \quad \text{e} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}).$$

- (a) (20%) Mostre a relação de comutação $[a, a^\dagger] = 1$.
- (b) (30%) A ação dos operadores a e a^\dagger sobre os autoestados $|\varphi_n\rangle$ normalizados à unidade do hamiltoniano H é dada por

$$a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle \quad \text{e} \quad a^\dagger|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle,$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$. Mostre que $\langle\varphi_n|X|\varphi_n\rangle = \langle\varphi_n|P|\varphi_n\rangle = 0$ e $\langle\varphi_n|a^\dagger a|\varphi_n\rangle = n$.

- (c) (30%) Mostre que $\langle\varphi_n|X^2|\varphi_n\rangle = (2n+1)\hbar/(2m\omega)$ e $\langle\varphi_n|P^2|\varphi_n\rangle = (2n+1)m\omega\hbar/2$.
- (d) (20%) Utilizando os resultados dos itens (b) e (c), encontre $(\Delta X)(\Delta P)$, onde $(\Delta X)^2 = \langle\varphi_n|X^2|\varphi_n\rangle - \langle\varphi_n|X|\varphi_n\rangle^2$ e $(\Delta P)^2 = \langle\varphi_n|P^2|\varphi_n\rangle - \langle\varphi_n|P|\varphi_n\rangle^2$. Interprete o resultado obtido.

QUESTÃO 2 – ADIÇÃO DE MOMENTO ANGULAR

Considere um sistema de dois elétrons com spins $S_1 = 1/2$ e $S_2 = 1/2$. Os operadores S_{1z} e S_{2z} possuem associados a eles os números quânticos $m_1 = \pm 1/2$ e $m_2 = \pm 1/2$, respectivamente. Cada elétron possui momento angular orbital nulo.

- (a) (25%) Quais são os possíveis valores do spin total S do sistema? Quais são os possíveis valores do número quântico m associado ao operador $S_{1z} + S_{2z}$? Justifique suas respostas com base na teoria da adição de momentos angulares.
- (b) (25%) Escreva os vetores de estado $|S m\rangle$ do sistema normalizados à unidade para os casos tripleto ($S = 1$) e singleto ($S = 0$). Expresse sua resposta em função dos estados $|m_1 m_2\rangle$.
- (c) (50%) Sejam, agora, L o momento angular orbital e $J = L + S$ o momento angular total do sistema de dois elétrons. Suponha que o elétron S_1 está em um estado P com momento angular orbital $L_1 = 1$, e que o elétron S_2 está em um estado D com $L_2 = 2$. Encontre, neste caso, os estados $^{2S+1}L_J$, onde os valores $L = 0, 1, 2, 3, \dots$ correspondem a S, P, D, F, \dots , respectivamente.

QUESTÃO 3 – TEORIA DE PERTURBAÇÃO INDEPENDENTE DO TEMPO

Considere um sistema com três níveis de energia não degenerados $(-\epsilon, \epsilon, 2\epsilon)$, com $\epsilon > 0$, descrito por um hamiltoniano \mathcal{H}_0 . O sistema é sujeito a uma perturbação independente do tempo V , com $0 < v \ll \epsilon$, onde

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2\epsilon \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ 0 & v & 0 \\ v & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

são matrizes escritas na base de autoestados de \mathcal{H}_0 ,

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (30%) Diagonalize explicitamente o hamiltoniano perturbado $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ e obtenha suas autoenergias para $v \ll \epsilon$.
- (b) (40%) Utilizando, agora, a teoria de perturbação independente do tempo, obtenha as autoenergias do hamiltoniano perturbado incluindo correções até segunda ordem, isto é, obtenha as autoenergias do hamiltoniano perturbado na forma $E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)}$. Compare sua resposta com a do item (a). O resultado era esperado? Justifique.
- (c) (30%) Obtenha os autoestados do hamiltoniano perturbado até primeira ordem em teoria de perturbação e mostre que eles são ortogonais. Ou seja, escreva os autoestados do hamiltoniano perturbado na forma $|\psi_n\rangle = |\psi_n^{(0)}\rangle + |\psi_n^{(1)}\rangle$ e mostre que $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = 0$ para $n \neq m$. (Não é necessário normalizar os autoestados do hamiltoniano perturbado.)

Dado: $(1+x)^n \approx 1+nx$, para $|x| \ll 1$.

QUESTÃO 4 – PARTÍCULAS IDÊNTICAS

Considere um sistema de duas partículas, 1 e 2, não interagentes. As partículas estão confinadas em um poço de potencial infinito 1D de largura a , de modo que $V(x) = 0$ para $0 < x < a$, e $V(x) = \infty$ fora deste intervalo.

- (a) (20%) Considere, inicialmente, que as partículas são distintas e sem spin, com massas $m_2 = 2m_1$. Determine a energia e a função de onda do estado fundamental e do primeiro estado excitado do sistema.
- (b) (30%) Suponha, agora, que as partículas são bósons idênticos e sem spin, com massas $m_1 = m_2 = m$. Determine a energia e a função de onda do estado fundamental e do primeiro estado excitado do sistema.
- (c) (20%) Considere que as partículas são férmions idênticos, com massas $m_1 = m_2 = m$ e cada uma com spin $1/2$. Determine a energia e a função de onda do estado fundamental do sistema.
- (d) (30%) Na situação do item (c), determine a energia e a função de onda do primeiro estado excitado do sistema. Encontre a degenerescência desse estado.