



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado
Primeiro semestre de 2025

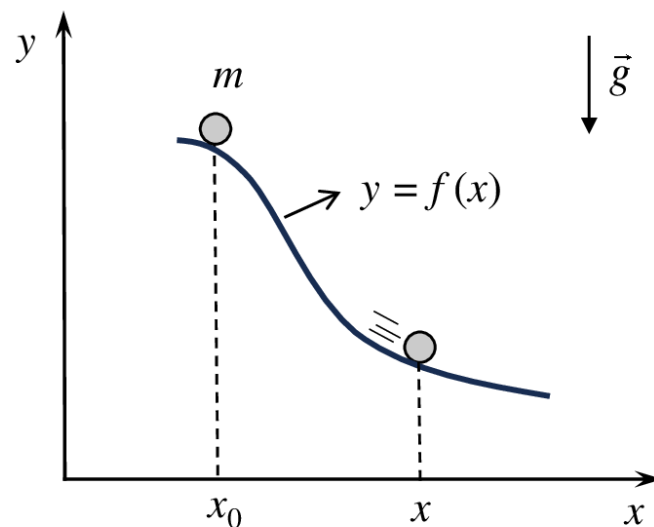
Mecânica Clássica

13/03/2025 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1: MECÂNICA LAGRANGIANA

A figura abaixo mostra uma partícula de massa m que desce uma rampa cuja forma do perfil é dada por $y = f(x)$. A aceleração da gravidade no local é $\vec{g} = -g\hat{y}$, onde \hat{y} é o vetor unitário ao longo do eixo y . Sabe-se que a partícula é abandonada do repouso em $x = x_0$ e que posteriormente passa num ponto arbitrário x . Desprezam-se quaisquer efeitos de atrito ou resistência do ar.



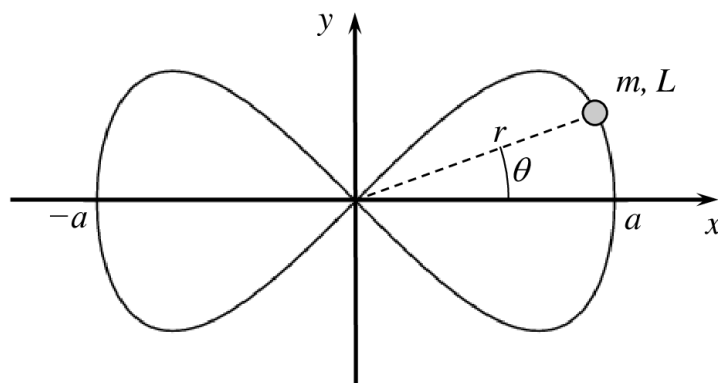
- (a) (20%) Utilizando o formalismo dos multiplicadores de Lagrange, obtenha as equações de movimento para x e y .
 - (b) (30%) Obtenha a equação de movimento para x em termos de g , $f(x)$ e de derivadas espaciais de $f(x)$.
 - (c) (40%) Usando o resultado dos itens (a) e (b) e a conservação da energia mecânica, encontre o multiplicador de Lagrange λ , escrevendo-o em termos de $f(x)$, de derivadas espaciais de $f(x)$ e das constantes m , g e $f(x_0)$.
 - (d) (10%) Encontre as componentes horizontal e vertical da força de vínculo entre a partícula e a rampa.
-

QUESTÃO 2: FORÇA CENTRAL

A figura abaixo ilustra uma partícula de massa m e momento angular L que se move numa órbita que tem a forma de uma “lemniscata”, descrita pela equação

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta,$$

onde (r, θ) denotam coordenadas polares e $a > 0$ é uma constante. Sabe-se que a partícula está sob a influência de uma força central $F(r)$. Considere que a energia potencial gravitacional do sistema $U(r)$ é nula quando $r \rightarrow \infty$. Sob estas circunstâncias, calcule:



(a) (30%) A magnitude da força central $F = F(r)$. **Dado:**

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{1}{u^2} F\left(\frac{1}{u}\right), \quad \text{onde} \quad u = \frac{1}{r}.$$

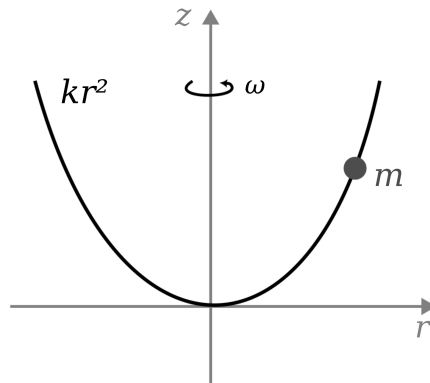
(b) (10%) O potencial efetivo $V_{ef}(r)$.

(c) (30%) O período T da órbita.

(d) (30%) A energia total E da partícula, usando a equação da lemniscata.

QUESTÃO 3: EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE HAMILTON

Considere uma pequena partícula (conta) de massa m que pode deslizar sem atrito ao longo de um fio rígido. O formato do fio é descrito pela parábola $z = kr^2$, onde k é uma constante positiva, r é a distância radial ao eixo de rotação, e z é a altura em relação ao plano horizontal. O fio gira com frequência angular constante ω em torno do eixo z . A aceleração gravitacional g atua no sentido $-\hat{z}$.



- (a) (25%) Determine a lagrangiana $L(r, \dot{r})$ do sistema.
 - (b) (25%) Usando uma transformação de Legendre, obtenha a hamiltoniana $H(r, p)$, onde p é o momento conjugado associado à coordenada r .
 - (c) (25%) A partir das equações de Hamilton, obtenha as equações de movimento para r e p . Não é necessário resolver as equações para obter $r(t)$ e $p(t)$.
 - (d) (25%) Encontre as condições para o equilíbrio estático da partícula. Analise como a posição de equilíbrio depende da frequência angular ω .
-

QUESTÃO 4: TEORIA DE HAMILTON-JACOBI

Um oscilador harmônico unidimensional possui hamiltoniano dado por:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad (1)$$

onde p é o momento conjugado, q é a coordenada generalizada, m é a massa da partícula, e ω é a frequência angular do oscilador.

Sabendo que a função principal de Hamilton S pode ser escrita na forma $S(q, t) = W(q) - Et$, onde E é a energia total do sistema e W é a função característica de Hamilton,

(a) (20%) escreva a equação de Hamilton-Jacobi em termos da função $W(q)$ para o oscilador harmônico.

(b) (40%) Obtenha a solução geral para a função $W(q)$ do oscilador harmônico. Deixe sua resposta em termos das constantes m , ω e E . Dica: utilize a substituição de variáveis $q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin \theta$.

(c) (40%) Mostre que a solução do oscilador pode ser escrita como

$$q(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad (2)$$

onde A e ϕ são constantes.

Dados:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\frac{d}{dx} (\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
