CÁLCULO L1 — NOTAS DA SEGUNDA AULA

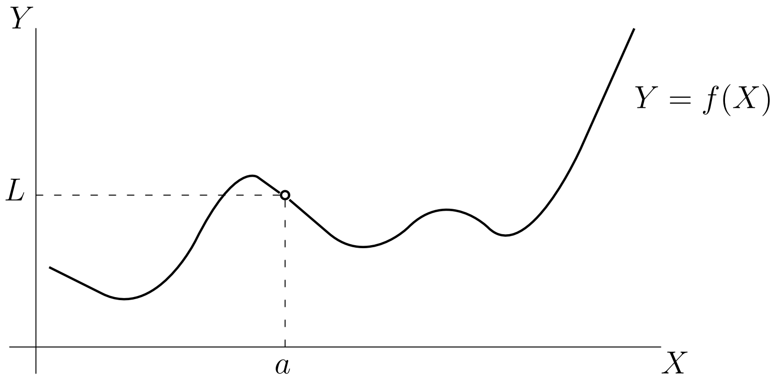
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

RESUMO. Nesta aula abordaremos, de maneira sistemática, a noção de limite, que é o número para o qual os valores de uma função se aproximam quando sua variável tende a uma quantidade fixa. Este conceito, que é fundamental em cálculo, separa nitidamente a abordagem dada à matemática no ensino superior da do ensino básico.

1. Definição de limite

A figura abaixo ilustra o gráfico de uma função f. Note que quando X se aproxima de a, isto é, $X \to a$, independentemente de ser por valores maiores que a ou menores que a, os valores de $f(X)$ se aproximam de L, isto é, $f(X) \to L$. Quando isto ocorre diremos que L é o **limite** de $f(X)$ quando X tende a a. Expressamos este fato através da notação

$$L = \lim_{X \to a} f(X)$$



Em alguns casos tal limite não existe. Quando existe, o valor que $f(X)$ assume para $X = a$ é irrelevante para o cálculo deste limite. Pode ocorrer incluside que $f(X)$ não esteja definida para $X = a$.

A definição formal deste conceito não é complexa, mas não será apresentada neste texto, visto que está sendo o primeiro contato da maiora dos estudantes com esta noção. Ademais, neste momento, uma abordagem formal obscureceria o conceito, que é de fundamental importância neste curso, tornando-o inacessível a muitos estudantes.

Exemplo 1. *Calcule o seguinte limite*

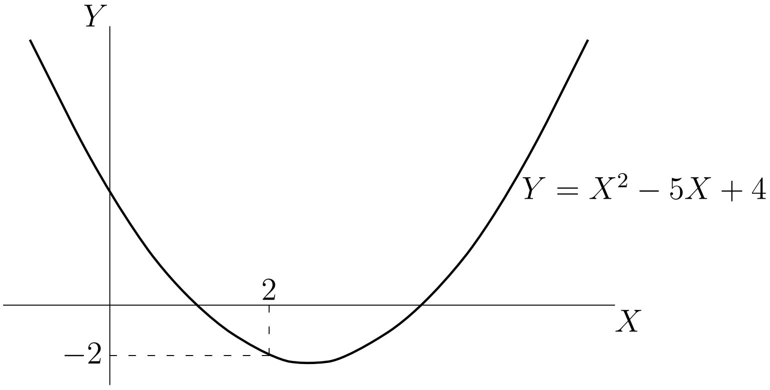
$$\lim_{X \to 2} X^2 - 5X + 4$$

Quando $X \to 2$, temos que $X^2 \to 4$ porque X^2 é o produto de X por X e o produto de dois números que estão muito próximos de 2 fica muito próximo de 4. Como o produto de -5 por um número muito próximo de 2 fica próximo de -10, temos que $-5X \to -10$ quando $X \to 2$. Logo $X^2 - 5X \to -6$ quando $X \to 2$, pois a soma de um número próximo

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

de 4 com outro próximo de -10 fica próxima de -6. Ao adicionarmos 4 a um número próximo de -6 obtemos um número próximo de -2. Portanto,

$$\lim_{X\to 2} X^2 - 5X + 4 = -2$$



Neste exemplo, o valor do limite de $f(X) = X^2 - 5X + 4$ quando $X \to 2$ é igual a $f(2)$. Isto também irá ocorrer, por exemplo, para toda função polinomial, como veremos ainda nesta aula. Mas, nem sempre, isto é verdade. Considere a funcão g, que será definida a seguir, sendo obtida a partir de f modificando apenas o seu valor em $X = 2$. Seja

$$g(X) = \begin{cases} X^2 - 5X + 4 & \text{quando } X \neq 2 \\ 15 & \text{quando } X = 2 \end{cases}$$

O mesmo argumento dado no Exemplo 1 serve para estabelecer que

$$\lim_{X\to 2} g(X) = -2$$

que é diferente de $g(2) = 15$.

2. Algumas regras

Calcular o limite da maneira como foi feita na seção anterior é pouco eficiente. Apresentaremos regras que facilitam encontrar os limites de inúmeras funções. Por exemplo:

- O limite da soma de funções é a soma dos limites destas funções.
- O limite da diferença de funções é a diferença dos limites destas funções.
- O limite do produto de funções é o produto dos limites destas funções.
- O limite do quociente de funções é o quociente dos limites destas funções, desde que o limite do denominador não seja 0.

Formalizamos estas regras em:

Regra 2. *Sejam f e g funções tais que, para um número real a,*

$$\lim_{X\to a} f(X) = F \quad e \quad \lim_{X\to a} g(X) = G$$

Então:

(1) $$\lim_{X\to a} [f(X) + g(X)] = \lim_{X\to a} f(X) + \lim_{X\to a} g(X) = F + G$$

(2) $$\lim_{X\to a} [f(X) - g(X)] = \lim_{X\to a} f(X) - \lim_{X\to a} g(X) = F - G$$

(3) $$\lim_{X\to a} [f(X)g(X)] = \lim_{X\to a} f(X) \lim_{X\to a} g(X) = FG$$

e quando $G \neq 0$ temos

$$\lim_{X\to a} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{\lim_{X\to a} f(X)}{\lim_{X\to a} g(X)} = \frac{F}{G} \tag{4}$$

Iniciamos estabelecendo (1). Observe que

$$[f(X) + g(X)] - [F + G] = [f(X) - F] + [g(X) - G] \tag{5}$$

Como $f(X) \to F$ e $G(X) \to G$, quando $X \to a$, temos que $f(X) - F \to 0$ e $g(X) - G \to 0$, quando $X \to a$. Portanto, quando $x \to a$, o lado direito de (5) é a soma de duas quantidades que se aproximam de 0 e conseqüentemente também se aproxima de 0. Logo $f(X) + g(X) \to F + G$, quando $X \to a$, pois a sua diferença se aproxima de 0. Temos (1).

A justificativa para (2) é idêntica e será apresentada a seguir. Note que

$$[f(X) - g(X)] - [F - G] = [f(X) - F] - [g(X) - G] \tag{6}$$

Como $f(X) \to F$ e $G(X) \to G$, quando $X \to a$, temos que $f(X) - F \to 0$ e $g(X) - G \to 0$, quando $X \to a$. Portanto, quando $x \to a$, o lado direito de (6) é a diferença de duas quantidades que se aproximam de 0 e conseqüentemente também se aproxima de 0. Logo $f(X) - g(X) \to F - G$, quando $X \to a$, pois a sua diferença se aproxima de 0. Temos (2).

Para estabelecer (3) procedemos da mesma forma. Iremos escrever $f(X)g(X) - FG$ como a soma de duas quantidades que se aproximam de 0 quando $X \to a$. Observe que

$$\begin{aligned} f(X)g(X) - FG &= f(X)g(X) - f(X)G + f(X)G - FG \\ &= f(X)[g(X) - G] + G[f(X) - F] \end{aligned}$$

Portanto, (3) segue porque $f(X)[g(X) - G]$ e $G[f(X) - F]$ se aproximam de 0 quando $X \to a$. De fato,

- $f(X)[g(X) - G] \to 0$ pois o produto de $f(X)$, que está muito próximo de F, por $g(X) - G$, que está muito próximo de 0, fica muito próximo de 0, quando $X \to a$.
- $G[f(X) - F] \to 0$ pois o produto de G por $f(X) - F$, que está muito próximo de 0, fica muito próximo de 0, quando $X \to a$.

A mesma estratégia será utilizada para mostrar (4). Observe que

$$\frac{f(X)}{g(X)} - \frac{F}{G} = \frac{Gf(X) - Fg(X)}{Gg(X)} = \frac{G[f(X) - F] - F[g(X) - G]}{Gg(X)} \tag{7}$$

Será suficiente estabelecer que a fração no lado direito da equação (7) tende a 0 quando $X \to a$. Isto ocorre pois:

- Seu numerador tende a 0, já que é a diferença de duas quantidades que tendem a 0, a saber: $G[f(X) - F]$ e $F[g(X) - G]$.
- O seu denominador tende a G^2 porque $g(X) \to G$.

O quociente de uma quantidade que tende a 0 por outra que tende a G^2, que é diferente de 0, tende a 0. Temos (4).

A Regra 2 pode ser estendida recursivamente para somas e produtos envolvendo mais de duas funções. Por exemplo, a soma de n funções pode ser escrita como

$$f_1(X) + \cdots + f_{n-1}(X) + f_n(X) = [f_1(X) + \cdots + f_{n-1}(X)] + f_n(X)$$

Isto é, é a soma de duas funções, a saber: $f_1(X) + \cdots + f_{n-1}(X)$ e $f_n(X)$. Como mostramos que o limite da soma de duas funções é a soma dos limites destas funções, temos que

$$\lim_{X\to a} [f_1(X) + \cdots + f_{n-1}(X) + f_n(X)] = \lim_{X\to a} [f_1(X) + \cdots + f_{n-1}(X)] + \lim_{X\to a} f_n(X)$$

Usamos a recursão para estender a Regra 2 quando a soma envolve mais de duas funções.

Utilizando a Regra 2, iremos recalcular o seguinte limite:

$$\lim_{X\to 2} X^2 - 5X + 4$$

Como o limite da soma é a soma dos limites, obtemos que

$$\lim_{X\to 2} X^2 - 5X + 4 = \lim_{X\to 2} X^2 + \lim_{X\to 2}[-5X] + \lim_{X\to 2} 4$$

Como o limite do produto é o produto dos limites, chegamos a

$$\lim_{X\to 2} X^2 - 5X + 4 = \lim_{X\to 2} X \lim_{X\to 2} X + \lim_{X\to 2}[-5] \lim_{X\to 2} X + \lim_{X\to 2} 4$$

Porém

$$\lim_{X\to 2} X = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{X\to 2} c = c$$

quando c é um número real fixo. Portanto,

$$\lim_{X\to 2} X^2 - 5X + 4 = 2 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 + 4 = -2$$

Exercício 3. *Calcule os seguintes limites:*

(i) $\lim_{X\to 1} X^5 - 3X^3 + X$
(ii) $\lim_{X\to -2}(X^2 + 5)(X^3 + 3X^2 - 5)$
(iii) $\lim_{X\to \frac{3}{2}} \frac{X^2-1}{X^2+5}$
(iv) $\lim_{X\to 3} \sqrt{X^2 + 4X - 5}$

Uma função f é dita **polinomial** quando existe um número natural n e números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$f(X) = a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

para todo valor de X.

Regra 4. *Se f é uma função polinomial, então*

$$\lim_{X\to a} f(X) = f(a)$$

Isto é, é muito simples calcular o limite de uma função polinomial quando a variável tende a um número fixo: basta computar o valor da função neste número. De fato, quando

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

temos que

$$\lim_{X\to a} f(X) = \lim_{X\to a} \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

Mas o limite da soma é a soma dos limites e daí

$$\lim_{X\to a} f(X) = \sum_{i=0}^{n} \lim_{X\to a} [a_i X^i]$$

Como a_iX^i é o produto de a_i por X^i, X^i é o produto dos termos da seqüência $X, X, \ldots, X$, com tamanho i, e o limite do produto é o produto dos limites, temos que

$$\lim_{X\to a} f(X) = \sum_{i=0}^{n} \lim_{X\to a} a_i \left[\lim_{X\to a} X\right]^i$$

Portanto,

$$\lim_{X\to a} f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i = f(a)$$

pois

$$\lim_{X\to a} a_i = a_i \quad \text{e} \quad \lim_{X\to a} X = a$$

Desta forma acabamos de estabelecer a Regra 4

Utilizando a Regra 4 fica muito fácil calcular o limite que consideramos no início desta seção, já que $f(X) = X^2 - 5X + 4$ é uma função polinomial e daí

$$\lim_{X\to 2} X^2 - 5X + 4 = f(2) = -2$$

3. Indeterminações

Na primeira aula, estabelecemos que o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos P e Q, com $Q \neq P$, do gráfico de uma função f tendo como coordenadas respectivamente $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ é

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{8}$$

O coeficiente angular m_P da reta tangente t_P ao gáfico da função f no ponto P é o valor para o qual m_{PQ} se aproxima quando $Q \to P$ ou seja

$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{9}$$

Note que o denominador deste quociente tende a 0 e o mesmo pode ocorrer com o numerador. Caso isto ocorra, diremos que este limite é

$$\text{“do tipo } \frac{0}{0}\text{”}$$

Quando m_P existe, o limite na igualdade (9) é deste tipo. A Regra 2 não cobre o cálculo de um limite “do tipo $\frac{0}{0}$” que é dito indeterminado porque pode assumir qualquer valor, dependendo da função envolvida. Vamos fazer alguns exemplos:

Exemplo 5. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim_{X\to -2} \frac{3X^2 + 6X}{X^2 - 4}$$

Note que

$$\lim_{X\to -2} 3X^2 + 6X = \lim_{X\to -2} X^2 - 4 = 0$$

Portanto, este limite é “do tipo $\frac{0}{0}$”. Isto ocorre porque -2 é raiz dos polinômios que estão no numerador e no denominador deste quociente. Portanto, cada um destes polinômios é divisível por $X - (-2) = X + 2$. Conseqüentemente

$$\lim_{X\to -2} \frac{3X^2 + 6X}{X^2 - 4} = \lim_{X\to -2} \frac{3X(X + 2)}{(X - 2)(X + 2)} = \lim_{X\to -2} \frac{3X}{(X - 2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

A terceira igualdade, da esquerda para a direita, segue das Regras 2(iv) e 4. Na segunda igualdade, cancelamos $X+2$ que multiplica o numerador com o $X+2$ que multiplica o denominador. Com este procedimento, eliminamos o fator que fazia com que o numerador e o denominador tendessem a 0 quando $X \to -2$, o que possibilita o cálculo do limite. Este processo é conhecido como "a eliminação da indeterminação".

Exemplo 6. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim_{X\to 1} \frac{X^2-1}{\sqrt{X}-1}$$

Note que este limite é "do tipo $\frac{0}{0}$". Necessitamos "eliminar a indeterminação". Faremos isto de duas maneiras. Na primeira, multiplicamos o numerador e o denominador da fração por um múltiplo do conjugado de $\sqrt{X}-1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{X\to 1} \frac{X^2-1}{\sqrt{X}-1} &= \lim_{X\to 1} \frac{(X^2-1)(\sqrt{X}+1)}{(\sqrt{X}-1)(\sqrt{X}+1)} \\
&= \lim_{X\to 1} \frac{(X-1)(X+1)(\sqrt{X}+1)}{X-1} \\
&= \lim_{X\to 1} (X+1)(\sqrt{X}+1) \\
&= \lim_{X\to 1} (X+1) \lim_{X\to 1} (\sqrt{X}+1) \\
&= 4
\end{aligned}$$

Na outra abordagem, substituiremos a variável X por uma outra, digamos t, de forma que a função torne-se o quociente de dois polinômios em t. Por exemplo, podemos tomar $t=\sqrt{X}$. Neste caso, $\sqrt{X}-1 = t-1$ e $X^2-1 = t^4-1$. Quando $X \to 1$, temos que $t=\sqrt{X} \to 1$. Portanto,

$$\lim_{X\to 1} \frac{X^2-1}{\sqrt{X}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^4-1}{t-1}$$

Reduzimos o problema ao cálculo do limite a direita da última igualdade. Note que ainda é "do tipo $\frac{0}{0}$". Contudo, é mais simples, pois é o limite do quociente de dois polinômios. Conseqüentemente $t=1$ é raiz dos polinômios que estão no numerador e no denominador desta fração. Podemos dividir ambos por $t-1$ para eliminar a indeterminação. Logo

$$\lim_{t\to 1} \frac{t^4-1}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t^3+t^2+t+1)}{t-1} = \lim_{t\to 1} t^3+t^2+t+1 = 4$$

Exercício 7. *Calcule os seguintes limites:*

(i) $\lim_{X\to -3} \frac{X+3}{X^2+5X+6}$
(ii) $\lim_{X\to \frac{1}{2}} \frac{4X^3-X}{1-2X}$
(iii) $\lim_{X\to 2} \frac{X^3-8}{X^3-3X^2+2X}$
(iv) $\lim_{X\to 0} \frac{\sqrt{X+9}-3}{X^3-X}$
(v) $\lim_{X\to -8} \frac{X+8}{\sqrt[3]{X}+2}$

Exercício 8. *Determine os valores de a e de b de forma que o seguinte limite exista:*

$$\lim_{X\to -1} \frac{aX^3+5X^2+bX+2}{X^3+2X^2+X}$$

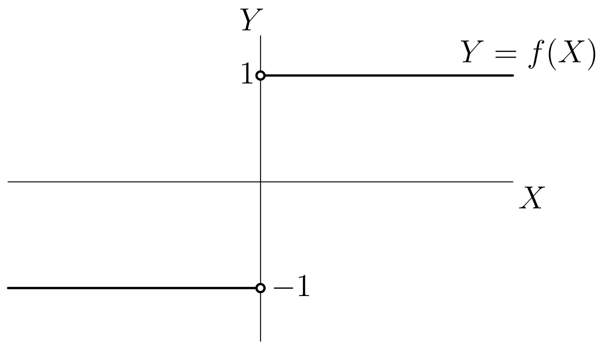
Qual o valor deste limite?

4. Limites laterais

Considere a seguinte função, que já foi considerada na aula anterior:

$$f(X) = \begin{cases} 1 & \text{quando } X > 0 \\ -1 & \text{quando } X < 0 \end{cases}$$

O gráfico de f é representado na figura seguinte.



Note que o limite de $f(X)$ quando X tende a 0 não existe, pois:

- quando X tende a 0 por valores maiores que 0, $f(X)$ se aproxima de 1; e
- quando X tende a 0 por valores menores que 0, $f(X)$ se aproxima de -1.

Para um número real a fixo, o valor para o qual uma função $f(X)$ se aproxima quando X tende a a, por valores maiores que a, é denotado por

$$\lim_{X \to a^+} f(X)$$

quando existir, e é conhecido como o **limite lateral pela direita** de $f(X)$ quando X tende a a. O **limite lateral pela esquerda** de $f(X)$ quando X tende a a é definido de maneira análoga. Para a função $f(X)$ representada na figura anterior temos que

$$\lim_{X \to 0^+} f(X) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{X \to 0^-} f(X) = -1$$

Observe que

$$\lim_{X \to a} f(X)$$

existe se e somente se

$$\lim_{X \to a^+} f(X) \quad \text{e} \quad \lim_{X \to a^-} f(X)$$

existem e são iguais. Neste caso

$$\lim_{X \to a} f(X) = \lim_{X \to a^+} f(X) = \lim_{X \to a^-} f(X)$$

Exercício 9. *Para um número real a, considere a seguinte função:*

$$f(X) = \begin{cases} X^2 + 1 & \textit{quando } X \geq 2 \\ aX & \textit{quando } X < 2 \end{cases}$$

Determine o valor de a de forma que

$$\lim_{X \to 2} f(X)$$

exista. Neste caso, qual o valor deste limite?

5. Limites infinitos

Caso os valores de $f(X)$ fiquem maior do que qualquer número fixo, quando $X \to a$, diremos que $f(X)$ **tende a mais infinito quando X tende a a**. Representamos isto da seguinte forma

$$\lim_{X\to a} f(X) = +\infty$$

na qual o símbolo ∞ representa infinito. Quando os valores de $f(X)$ ficam menor do que qualquer número fixo, quando $X \to a$, diremos que $f(X)$ **tende a menos infinito quando X tende a** a ou seja

$$\lim_{X\to a} f(X) = -\infty$$

Os limites laterais são definidos de maneira similar.

Exemplo 10. *Calcule os limites laterais da função f dada por*

$$f(X) = \frac{1}{X}$$

quando X tende a 0.

A função f é decrescente para valores positivos. De fato, caso

$$0 < a < b$$

ao dividirmos esta desigualdade por ab, que é um número positivo, obtemos

$$0 < \frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$$

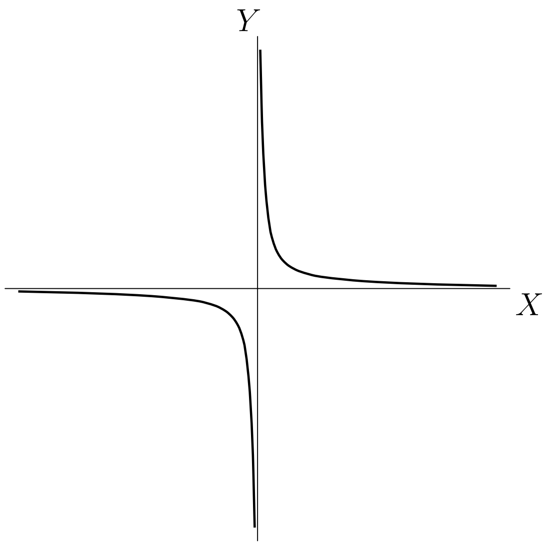
que, após a simplificação, transforma-se em

$$0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Isto é,

$$f(a) > f(b)$$

Da mesma forma mostra-se que esta função é decrescente para valores negativos. O gráfico de f é ilustrado a seguir:



Claramente $f(X)$ não possui limite quando $X \to 0$. Será que tem limites laterais quando X tende a 0? Alguns valores desta função são exibidos na tabela seguinte:

X	$f(X)$
1	1
$0,1$	10
$0,01$	100
$0,001$	1000
$0,0001$	10000
$0,00001$	100000
$0,000001$	1000000

Como $f(X)$ é decrescente para X positivo, os valores de $f(X)$ aumentam quando X se aproxima de 0 por valores maiores que 0. Note que os valores de $f(X)$ não ficam limitados porque, quando $X = 10^{-n}$, para um número natural n, temos que $f(X) = 10^n$. Neste caso, $f(X)$ tende para $+\infty$. Isto é,

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{1}{X} = +\infty$$

Quando X tende a 0 por valores menores que 0, temos que $|f(X)|$ tende a $+\infty$. Como os valores de $f(X)$ são negativos, temos que

$$\lim_{X\to 0^-} \frac{1}{X} = -\infty$$

Exercício 11. *Calcule os seguintes limites:*

(i) $\lim_{X\to 0} \frac{1}{X^2}$
(ii) $\lim_{X\to 0^-} \frac{1}{X^3}$
(iii) $\lim_{X\to 1} \frac{2X}{(X-1)^2}$
(iv) $\lim_{X\to -2^+} \frac{5X^3+40}{X^3+4X^2+4X}$

6. Respostas dos exercícios

3. (i) -1 (ii) -9 (iii) $\frac{5}{29}$ (iv) 4 **7.** (i) -1 (ii) -1 (iii) 6 (iv) $-\frac{1}{6}$ (v) 12 **8.** $a = -\frac{3}{2}$ $b = -\frac{11}{2}$ $L = -\frac{1}{2}$ **9.** $a = \frac{5}{2}$ $L = 2$ **11.** (i) $+\infty$ (ii) $-\infty$ (iii) $+\infty$ (iv) $-\infty$

Conteúdo da segunda aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos