XXIII CONIC
VII CONITI
IV ENIC

GEOMETRIA FRACTAL: APLICAÇÃO AO ESTUDO DE INCÊNDIOS FLORESTAIS

Felipe Camargo Marcolino[1]; Gustavo Camelo Neto[2]

[1]Estudante do Curso de Física-Licenciatura - CAA – UFPE; E-mail: felipec.marcolino@hotmail.com,
[2]Docente/pesquisador do Núcleo de Formação Docente – CAA – UFPE. E-mail: gustavo.camelont@ufpe.br.

Sumário: Neste trabalho será ilustrada a utilização de algoritmos em linguagem de programação C para estimar a dimensão de alguns fractais, e posteriormente a dimensão dos aglomerados de árvores em incêndios florestais. O termo Fractal foi utilizado por Benoit Mandelbrot para representar a classe de formas geométricas que possuem irregularidades que não são descritas pela geometria euclidiana. Desde a criação dessa nova geometria, observou-se que alguns fenômenos em diversas áreas tais como física, medicina, economia possuem características da geometria fractal.

Palavras–chave: geometria fractal, contagem de caixas, incêndios florestais.

INTRODUÇÃO

Florestas possuem uma rica distribuição de espécies de árvores, cuja distribuição espacial é influenciada por diversos fatores, internos e externos, tais como relevo, umidade, desmatamento, incêndios florestais entre outros. A dinâmica de incêndios, por sua vez, é determinada por fatores como a direção e intensidade dos ventos e da própria distribuição de espécies de vegetação[2]. Incêndios florestais podem ser danosos e catastróficos, sendo necessário um programa contínuo de prevenção e constantes estudos sobre estratégias de combate ao fogo [2, 3]. Neste sentido, vários modelos para a dinâmica de incêndios florestais foram propostos e vem sendo estudados [4,10,12].

A geometria fractal [5-7,11] surgiu da necessidade de se estudar objetos não descritos pela geometria euclidiana tradicional, tais como linhas costeiras, leitos de rios, nuvens, paisagens, etc. Retas, triângulos e esferas não se mostraram capazes de representar, por exemplo, os detalhes de uma árvore, o leito de um rio ou as formas de montanhas. Linhas costeiras ou fronteiriças possuem detalhes que se realçam ou desaparecem quando observadas em diferentes escalas, podendo, inclusive, apresentar comprimentos diferentes em distintas escalas. Baseado nessas observações B. Mandelbrot [11] propôs que a natureza seria mais bem descrita por objetos fractais. Embora várias estruturas fractais tenham sido descobertas há mais de um século por matemáticos como Cantor, Peano, Helge Von Koch, etc; tais estruturas eram consideradas apenas curiosidades matemáticas, exemplos de curvas não retificáveis, contínuas, mas sem derivada em nenhum ponto [7]. O estudo da geometria fractal, no entanto, ganhou impulso à partir do ensaio de Mandelbrot [11], relacionando a geometria fractal com as formas encontradas na natureza. Não há uma definição matemática definitiva de fractal, mas uma descrição baseada em um conjunto de propriedades, tais como autossimilaridade, estrutura fina, irregularidade e dimensão fractal superior à sua dimensão topológica. A dimensão fractal pode ser definida de várias maneiras, por exemplo, como a dimensão de Hausdorff, e representa uma medida de como o fractal ocupa o espaço.

Este estudo teve por objetivo geral introduzir o estudo da geometria fractal, particularmente do cálculo e medição da dimensão fractal, inicialmente para fractais determinísticos, matematicamente definidos, e posteriormente para fractais estocásticos, encontrados na natureza ou obtidos através de simulações computacionais.

De modo mais específico, o cálculo analítico da dimensão fractal foi realizado para alguns fractais clássicos, como a poeira de Cantor, a curva de Van Koch, o tapete de Sierpinski e o conjunto de Mandelbrot.

MATERIAIS E MÉTODOS

Os resultados foram obtidos à partir de duas metodologias. Para o estudo dos fractais determinísticos clássicos, como o conjunto de Cantor, o conjunto de Van Koch, a gaxeta e o tapete de Sierpinski foi utilizado o cálculo analítico da dimensão fractal, por indução matemática. Um método computacional recursivo foi utilizado para gerar esses fractais, e o método de iteração numérica foi utilizando para gerar o conjunto de Mandebrot. À partir dos fractais gerados numericamente, foi aplicado, também numericamente, o método de contagem de caixas para estimativas da dimensão fractal. Os erros relativos foram obtidos e analisados. Finalmente, o método numérico de contagem de caixas foi aplicado à bosques de árvores obtidos por simulação computacional, advindos de um modelo para incêndios florestais que é o motivo de estudo da dissertação de mestrado do estudante Florentino Gomes, do departamento de Física da UFPE.

Todos os algoritmos gerados neste trabalho foram construídos em linguagem de programação C.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a construção numérica dos fractais, utilizaram-se funções recursivas, noções de geometria analítica e do conjunto dos números complexos. Os fractais foram construídos obtendo-se numericamente as coordenadas de cada um dos pontos que compõem o fractal. Essas coordenadas foram armazenadas em arquivos de dados e posteriormente foram utilizadas para construir os fractais.

Passada a construção, para estimar numericamente a dimensão dos fractais se fez necessário que todas as coordenadas dos pontos dos fractais estivessem discretizadas para que pudessem ser inseridas em matrizes quadradas. Com os fractais inseridos nas matrizes, iniciou-se a estimativa da dimensão pelo método de contagem de caixas. A tabela 1 apresenta uma comparação entre os valores obtidos analiticamente e os valores obtidos numericamente para os fractais matemáticos:

Tabela 1. Comparação entre as dimensões obtidas analiticamente e as obtidas numericamente.

Fractal	Dimensão analítica	Dimensão numérica	Erro relativo percentual
Poeira de Cantor	0,6309	0,6309	0
Curva de Koch	1,2619	1,30(1)	3,17%
Gaxeta de Sierpinski	1,5849	1,61(1)	1,26%
Tapete de Sierpinski	1,8928	1,923(8)	1,59%

Os erros percentuais apresentados na tabela devem-se ao processo de discretização dos pontos, nesse processo vários pontos se sobrepõem, dessa forma o algoritmo contador de caixas executa mais cálculos que o necessário. A tabela 2 apresenta uma comparação entre os valores teóricos e o numérico da dimensão da fronteira do conjunto de Mandelbrot.

Tabela 2. Comparação entre o valor teórico e o numérico da dimensão da fronteira do conjunto de Mandelbrot.

Fractal	Dimensão teórica	Dimensão numérica	Erro relativo percentual
Conj. de Mandelbrot	2,0	1,75(3)	14,38%

Conforme observado na tabela 2 a dimensão estimada numericamente para o conjunto de Mandelbrot mostra-se muito discrepante do valor teórico, isso deve-se à incapacidade do computador em gerar a fronteira do conjunto de Mandelbrot com precisão suficiente, de modo que a fronteira do fractal não está totalmente presente, isso implica que o algoritmo contador de caixas irá contar menos pontos do que deveria.

O algoritmo de contagem de caixas foi aplicado em dados de simulações de incêndios florestais, estimando a dimensão fractal dos maiores aglomerados de árvores suscetíveis e resistentes ao incêndio. A tabela 3 apresenta os resultados encontrados numericamente para a dimensão desses aglomerados:

Tabela 3. Dimensão numérica para os bosques de árvores.

Tipo de árvores	Dimensão numérica
Árvores suscetíveis	1,43(8)
Árvores resistentes	1,66(2)

As figuras 1 e 2 apresentam os gráficos das estimativas da dimensão fractal para esses aglomerados de árvores:

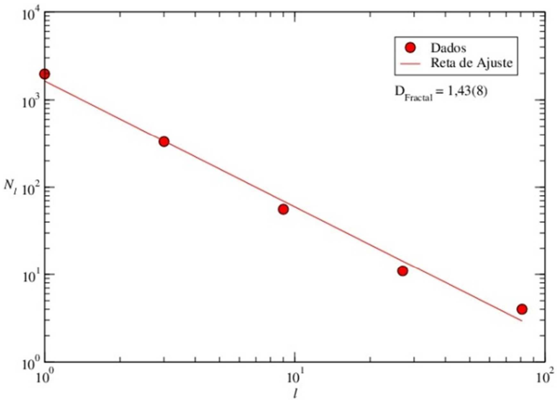

Figura 1. Gráfico do número de caixas versus o tamanho das caixas para o maior aglomerado de árvores suscetíveis.

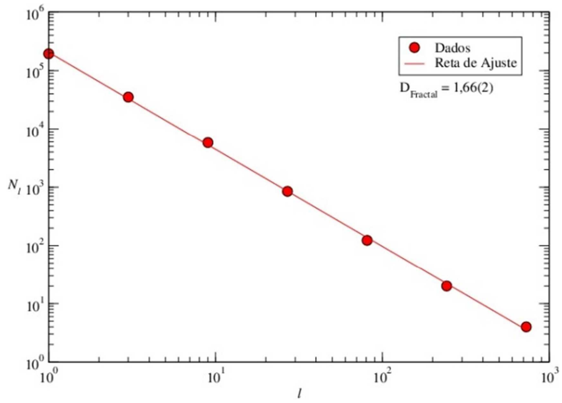

Figura 2. Gráfico do número de caixas versus o tamanho das caixas para o maior aglomerado de árvores resistentes.

Como os aglomerados de árvores suscetíveis e resistentes possuem dimensão não inteira, então esses aglomerados são objetos fractais.

CONCLUSÕES

A comparação entre as dimensões obtidas analiticamente e as dimensões obtidas numericamente mostra que o algoritmo de contagem de caixas funcionou de maneira satisfatória, essa concordância credenciou o algoritmo para estimar a dimensão de outras figuras de dimensão desconhecida.

Os resultados obtidos para as dimensões dos aglomerados de árvores em após incêndios florestais permitem concluir que as formas geométricas que surgem nesses aglomerados são fractais.

O algoritmo produzido neste trabalho pode ser utilizado para estimar a dimensão de objetos em diversas áreas do conhecimento, evidenciando ou não a presença de objetos fractais.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq por ter financiado esta pesquisa, à UFPE-CAA por ter fornecido toda a estrutura para que a pesquisa pudesse acontecer. Ao professor Gustavo Camelo e ao Luciano Júnior por todas as discussões que proporcionaram momentos de muita aprendizagem.

REFERÊNCIAS

[1] ASSIS, T. A. et al. **Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais.** Revista Brasileira de Ensino de Física, 30(2):2304–2013, 2008.

[2] BARCLAY, H. J. et al. **Effects of fire size and frequency and habitat heterogeneity on forest age distribution.** Ecological Modelling, 197(1-2):207–220, August 2006.

[3] CÔRTES, I. R. C. **Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática**. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Centro de Ciências exatas e tecnologia. Rio de Janeiro, 2014.

[4] DROSSEL, B.; F. SCHWABL, F. **Self-organized critical forest-fire model**. Physical Review Letters, 69(11):1629–1632, September 1992.

[5] FALCONER, k. **Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.** Wiley, 2003.

[6] FEDER, J. **Fractals**. Springer, 1988.

[7] GOUYET, J.F. **Physics** and **Fractal Structures**. Springer, 1996.

[8] LANDINI, G. et al. **Fractal Characterization and Computing Modelling of Herpes Simplex Virus Spread in the Human Corneal Epithelium.** M. M. Novak, Elsevier Science B. V., North Holland, 1994.

[9] MALAMUD, B.D. et al. **Characterizing wildfire regimes in the United States.** Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 102(13):4694–9, March 2005.

[10] MALAMUD, B. D. **Forest Fires: An Example of Self-Organized Critical Behavior.** Science, 281(5384):1840–1842, September 1998.

[11] MANDELBROT, B. B.. **The Fractal Geometry of Nature**. W. H. Freeman and Company, 1982.

[12] NETO, G. C.; COUTINHO, S. **Forest-fire model with resistant trees.** Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2011(06):P06018, June 2011.

[13] NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações.** Departamento de Matemática Pura: Faculdade de Ciências da Universidade do Proto. Janeiro, 2006.

[14] REED,W. J.; MCKELVEY, K. S. **Power-law behaviour and parametric models for the size-distribution of forest fires**. Ecological Modelling, 150(3):239–254, May 2002.

[15] VILCHES, M. A. **Topologia Geral.** Departamento de Análise-IME: UERJ.