



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado
Primeiro semestre de 2025

Mecânica Estatística

11/03/2025 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1: TERMODINÂMICA

Considere uma máquina térmica que opera em um ciclo reversível usando 1 mol de gás ideal monoatômico como substância de trabalho. O ciclo consiste das seguintes etapas:

- $A \rightarrow B$: expansão a pressão constante.
- $B \rightarrow C$: expansão adiabática.
- $C \rightarrow D$: compressão a pressão constante.
- $D \rightarrow A$: compressão adiabática.

Em cada ponto do ciclo acima, a pressão e o volume são:

$$A : (p, V); \quad B : (p, 2V); \quad C : (p/32, V_C), \quad D : (p/32, V_D)$$

- (a) (20%) Encontre V_C e V_D em termos de V . Esboce o diagrama $P - V$ desse ciclo.
 - (b) (10%) Expresse T_A , T_B , T_C e T_D em termos de p , V e da constante universal dos gases ideais R .
 - (c) (30%) Calcule a eficiência dessa máquina térmica.
 - (d) (40%) Calcule a variação de entropia em termos de R em cada etapa do ciclo reversível acima e esboce o diagrama $S - T$ desse ciclo.
-

QUESTÃO 2: ENSEMBLE MICROCANÔNICO

Considere um sistema de N partículas não interagentes de spin $1/2$ sujeito a um campo magnético externo H , uniforme e constante. O hamiltoniano do sistema é dado por

$$\mathcal{H} = -\mu_0 H \sum_{j=1}^N \sigma_j,$$

onde $\sigma_j = \pm 1$ e μ_0 é o módulo do momento magnético projetado ao longo da direção do campo aplicado.

- (a) (10%) Seja N_1 e N_2 o número de partículas com spin para cima e para baixo, respectivamente. Usando a expressão do hamiltoniano \mathcal{H} , escreva N_1 e N_2 em termos de μ_0 , N , H e da energia E do sistema.
- (b) (20%) Obtenha o número de microestados do sistema em termos de μ_0 , N , E e H .
- (c) (20%) Calcule a entropia por partícula, $s = S/N$, no limite termodinâmico. Deixe sua resposta em termos da energia por partícula ($u = E/N$), μ_0 , H e da constante de Boltzmann k_B .
- (d) (30%) Obtenha a temperatura do sistema e mostre que

$$u = -\mu_0 H \tanh\left(\frac{\mu_0 H}{k_B T}\right).$$

- (e) (20%) Encontre a magnetização por partícula $m = M/N$ em termos de μ_0 , H , k_B e T . Dica:

$$m = \frac{\mu_0 N_1 - \mu_0 N_2}{N}.$$

Dados:

$$\ln N! \approx N \ln N - N, \text{ para } N \gg 1$$

QUESTÃO 3: ENSEMBLE CANÔNICO

Um recipiente de volume V contém N moléculas de um gás ideal, mantido a uma temperatura T e pressão P . A energia da k -ésima molécula pode ser expressa como:

$$H_k(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \epsilon_k, \quad (1)$$

onde ϵ_k denota os níveis de energia correspondentes aos estados internos da k -ésima molécula do gás. Considere $\beta = 1/k_B T$, onde k_B é a constante de Boltzmann.

- (a) (30%) Obtenha a função de partição canônica Z_1 para uma única molécula do gás. Escreva seu resultado em termos de $z_0 = \sum_k e^{-\beta \epsilon_k}$.
- (b) (20%) Calcule a energia livre de Helmholtz $F = -k_B T \ln Z$ no limite termodinâmico, onde $Z = Z_1^N / N!$ é a função de partição canônica total do gás.
- (c) (20%) Obtenha a entropia do sistema.

Agora, considere um segundo recipiente, com volume V' , contendo também N moléculas do mesmo gás a mesma temperatura T e pressão P' . Inicialmente, os recipientes não estão conectados.

- (d) (30%) Os recipientes são então conectados, permitindo a mistura dos gases sem a realização de trabalho. Calcule explicitamente a variação de entropia do sistema composto. Verifique se sua resposta faz sentido considerando o caso em que $V = V'$ (i.e., $P = P'$).
-

Dados:

$$Z = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \int e^{-\beta H(p)} d^3 p$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N, \text{ para } N \gg 1$$

QUESTÃO 4: GÁS DE FÓTONS

Em um gás de fótons, o número de partículas N não é conservado, ajustando-se à temperatura do sistema. Como consequência, o potencial químico do gás de fótons é nulo. O valor termodinâmico de N é aquele que minimiza a energia livre de Helmholtz a temperatura T e volume V fixos. A energia de um fóton é

$$\epsilon = c\hbar k,$$

onde k é o módulo do seu vetor de onda, c é a velocidade da luz e \hbar é a constante reduzida de Planck.

(a) (30%) Sabendo que a densidade de estados do gás de fótons é dada por

$$g(\epsilon)d\epsilon = \frac{2V}{(2\pi)^3}d^3k,$$

mostre que a densidade de fótons $n = N/V$ do gás pode ser escrita como $n = (k_B T / c\hbar)^3 \alpha$, onde α é uma integral definida e adimensional.

(b) (50%) Encontre as expressões para a densidade de energia $u = E/V$ e a capacidade térmica por unidade de volume c_v . Deixe suas respostas em termos de uma integral definida e adimensional.

(c) (20%) Obtenha a relação entre a pressão de radiação P do gás de fótons e a densidade de energia u . Dica: use o método de integração por partes.

Dados:

Para bósons ($\eta = 1$) ou férmions ($\eta = -1$):

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{(\beta\epsilon - \mu)} - \eta},$$

$$\frac{PV}{K_B T} = -\eta \int d\epsilon g(\epsilon) \ln(1 - \eta e^{-\beta\epsilon});$$