CÁLCULO L1 — NOTAS DA DÉCIMA TERCEIRA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

RESUMO. Nesta aula, apresentaremos a Regra de L'Hôpital, que será utilizada para solucionar indeterminações de limites de qualquer tipo.

1. O que é um limite indeterminado?

Sejam $f(X)$ e $g(X)$ funções tais que

$$\lim_{X\to a} f(X) = F \quad \text{e} \quad \lim_{X\to a} g(X) = G$$

Não excluímos a possibilidade de que F ou G seja ∞. Em geral, o limite de alguma operação envolvendo $f(X)$ e $g(X)$ fica completamente determinado a partir de F e G. Porém, para alguns valores de F e G, isto não ocorre. Nestes poucos casos, o valor do limite depende das funções envolvidas. Quando isto acontece, diremos que este limite é **da forma indeterminada** ou simplesmente é **indeterminado**. Qualquer técnica que permite o cálculo de um limite desta forma fica conhecida como um método para resolver a indeterminação. Nesta aula, discutiremos tais métodos.

Por exemplo, considere o cálculo do seguinte limite

$$\lim_{X\to a} \frac{f(X)}{g(X)}$$

Este limite será igual a $\frac{F}{G}$ quando F e G são finitos e $G \neq 0$. Se $G = 0$ e F é finito, com $F \neq 0$, então o valor deste limite é ∞. No caso em que $F = G = 0$, temos um limite do tipo $\frac{0}{0}$, que é indeterminado. O valor deste limite depende das funções envolvidas. Agora, podemos assumir que F ou G é ∞. Se F é finito, então o limite é 0. Se G é finito, então o limite é ∞. No caso em que $F = G = \infty$, temos um limite do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que é indeterminado. Nesta aula, apresentamos a Regra de L'Hôpital que resolve indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

No caso do limite

$$\lim_{X\to a} f(X)g(X)$$

temos uma indeterminação apenas quando $\{F, G\} = \{0, \infty\}$. Neste caso, diremos que o limite é do tipo $0 \times \infty$. Isto ocorre porque

- Quando F e G são finitos, este limite é igual a FG.
- Quando F ou G é ∞, digamos F, este limite é ∞, desde que $G \neq 0$.

Outros limites indeterminados serão considerados ao longo da aula e seus tipos não serão listados no momento.

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

2. Indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$

Para funções $f(X)$ e $g(X)$, diremos que o limite

$$\lim_{X \to a} \frac{f(X)}{g(X)} \tag{1}$$

é do **tipo** $\frac{0}{0}$ quando

$$\lim_{X \to a} f(X) = \lim_{X \to a} g(X) = 0 \tag{2}$$

Limites deste tipo são indeterminados porque, dependendo das funções $f(X)$ e $g(X)$ envolvidas, podem resultar em qualquer valor. Já consideramos limites deste tipo anteriormente, para os quais conseguiamos resolver a indeterminação, pois as funções consideradas eram polinomiais. Para este caso específico, a condição (2) se traduz como a sendo raiz comum aos polinômios $f(X)$ e $g(X)$. Portanto, estes são divisíveis por $X - a$. Em geral[1], fatorando-se $X - a$ no numerador e denominador, e cancelando-se este fator, resolve-se a indeterminação. Nesta seção, desenvolveremos uma técnica que pode ser empregada para quaisquer funções $f(X)$ e $g(X)$ desde que satisfaçam algumas condições de diferenciabilidade. Para estabelecer esta técnica necessitados do Teorema do Valor Médio Generalizado (TVMG) que demonstramos a seguir.

Teorema 1. *Sejam $f(X)$ e $g(X)$ funções contínuas em um intervalo $[a, b]$. Se $f'(X)$ e $g'(X)$ existem, para todo X em (a, b), e $g'(X) \neq 0$, para todo X em (a, b), então existe c em (a, b) tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{3}$$

Observe que o TVM é uma conseqüência do TVMG quando, no último, tomamos $g(X) = X$. Para estabelecer o TVMG, considere a seguinte função

$$r(X) = [f(X) - f(a)][g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)][g(X) - g(a)]$$

Note que

- $r(X)$ é contínua em $[a, b]$ porque $f(X)$ e $g(X)$ são contínuas neste intervalo.
- $r(X)$ possui derivada no intervalo (a, b) porque $f'(X)$ e $g'(X)$ existem neste intervalo e
$$r'(X) = f'(X)[g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)]g'(X)$$
- $r(a) = r(b) = 0$

Portanto, $r(X)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Logo existe c em (a, b) tal que $r'(c) = 0$, ou seja,

$$r'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)]g'(c) = 0$$

que pode ser reescrita como (3), já que $g'(C) \neq 0$ e $g(b) - g(a) \neq 0$. (Caso $g(b) - g(a) = 0$, isto é, $g(b) = g(a)$, existe, pelo Teorema de Rolle, um d em (a, b) tal que $g'(d) = 0$, o que é contrário as hipóteses. Conseqüentemente $g(b) - g(a) \neq 0$.)

De posse deste resultado podemos facilmente estabelecer a primeira versão da Regra de L'Hôpital. Faremos as outras ao longo desta aula.

[1] Caso a indeterminação não seja resolvida, temos que a é uma raiz do numerador e do denominador com multiplicidade de pelo menos 2. Repetindo-se este procedimento eventualmente a indeterminação será resolvida porque, após cada etapa, os graus dos numerador e denominador caem de 1.

Regra 2. *Para um número real a, sejam $f(X)$ e $g(X)$ funções contínuas em algum intervalo aberto J que contém a. Assuma que, para todo X em J, com $X \neq a$, $f'(X)$ e $g'(X)$ existam, e $g'(X) \neq 0$. Se $\lim_{X \to a} f(X) = \lim_{X \to a} g(X) = 0$ e*

$$\lim_{X \to a} \frac{f'(X)}{g'(X)}$$

existe, então

$$\lim_{X \to a} \frac{f(X)}{g(X)} = \lim_{X \to a} \frac{f'(X)}{g'(X)}$$

Escolha X em J, com $X \neq a$. Seja I o intervalo fechado tendo a e X como extremos. Pelo TVMG aplicado ao intervalo I, existe c entre a e X tal que

$$\frac{f(X) - f(a)}{g(X) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{4}$$

Como $f(X)$ é contínua em J, temos que

$$f(a) = \lim_{X \to a} f(X) = 0$$

De maineira análoga, estabelecemos que $g(b) = 0$. Conseqüentemente, ao substituirmos estes valores em (4), temos que

$$\frac{f(X)}{g(X)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{5}$$

Como c, que depende de X, está entre a e X, temos que $c \to a$ quando $X \to a$. De (5), obtemos que

$$\lim_{X \to a} \frac{f(X)}{g(X)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

e a regra segue.

Esta regra permite calcular todos os limites indeterminados que foram considerados na segunda aula — todos eram do tipo $\frac{0}{0}$. Faremos um exemplo:

Exemplo 3. *Calcule o seguinte limite*

$$L = \lim_{X \to -2} \frac{X^2 + 2X}{X^2 - 4}$$

Note que este limite é do tipo $\frac{0}{0}$. Sejam $f(X) = X^2 + 2X$ e $g(X) = X^2 - 4$. Logo $f'(X) = 2X + 2$ e $g'(X) = 2X$. Aplicando a Regra de L'Hôpital, temos que

$$\lim_{X \to -2} \frac{X^2 + 2X}{X^2 - 4} = \lim_{X \to -2} \frac{f(X)}{g(X)} = \lim_{X \to -2} \frac{f'(X)}{g'(X)} = \lim_{X \to -2} \frac{2X + 2}{2X}$$

O limite à direita desta identidade é fácil de ser obtido:

$$\lim_{X \to -2} \frac{2X + 2}{2X} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Logo $L = \frac{1}{2}$. Aplicando esta regra, não necessitamos decompor o fator $X+2$ do numerador e do denominador que depois seria cancelado, assim, eliminando a indeterminação.

Calcularemos apenas mais um limite utilizando esta regra. O próximo limite é complexo o suficiente, servindo para ilustrar o poder desta regra em sua plenitude.

Exemplo 4. *Calcule o seguinte limite*

$$L = \lim_{X\to 0} \frac{e^{6X} - 1 - 6X}{1 - \cos(4X)}$$

Note que este limite é do tipo $\frac{0}{0}$. Estamos em condições de aplicar a Regra de L'Hôpital que acabamos de enunciar para $f(X) = e^{6X} - 1 - 6X$ e $g(X) = 1 - \cos(4X)$. Como $f'(X) = 6e^{6X} - 6$ e $g'(X) = 4\,\text{sen}(4X)$, temos que, pela Regra de L'Hôpital,

$$L = \lim_{X\to 0} \frac{f(X)}{g(X)} = \lim_{X\to 0} \frac{f'(X)}{g'(X)} = \lim_{X\to 0} \frac{6e^{6X} - 6}{4\,\text{sen}(4X)}$$

Mais uma vez, este limite é do tipo $\frac{0}{0}$ e necessitamos aplicar novamente a Regra de L'Hôpital. Ao substituirmos o numerador por sua derivada e realizar o mesmo para o denominador, pela Regra de L'Hôpital, temos que

$$L = \lim_{X\to 0} \frac{36e^{6X}}{16\cos(4X)} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

Necessitamos aplicar duas vezes a Regra de L'Hôpital para o cálculo deste limite. A sua aplicação uma única vez não foi suficiente para eliminar a indeterminação.

Exercício 5. *Calcule os seguintes limites:*

(i)
$$\lim_{X\to -3} \frac{X^3 + 3X^2}{2X^2 + 5X - 3}$$

(ii)
$$\lim_{X\to -1} \frac{X^4 + 5X^3 + 9X^2 + 7X + 2}{X^4 + 2X^3 - 2X - 1}$$

(iii)
$$\lim_{X\to 0} \frac{\text{tg}(5X)}{\text{sen}(7X)}$$

(iv)
$$\lim_{X\to 2} \frac{X^2 - 4}{e^{3X-5} - e^{X-1}}$$

(v)
$$\lim_{X\to 0} \frac{1 - \cos X}{X^2}$$

(vi)
$$\lim_{X\to \pi} \frac{\text{sen}^2(3X)}{1 + \cos X}$$

(vii)
$$\lim_{X\to 0^-} \frac{e^{6X} - 1 - 6X - 18X^2 - 36X^3}{6\,\text{sen}\,X - 6X + X^3}$$

Exercício 6. *Enuncie a Regra de L'Hôpital para o cálculo de limites laterais do tipo* $\frac{0}{0}$

Faremos mais um exemplo. Resolveremos uma indeterminação do tipo $+\infty - \infty$ através da redução a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ para a qual podemos aplicar a Regra de L'Hôpital.

Exemplo 7. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen} X} - \frac{1}{X}$$

Note que este limite é do tipo $+\infty - \infty$. Logo indeterminado. Ao subtrairmos as duas frações, temos que

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen} X} - \frac{1}{X} = \lim_{X\to 0^+} \frac{X - \operatorname{sen} X}{X \operatorname{sen} X}$$

O limite à direita é do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital a este limite, chegamos a

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{X - \operatorname{sen} X}{X \operatorname{sen} X} = \lim_{X\to 0^+} \frac{1 - \cos X}{\operatorname{sen} X + X \cos X}$$

Mais uma vez, o limite à direita é do tipo $\frac{0}{0}$, logo indeterminado. Aplicando a Regra de L'Hôpital a este limite, obtemos que

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{1 - \cos X}{\operatorname{sen} X + X \cos X} = \lim_{X\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} X}{2\cos X - X \operatorname{sen} X} = \frac{0}{2} = 0$$

Portanto, o valor do limite proposto é 0.

Finalizamos esta seção, estabelecendo a Regra de L'Hôpital para o cálculo de limites do tipo $\frac{0}{0}$ quando a variável tende a ∞, digamos $+\infty$, já que, para $-\infty$, a abordagem é análoga.

Regra 8. *Sejam $f(X)$ e $g(X)$ funções diferenciáveis no intervalo aberto $(M, +\infty)$, para algum número real M. Assuma que $g'(X) \neq 0$, para todo X no intervalo $(M, +\infty)$. Se $\lim_{X\to+\infty} f(X) = \lim_{X\to+\infty} g(X) = 0$ e*

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{f'(X)}{g'(X)}$$

existe, então

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{f(X)}{g(X)} = \lim_{X\to+\infty} \frac{f'(X)}{g'(X)}$$

Observe que

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{f(X)}{g(X)} = \lim_{X\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{X}\right)}{g\left(\frac{1}{X}\right)}$$

Aplicando a Regra 2 ao limite da direita[2], obtemos que

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{f(X)}{g(X)} = \lim_{X\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{X}\right)}{g\left(\frac{1}{X}\right)} = \lim_{X\to 0^+} \frac{\left(-\frac{1}{X^2}\right) f'\left(\frac{1}{X}\right)}{\left(-\frac{1}{X^2}\right) g'\left(\frac{1}{X}\right)}$$

Simplificando o fator $-\frac{1}{X^2}$ que multiplica o numerador e o denominador, obtemos que

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{f(X)}{g(X)} = \lim_{X\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{X}\right)}{g'\left(\frac{1}{X}\right)}$$

O resultado segue porque

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{X}\right)}{g'\left(\frac{1}{X}\right)} = \lim_{X\to+\infty} \frac{f'(X)}{g'(X)}$$

[2]Para aplicar a Regra de L'Hôpital, necessitamos extender as funções $f\left(\frac{1}{X}\right)$ e $g\left(\frac{1}{X}\right)$ para $X = 0$ de forma que fiquem contínuas — basta tomarmos estes valores iguais a 0.

3. Indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Na próxima regra iremos permitir que a assuma o valor de $+\infty$.

Regra 9. *Sejam $f(X)$ e $g(X)$ funções diferenciáveis no intervalo aberto (M, a), para algum número real M tal que $M < a$. Assuma que $g'(X) \neq 0$, para todo X no intervalo (M, a). Se $\lim_{X\to a^-} f(X) = \lim_{X\to a^-} g(X) = \infty$ e*

$$\lim_{X\to a^-} \frac{f'(X)}{g'(X)}$$

existe, então

$$\lim_{X\to a^-} \frac{f(X)}{g(X)} = \lim_{X\to a^-} \frac{f'(X)}{g'(X)} \tag{6}$$

Não faremos a demonstração desta regra porque foge do espírito deste curso. Contudo, mostraremos que, caso os dois limites que aprarecem na igualdade (6) existam, estes têm de ser iguais. Por hipótese, assumimos apenas que o que fica à direita existe. Suponha que

$$L = \lim_{X\to a^-} \frac{f(X)}{g(X)} \quad \text{e} \quad L' = \lim_{X\to a^-} \frac{f'(X)}{g'(X)}$$

Note que

$$L = \lim_{X\to a^-} \frac{f(X)}{g(X)} = \lim_{X\to a^-} \frac{\frac{1}{g(X)}}{\frac{1}{f(X)}}$$

Note que o limite à direita é do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital para o cálculo deste limite[3], obtemos que

$$L = \lim_{X\to a^-} \frac{\frac{1}{g(X)}}{\frac{1}{f(X)}} = \lim_{X\to a^-} \frac{\frac{-g'(X)}{g(X)^2}}{\frac{-f'(X)}{f(X)^2}}$$

que pode ser reescrita como

$$L = \lim_{X\to a^-} \frac{g'(X)f(X)^2}{f'(X)g(X)^2} = \lim_{X\to a^-} \frac{g'(X)}{f'(X)} \left(\lim_{X\to a^-} \frac{f(X)}{g(X)} \right)^2 = \frac{L^2}{L'}$$

Portanto, $L = L'$. (Temos problemas neste argumento quando L for 0 ou ∞. Isto não importa, já que não estamos estabelecento formamente esta regra, como deixamos claro antes. A demonstração formal é sofisticada e envolve a construção de uma seqüência que se aproxima de a com determinadas propriedades.)

Antes de aplicar esta regra, apresentamos a sua versão para o cálculo do limite lateral pela direita, sem nenhuma justificativa, por ser semelhante. Na próxima regra, podemos tomar a para ser $-\infty$.

Regra 10. *Sejam $f(X)$ e $g(X)$ funções diferenciáveis no intervalo aberto (a, M), para algum número real M tal que $M > a$. Assuma que $g'(X) \neq 0$, para todo X no intervalo (a, M). Se $\lim_{X\to a^+} f(X) = \lim_{X\to a^+} g(X) = \infty$ e*

$$\lim_{X\to a^+} \frac{f'(X)}{g'(X)}$$

[3] No caso em que $a \neq +\infty$, para aplicar esta regra, necessitamos estender as funções $\frac{1}{f(X)}$ e $\frac{1}{g(X)}$ para $X = a$ de forma que fiquem contínuas — fazemos isto tomando os seus valores em $X = a$ como sendo 0.

existe, então

$$\lim_{X\to a^+}\frac{f(X)}{g(X)}=\lim_{X\to a^+}\frac{f'(X)}{g'(X)}$$

Podemos aplicar a Regra de L'Hôpital para analisar o comportamento de funções racionais no infinito — abordamos este tópico na aula passada. Vejamos um exemplo:

Exemplo 11. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim_{X\to-\infty}\frac{X^2-9}{3X^2+2X+1}$$

Como este limite é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, podemos utilizar a Regra de L'Hôpital para o seu cálculo. Por esta regra, temos que

$$\lim_{X\to-\infty}\frac{X^2-9}{3X^2+2X+1}=\lim_{X\to-\infty}\frac{2X}{6X+2}$$

Como o limite à direita desta identidade é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, necessitamos aplicar a Regra de L'Hôpital mais uma vez para resolver a indeterminação. Portanto,

$$\lim_{X\to-\infty}\frac{X^2-9}{3X^2+2X+1}=\lim_{X\to-\infty}\frac{2X}{6X+2}=\lim_{X\to-\infty}\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Exemplo 12. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{X^3-5X^2+4X+1}{e^X}$$

Note que este limite é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. É um limite que pode ser calculado através da Regra de L'Hôpital. Aplicando esta regra, temos que

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{X^3-5X^2+4X+1}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{3X^2-10X+4}{e^X}$$

O limite que está à direita desta igualdade continua sendo do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando mais uma vez a Regra de L'Hôpital, chegamos à

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{X^3-5X^2+4X+1}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{3X^2-10X+4}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{6X-10}{e^X}$$

À direita da igualdade, ainda temos um limite do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pela Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{X^3-5X^2+4X+1}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{3X^2-10X+4}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{6X-10}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{6}{e^X}$$

O limite à direita desta identidade é igual a 0. Portanto, o limite proposto vale 0.

De maneira similar, podemos mostrar que o quociente de uma função polinomial pela exponencial na base e tende a zero quando a variável tende a $+\infty$. Isto é, a exponencial na base e cresce muito mais rápidamente que qualquer função polinomial. Na verdade, isto também ocorre quando tomamos a exponencial em qualquer base a satisfazendo $a>1$. Mais precisamente, caso $p(X)$ seja um polinômio e a um número real tal que $a>1$, temos que

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{p(X)}{a^X}=0$$

(Para obter esta igualdade, aplique a Regra de L'Hôpital tantas vezes quanto seja o grau de $p(X)$.)

Exercício 13. *Calcule os seguintes limites:*

(i)
$$\lim_{X\to-\infty} \frac{X^3-5X}{3X^2+7X+4}$$

(ii)
$$\lim_{X\to+\infty} \frac{2^X+X^3}{3^X+X^2}$$

(iii)
$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{\sqrt{X}}$$

(iv)
$$\lim_{X\to-\infty} \frac{e^{-X}}{1-X^2}$$

(v)
$$\lim_{X\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{tg}(3X)}{\operatorname{tg}(5X)}$$

(vi)
$$\lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} X)}{\operatorname{cotg} X}$$

(vii)
$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X}-\ln X$$

4. Indeterminações do tipo $0\times\infty$

Suponha que $f(X)$ e $g(X)$ sejam funções satisfazendo

$$\lim_{X\to a} f(X)=0 \quad \text{e} \quad \lim_{X\to a} g(X)=\infty \tag{7}$$

Qual o valor do limite do produto destas funções quando a variavel tende a a? Isto é, como calcular

$$L=\lim_{X\to a} f(X)g(X)$$

quando existir? Diremos que L é do tipo $0\times\infty$. Limites deste tipo são ditos indeterminados porque o seu valor depende das funções envolvidas. Podemos transformar este limite em um limite do tipo $\frac{0}{0}$ ou do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ para os quais podemos utilizar a Regra de L'Hôpital. Para transformar em um limite do tipo $\frac{0}{0}$ utilizamos a identidade

$$a(X)b(X)=\frac{a(X)}{\frac{1}{b(X)}} \tag{8}$$

Isto é, passamos $b(X)$ para o denominador dividindo. Para transformar em um limite do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ consideramos a igualdade

$$a(X)b(X)=\frac{b(X)}{\frac{1}{a(X)}} \tag{9}$$

Qual das duas identidades devemos adotar ao utilizar a Regra de L'Hôpital para o cálculo deste limite? Depende da situação, que terá de ser considerada cuidadosamente.

Exemplo 14. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim_{X\to 0^+} X\ln X$$

Note que este limite é do tipo $0\times\infty$ porque $\lim_{X\to 0^+}\ln X=-\infty$. Temos duas possibilidades de obter este limite utilizando a Regra de L'Hôpital. Podemos transformar em um limite do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou do tipo $\frac{0}{0}$

Primeiro, transformaremos em um limite do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Note que

$$\lim_{X\to 0^+} X\ln X=\lim_{X\to 0^+}\frac{\ln X}{\frac{1}{X}}$$

Aplicando a Regra de L'Hôpital ao limite à direita, que é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, temos que

$$\lim_{X\to 0^+}\frac{\ln X}{\frac{1}{X}}=\lim_{X\to 0^+}\frac{\frac{1}{X}}{-\frac{1}{X^2}}$$

Portanto,

$$\lim_{X\to 0^+} X\ln X=\lim_{X\to 0^+}\frac{\ln X}{\frac{1}{X}}=\lim_{X\to 0^+}\frac{\frac{1}{X}}{-\frac{1}{X^2}}=\lim_{X\to 0^+}-\frac{X^2}{X}=\lim_{X\to 0^+}-X=0$$

Com esta abordagem foi fácil calcular este limite, já que aplicamos a Regra de L'Hôpital uma única vez.

Agora, transformaremos em um limite do tipo $\frac{0}{0}$. Observe que

$$\lim_{X\to 0^+} X\ln X=\lim_{X\to 0^+}\frac{X}{\frac{1}{\ln X}}$$

Aplicando a Regra de L'Hôpital ao limite à direita, que é do tipo $\frac{0}{0}$, obtemos que

$$\lim_{X\to 0^+} X\ln X=\lim_{X\to 0^+}\frac{X}{\frac{1}{\ln X}}=\lim_{X\to 0^+}\frac{1}{-\frac{1}{X\ln^2 X}}=\lim_{X\to 0^+}-X\ln^2 X$$

Logo o limite que resultante ficou muito mais complexo do que o original. Conseqüentemente esta escolha deve ser evitada. Caso, originalmente, a tivéssemos feito, deveríamos abortá-la.

Exercício 15. *Calcule os seguintes limites:*

(i)

$$\lim_{X\to+\infty} X\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{X}\right)$$

(ii)

$$\lim_{X\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{6X}{\pi}-3\right)\mathrm{tg}\,X$$

(iii)

$$\lim_{X\to 3^-}\ln(5X-14)\ln(6-2X)$$

5. Indeterminações do tipo 1^∞ ou 0^0 ou ∞^0

Para funções $f(X)$ e $g(X)$, temos, por definição, que

$$f(X)^{g(X)} = e^{g(X)\ln f(X)}$$

Portanto, como a função exponencial é contínua, obtemos que

$$\lim_{X\to a} f(X)^{g(X)} = e^{\lim_{X\to a} g(X)\ln f(X)} \tag{10}$$

Logo, por (10), reduzimos o cálculo do limite $\lim_{X\to a} f(X)^{g(X)}$ ao de encontrar o limite

$$\lim_{X\to a} g(X)\ln f(X) \tag{11}$$

que chamaremos de L. Quando L tiver uma forma indeterminada, isto é, o seu valor dependerá das funções envolvidas, diremos que $\lim_{X\to a} f(X)^{g(X)}$ também assume uma forma indeterminada. Quando isto ocorre? Caso L seja do tipo $0\times\infty$. Isto irá acontecer nos seguintes casos:

- $\lim_{X\to a} g(X) = 0$ e $\lim_{X\to a} f(X) = 0$. Neste caso, diremos que $\lim_{X\to a} f(X)^{g(X)}$ é do tipo 0^0.
- $\lim_{X\to a} g(X) = 0$ e $\lim_{X\to a} f(X) = +\infty$. Neste caso, diremos que $\lim_{X\to a} f(X)^{g(X)}$ é do tipo ∞^0.
- $\lim_{X\to a} g(X) = \infty$ e $\lim_{X\to a} f(X) = 1$. Neste caso, diremos que $\lim_{X\to a} f(X)^{g(X)}$ é do tipo 1^∞.

Reduzimos qualquer limite de qualquer um destes tipos a um que é uma indeterminação do tipo $0\times\infty$ através da identidade (10). Calcularemos apenas um limite nesta forma que é um clássico.

Estabeleceremos a seguinte identidade, que é um dos limites fundamentais do cálculo,

$$\lim_{X\to+\infty}\left(1+\frac{1}{X}\right)^X = e \tag{12}$$

juntamente com

$$\lim_{X\to 0}\frac{\operatorname{sen} X}{X} = 1 \tag{13}$$

que foi utilizado para o cálculo da derivada do seno e conseqüentemente de todas as funções trigonométricas.

Note que o limite encontrado na identidade (12) é do tipo 1^∞. Por (10),

$$\lim_{X\to+\infty}\left(1+\frac{1}{X}\right)^X = e^{\lim_{X\to+\infty} X\ln\left(1+\frac{1}{X}\right)} \tag{14}$$

Portanto, reduzimos o cálculo deste limite ao seguinte

$$L = \lim_{X\to+\infty} X\ln\left(1+\frac{1}{X}\right) \tag{15}$$

Observe que L é do tipo $0\times\infty$. Transformamos este limite em um do tipo $\frac{0}{0}$ usando a identidade

$$X\ln\left(1+\frac{1}{X}\right) = \frac{1+\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}}$$

Logo

$$L = \lim_{X\to+\infty} X\ln\left(1+\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}}$$

Aplicando a Regra de L'Hôpital ao limite à direta desta identidade, obtemos que

$$L = \lim_{X\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{-\frac{1}{X^2}}{-\frac{1}{X^2}} = 1$$

Substituindo o valor de L em (14), temos que

$$\lim_{X\to+\infty} \left(1+\frac{1}{X}\right)^X = e^{\lim_{X\to+\infty} X\ln\left(1+\frac{1}{X}\right)} = e^1 = e$$

e obtemos (12).

6. Assíntotas inclinadas

Uma reta r é uma assíntota para o gráfico de uma função f quando, ao percorrermos r em uma determinado sentido, o gráfico de f vai ficando cada vez mais próximo de r. As assíntotas podem ser de três tipos: verticais, horizontais ou inclinadas. Já discutimos como determinar as assíntotas horizontais e verticais. Vamos discutir como obter as assíntotas inclinadas. Nos próximos dois parágrafos resumimos o que sabemos sobre as assíntotas verticais e horizontais.

Uma assíntota vertical tem equação $X = a$. Como o gráfico de f fica muito próximo desta reta quando a percorremos em algum sentido, temos que

$$\lim_{X\to a^-} f(X) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{X\to a^+} f(X) = \infty \tag{16}$$

Quando (16) é satisfeita para um número real a, vimos que $X = a$ é uma assíntota vertical para o gráfico de f.

Uma assíntota horizontal tem equação $Y = a$. Como o gráfico de f fica muito próximo desta reta quando a percorremos em algum sentido, temos que

$$\lim_{X\to-\infty} f(X) = a \quad \text{ou} \quad \lim_{X\to+\infty} f(X) = a \tag{17}$$

Quando (17) é satisfeita para um número real a, vimos que $Y = a$ é uma assíntota horizontal para o gráfico de f.

Agora, suponha que r seja uma assítota inclinada para o gráfico de f. Portanto, existem números reais m e b, com $m \neq 0$, tais que a equação de r é $Y = mX + b$. Ao percorrermos esta reta em um determinado sentido, fazemos as abscissas de seus pontos ficarem muito grandes ou pequenas, isto é, tendem a ∞, que pode ser $+\infty$ ou $-\infty$. Como o gráfico de f fica muito próximo de r, temos que $f(X)$ fica muito próximo de $mX + b$, quando $X \to \infty$. Em particular,

$$\lim_{X\to\infty} \frac{f(X)}{mX+b} = 1$$

Dividindo o numerador e o denominador por X, temos que

$$1 = \lim_{X\to\infty} \frac{f(X)}{mX+b} = \lim_{X\to\infty} \frac{\frac{f(X)}{X}}{m+\frac{b}{X}} = \frac{\lim_{X\to\infty} \frac{f(X)}{X}}{\lim_{X\to\infty} m+\frac{b}{X}} = \frac{\lim_{X\to\infty} \frac{f(X)}{X}}{m}$$

Portanto,

$$m = \lim_{X\to\infty} \frac{f(X)}{X}$$

Aplicando a Regra de L'Hôspital para o cálculo deste limite, chegamos à

$$m = \lim_{X\to\infty} f'(X)$$

Determinado o valor de m, passamos a calcular o valor de b. Como $f(X)$ fica muito próximo de $mX + b$, quando $X \to \infty$, concluímos que

$$0 = \lim_{X\to\infty} f(X) - (mX + b) = \lim_{X\to\infty} [f(X) - mX] - \lim_{X\to\infty} b = \lim_{X\to\infty} [f(X) - mX] - b$$

Conseqüentemente

$$b = \lim_{X\to\infty} f(X) - mX$$

Exemplo 16. *Determine a equação de todas as retas que são assíntotas ao gráfico da função dada por*

$$f(X) = \frac{X^3 + e^{-2X}}{X^2 + e^{-3X}}$$

Note que o gráfico desta função não possui assíntota vertical porque $f(X)$ é uma função contínua para todo X real. Passamos a analisar o comportamento desta função no infinito, de maneira quantitativa, ficando a formalização matemática com exercício para o leitor.

- Quando X tende a $+\infty$, $-2X$ e $-3X$ tendem para $-\infty$ e conseqüentemente e^{-2X} e e^{-3X} tendem a 0. Portanto, o numerador da expressão de $f(X)$ se aproxima de X^3 e o denominador de X^2 e daí $f(X)$ se aproxima de $\frac{X^3}{X^2} = X$. Logo $Y = X$ é uma assíntota inclinada para o gráfico de $f(X)$ quando X tende a $+\infty$.
- Quando X tende a $-\infty$, $-2X$ e $-3X$ tendem para $+\infty$. Como a exponencial na base e cresce muito mais rapidamente que qualque polinômio, e^{-2X} domina o munerador e e^{-3X} o denominador. Portanto, o limite de $f(X)$ quando X tende a $-\infty$ é o mesmo de $\frac{e^{-2X}}{e^{-3X}} = e^X$ e que vale 0. Logo $Y = 0$ é uma assíntota horizontal para o gráfico de $f(X)$ quando X tende a $-\infty$.

Fizemos a escolha desta função para que possuisse simultaneamente uma assíntota horizontal e outra inclinada.

7. Respostas dos exercícios

5. (i) $-\frac{9}{7}$ (ii) $-\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{5}{7}$ (iv) $\frac{2}{e}$ (v) $\frac{1}{2}$ (vi) 18 (vii) $+\infty$ **13.** (i) $-\infty$ (ii) 0 (iii) $+\infty$ (iv) $-\infty$ (v) $\frac{5}{3}$ (vi) 0 (vii) $+\infty$ **15.** (i) 5 (ii) $-\frac{6}{\pi}$ (iii) 0

Conteúdo da décima terceira aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos