CÁLCULO L1 — NOTAS DA DÉCIMA OITAVA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Resumo. Nesta aula, apresentaremos a noção de integral indefinidada. Também discutiremos a primeira técnica de integração: mudança de variável.

1. A integral indefinida

Uma função $F(X)$ é dita uma **primitiva** para uma função $f(X)$ quando a derivada de $F(X)$ é igual a $f(X)$. Isto é, quando

$$F'(X) = f(X)$$

Uma função $f(X)$ possui infinitas primitivas. Caso a função $G(X)$ seja uma outra primitiva para $f(X)$, por definição, temos que

$$F'(X) = G'(X) = f(X) \tag{1}$$

Conseqüentemente, a função diferença entre $G(X)$ e $F(X)$, cuja expressão é

$$d(X) = G(X) - F(X)$$

possui derivada identicamente nula, pois, por (1),

$$d'(X) = G'(X) - F'(X) = f(X) - f(X) = 0$$

Logo $d(X)$ é uma constante nos intervalos de definição de $f(X)$. Portanto, $d(X) = C$, com C denotando uma constante. Conseqüentemente

$$G(X) = F(X) + C$$

Isto é, quaisquer duas primitivas diferem de uma constante.

No parágrafo anterior, caso o domínio de definição de $f(X)$ seja a união disjunta de intervalos, o valor de C pode mudar de um intervalo para outro. Contudo, $d(X)$ é uma constante em cada um destes intervalos que decompõem o domínio de $f(X)$. Tendo em vista que aplicaremos a noção de primitiva apenas para o cálculo de integrais definidas em um intervalo fechado totalmente contido no domínio de definição de $f(X)$, assumir que estas primitivas diferem de uma constante não causa prejuízo a teoria.

A **integral indefinida**, que chamaremos também apenas de **integral**, de uma função $f(X)$ é igual a família de todas as suas primitivas. Isto é,

$$\int f(X)dX = F(X) + C$$

na qual $F(X)$ é qualquer primitiva para $f(X)$ ou seja $F'(X) = f(X)$. A partir desta aula discutiremos técnicas para encontrar integrais de várias funções consideradas ao longo deste curso. Para muitas, não será possível obter a expressão para a integral através de uma função elementar. Qual é o conjunto das funções elementares? É o menor conjunto de funções que:

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

- É fechado com relação as seguintes operações: soma, diferença, produto, quociente e composição.
- Contém as funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais, trigonométricas inversas e logaritmicas.

Por exemplo, $f(X) = e^{-X^2}$ é uma função elementar. Contudo, não possui uma primitiva elementar. Isto é, com a matemática que aprendemos até o momento, não é possível encontrar uma primitiva para $f(X)$. É possível determinar uma expressão para a primitiva de $f(X)$ utilizando séries de potências, dentre outras possibilidades. Este tópico será abordado em um terceiro curso de cálculo.

Para algumas funções, é fácil encontrar a sua primitiva. Por exemplo,

$$\int X^r dX = \frac{X^{r+1}}{r+1} + C \qquad \text{quando } r \neq 1$$

Para $r = 1$, temos que

$$\int \frac{dX}{X} = \ln |X| + C$$

A integral de algumas funções trigonométricas é imediata. Temos que,

$$\int \operatorname{sen} X dX = -\cos X + C \qquad \text{e} \qquad \int \cos X dX = \operatorname{sen} X + C$$

Já para a exponencial, temos que

$$\int a^X dX = \frac{a^X}{\ln a} + C \qquad \text{quando } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Observe que

$$\int \frac{dX}{X^2 + 1} = \operatorname{arctg} X + C$$

Duas propriedade sobre integrais seguem diretamente da propriedade correspondente para a derivada, a saber: para funções $f(X)$ e $g(X)$ e número real C,

- A integral da soma é a soma das integrais ou seja
$$\int [f(X) + g(X)] dX = \int f(X) dX + \int g(X) dX$$
- A multiplicação por uma constante permuta com a integração, isto é,
$$\int [Cf(X)] dX = C \int f(X) dX$$

De fato, se $F(X)$ e $G(X)$ são primitivas para $f(X)$ e $g(X)$ respectivamente, então $F(X)+G(X)$ e $CF(X)$ são respectivamente primitivas para $f(X) + g(X)$ e $Cf(X)$ porque:

- A derivada da soma é a soma das derivadas.
- A derivada de uma constante multiplicada por uma função é a constante vezes a derivada da função.

Exercício 1. *Calcule as seguintes integrais:*

(i)
$$\int X^3 + 5X^2 - 3X + 9dX$$

(ii)
$$\int_1^{64} 5\sqrt{X} - 4\sqrt[3]{X} + 3\sqrt[6]{X} dX$$

(iii)
$$\int \cos(5X - 4) dX$$

(iv)
$$\int X e^{-X^2} dX$$

(v)
$$\int X + \sqrt{3X + 1} dX$$

(vi)
$$\int \frac{3}{X^2 + 4} dX$$

2. Mudança de variáveis

Nesta parte da aula iremos aprender a primeira técnica de integração que pode ser chamada de integração por substituição — como está previsto no plano de aula da disciplina.

Por definição, para uma função $f(X)$, sua derivada é dada por

$$f'(X) = \lim_{h \to 0} \frac{f(X + h) - f(X)}{h} \tag{2}$$

Lembramos que a fração a direita é o coeficiente angular de uma reta que é secante ao gráfico de $f(X)$, cuja equação é $Y = f(X)$. De fato, a reta secante que passa pelos pontos de coordenadas $(X, f(X))$ e $(X + h, f(X + h))$ tem coeficiente angular igual a

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{f(X + h) - f(X)}{(X + h) - h} = \frac{f(X + h) - f(X)}{h} \tag{3}$$

Ao tomarmos o limite quando $h = \Delta X$ tende a 0 obtemos $f'(X)$. Quando ΔX fica muito próximo de 0, vimos que

$$\Delta Y \approx f'(X) \Delta X \tag{4}$$

e que esta aproximação fica cada vez melhor quanto menor for o ΔX. Ao mudarmos de variável, na soma de Riemann que origina a integral definida, primeiro substituímos ΔX por $\frac{\Delta Y}{f'(X)}$, isto é, assumimos a igualdade em (4), pois quanto mais próximo de 0 fica ΔX melhor fica esta aproximação, e depois fazemos a mudança de variável. Como, ao passarmos da soma de Riemann para a notação de integral, ΔX transformou-se em dX, teremos as seguintes relações entre dX e dY

$$dY = f'(X) dX \tag{5}$$

Agora, verificaremos que esta técnica é eficaz para encontrar a integral de uma função que é a derivada de uma função composta, isto é, que foi obtida através da regra da cadeia. Suponha que $f(X)$ e $g(X)$ são funções tais que

$$r(X) = g(f(X)) \tag{6}$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$r'(X) = g'(f(X))f'(X)$$

Portanto,

$$\int r'(X)dX = \int g'(f(X))f'(X)dX \tag{7}$$

Por definição, temos que a integral a esquerda é igual a

$$\int r'(X)dX = r(X) + C = g(f(X)) + C \tag{8}$$

Já a integral a direita de (7) calcularemos utilizando a seguinte substituição $Y = f(X)$. Logo $dY = f'(X)dX$ e daí

$$\int g'(f(X))f'(X)dX = \int g'(f(X))dY = \int g'(Y)dY = g(Y) + C$$

Ao voltarmos para a variável original, temos que

$$\int g'(f(X))f'(X)dX = g(f(X)) + C \tag{9}$$

Note que os resultado obtidos em (8) e (9) coincidem. A primeira integral foi calculada diretamente, o que pode ser difícil em várias situações, e a outra através da substituição da variável. Vamos fazer alguns exemplos para ilustrar esta técnica.

Exemplo 2. *Calcule a seguinte integral*

$$\int (X-1)e^{2X-X^2}dX$$

Vamos realizar a seguinte mudança de variável

$$Y = 2X - X^2$$

Neste caso

$$dY = (2-2X)dX = -2(X-1)dX$$

Portanto,

$$\int (X-1)e^{2X-X^2}dX = \int e^Y \frac{dY}{-2} = -\frac{1}{2}\int e^Y dY = -\frac{e^Y}{2} + C$$

Retornando a variável original, temos que

$$\int (X-1)e^{2X-X^2}dX = -\frac{e^{2X-X^2}}{2} + C$$

Quando é possível resolver uma integração por substituição, decidir que mudança de variável deve ser feita pode ser imediata, como no exemplo anterior e nos seguintes, ou pode não ser evidente. Isto ocorre, por exemplo, no último item do próximo exercício.

Exemplo 3. *Calcule a seguinte integral*

$$\int \frac{X^3}{X^4+5}dX$$

Se $Y = X^4 + 5$, então $dY = 4X^3 dX$ e daí

$$\int \frac{X^3}{X^4+5} dX = \int \frac{dY}{4Y} = \frac{1}{4}\int \frac{dY}{Y} = \frac{\ln|Y|}{4} + C = \frac{\ln(X^4+5)}{4} + C$$

Exemplo 4. *Calcule a seguinte integral*

$$\int \operatorname{sen}^3 X \cos^4 X dX$$

Podemos reescrever esta integral da seguinte forma

$$\int \operatorname{sen}^2 X \cos^4 X \operatorname{sen} X dX$$

Se $Y = \cos X$, então $dY = (-\operatorname{sen} X)dX$. Portanto $\operatorname{sen} X dX = -dY$. Note que $\operatorname{sen}^2 X = 1 - \cos^2 X = 1 - Y^2$. Conseqüentemente

$$\int \operatorname{sen}^2 X \cos^4 X \operatorname{sen} X dX = \int (1-Y^2)Y^4(-dY) = \int Y^6 - Y^4 dY = \frac{Y^7}{7} - \frac{Y^4}{4} + C$$

Voltando a varíavel inicial, temos que

$$\int \operatorname{sen}^3 X \cos^4 X dX = \frac{\cos^7 X}{7} - \frac{\cos^4 X}{4} + C$$

Uma mudança de variável similar pode resolver qualquer integral do tipo

$$\int \operatorname{sen}^m X \cos^n X dX$$

com m e n naturais desde que

- m é ímpar e fazemos a substituição $Y = \cos X$; ou
- n é ímpar e fazemos a substituição $Y = \operatorname{sen} X$

No caso em que m e n são pares utilizamos as identidades trigonométricas para o seno e o cosseno do dobro do arco. Por exemplo,

$$\operatorname{sen}^2 X \cos^2 X = (\operatorname{sen} X \cos X)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen}(2X)}{2}\right)^2 = \frac{\operatorname{sen}^2(2X)}{4} = \frac{1-\cos(4X)}{8}$$

Portanto,

$$\int \operatorname{sen}^2 X \cos^2 X dX = \int \frac{1-\cos(4X)}{8} dX = \frac{X}{8} - \frac{\operatorname{sen}(4X)}{32} + C$$

Na próxima aula, veremos que integrais desta forma podem também ser resolvidas através da técnica conhecida como integração por partes.

No exemplo seguinte, calcularemos uma integral definida através deste método. Por (8),

$$\int_a^b g'(f(X))f'(X)dX = g(f(X))\Big|_a^b = g(f(b)) - g(f(a)) \tag{10}$$

Ao fazermos a mundança de variável $Y = f(X)$ nesta integral, vimos que

$$\int g'(f(X))f'(X)dX = \int g'(Y)dY = g(Y) + C \tag{11}$$

Portanto, por (10) e (11),

$$\int_a^b g'(f(X))f'(X)dX = \int_{f(a)}^{f(b)} g'(Y)dY$$

Isto é, ao mudarmos a variável em uma integral definida, temos de mudar os limites do intervalo de integração. O limite inicial $X = a$, com esta mudança de variável, é transformado em $Y = f(a)$, e o limite terminal $X = b$ é levado em $Y = f(b)$.

Exemplo 5. *Calcule a seguinte integral*

$$\int_0^2 4X^2\sqrt{4X+1}dX$$

Neste exemplo, observamos que existe uma função composta, que é $\sqrt{4X+1}$. Para simplificar esta expressão, iremos fazer a seguinte mudança de variável $Y = 4X+1$. Logo $dY = 4dX$ e daí

$$\int 4X^2\sqrt{4X+1}dX = \int 4\left(\frac{Y-1}{4}\right)^2\sqrt{Y}\frac{dY}{4} = \frac{1}{16}\int (Y-1)^2\sqrt{Y}dY \tag{12}$$

Como nosso objetivo é calcular uma integral definida, para X percorrendo o intervalo $[0,2]$, temos de determinar os limites de integração para Y. Quando $x = 0$, temos que $Y = 1$ e, quando $X = 2$, temos que $Y = 9$. Logo Y percorre o intervalo $[1,9]$. Conseqüentemente

$$\int_0^2 X^2\sqrt{4X+1}dX = \frac{1}{16}\int_1^9 (Y-1)^2\sqrt{Y}dY \tag{13}$$

Escrevendo a integral mais a direita como a soma de potências de Y, podemos calcular esta integral

$$\int (Y-1)^2\sqrt{Y}dY = \int (Y^2-2Y+1)Y^{\frac{1}{2}}dY = \int Y^{\frac{5}{2}}-2Y^{\frac{3}{2}}+Y^{\frac{1}{2}}dY = \frac{2Y^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{4Y^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2Y^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

Ao substituirmos em (13) o valor desta integral, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^2 X^2\sqrt{4X+1}dX &= \frac{1}{16}\left(\frac{2Y^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{4Y^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2Y^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_1^9\\ &= \frac{Y^{\frac{7}{2}}}{56}-\frac{Y^{\frac{5}{2}}}{20}+\frac{Y^{\frac{3}{2}}}{24}\Bigg|_1^9\\ &= \frac{3^7}{56}-\frac{3^5}{20}+\frac{3^3}{24}-\left(\frac{1^7}{56}-\frac{1^5}{20}+\frac{1^3}{24}\right)\\ &= \frac{2942}{105}\end{aligned}$$

Ao calcularmos a integral

$$\int X^3+X+1dX$$

a função que está sendo integrada com relação a variável X começa após o símbolo da integral de termina no dX. Ao interpretamos dX como um fator multiplicativo, está impícito a existência destes parênteses, que é aberto após o símbolo da integral e fechado antes do dX, isto é, esta integral é a seguinte

$$\int (X^3 + X + 1)dX$$

A presença destes parêntes não é necessária, em geral, podendo ficar implícita. Mas quando realizamos mudança de variáveis, em alguns casos, pode ser interessante colocar os parênteses, para evitar qualquer confusão.

Exercício 6. *Calcule as seguintes integrais:*

(i)
$$\int \cos X e^{5+2\operatorname{sen} X} dX$$

(ii)
$$\int_0^9 \frac{2^{\sqrt{X}}}{\sqrt{X}} dX$$

(iii)
$$\int X \operatorname{tg}(5X^2 - 1)\sec(5X^2 - 1)dX$$

(iv)
$$\int \operatorname{sen}^7 X \cos^3 X dX$$

(v)
$$\int_0^\pi \operatorname{sen} X \sqrt[3]{14 - 13\cos X} dX$$

(vi)
$$\int \operatorname{tg} X dX$$

(vii)
$$\int \frac{e^{2X}}{e^{4X} + 7} dX$$

(viii)
$$\int \frac{dX}{X^2 + X + 1}$$

3. Respostas dos exercícios

1. (i) $\frac{X^4}{4} + \frac{5X^3}{2} - \frac{3X^2}{2} + 9X + C$ (ii) $\frac{10}{3}X^{\frac{3}{2}} - 3X^{\frac{4}{3}} + \frac{18}{7}X^{\frac{7}{6}} + C$ (iii) $\frac{\operatorname{sen}(5X-4)}{5} + C$ (iv) $-\frac{e^{-X^2}}{2} + C$ (v) $X^2 + 2(3X+1)^{\frac{3}{2}} + C$ (vi) $\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{X}{2}\right) + C$ **6.** (i) $\frac{e^{5+2\operatorname{sen} X}}{2} + C$ (ii) $\frac{14}{\ln 2}$ (iii) $\frac{\sec(5X^2-1)}{10} + C$ (iv) $\frac{\operatorname{sen}^8 X}{8} - \frac{\operatorname{sen}^{10} X}{10} + C$ (v) $\frac{60}{13}$ (vi) $-\ln|\cos X| + C$ (vii) $\frac{\sqrt{7}}{14}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^{2X}}{\sqrt{7}}\right) + C$ (viii) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(X + \frac{1}{2}\right)\right] + C$

Conteúdo da décima oitava aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos