XXIII CONIC
VII CONITI
IV ENIC

O ÍNDICE DE MASLOV EM MECÂNICA

Tiago de Albuquerque Amorim[1]; Henrique de Barros Correia Vitório[2]

[1]Estudante do Curso de Bach. em Matemática - CCEN - UFPE; E-mail: tiago.albuquerqueamorim@ufpe.br,
[2]Docente/pesquisador do Depto de Matemática – CCEN – UFPE. E-mail: henriquevitorio@dmat.ufpe.br.

Sumário: O índice de Maslov é um número inteiro que associamos a certas curvas contínuas no grupo simplético. Então, antes de tudo é necessário conhecer bem o grupo simplético, simbolizado por Sp(2n), que é o grupo formado pelas matrizes 2n x 2n que preservam a forma simplética. Portanto o nosso estudo começa na construção da forma simplética e com o estudo algébrico do grupo simplético. Depois seguimos para um estudo topológico do Sp(2n). Logo após definiremos o índice de Maslov para o caso n=1.

Palavras–chave: estrutura métrica; maslov; simplético

INTRODUÇÃO

Todo o nosso trabalho será feito sobre um espeço vetorial real V de dimensão finita. Em Álgebra linear vemos que um produto interno em V, isto é, uma forma bilinear simétrica não-degenerada positiva definida, nos dá um noção de norma, ângulo e portanto ortogonalidade. Neste caso o conceito de ortogonalidade é um conceito simétrico, isto é, se um vetor u é ortogonal a um vetor v, então vale que v é ortogonal a u. A forma simplética surge quando nós fazemos a seguinte pergunta: quando uma forma bilinear, não necessariamente não-degenerada e simétrica, nos dá um conceito de ortogonalidade simétrica. E como resposta encontramos a geometria ortogonal, quando é simétrica, e a geometria simplética, quando é antissimétrica.

Os casos de interesse é quando a forma simplética é não-degenerada. Portanto, se é entendido por uma forma simplética num espeço vetorial V uma forma bilinear antissimétrica não-degenerada.

MATERIAIS E MÉTODOS

Foi feita leituras da bibliografia recomendadas pelo professor, acompanhado de encontros semanais com o orientador onde foram debatidas as questões provenientes dessas leituras. A bibliografia foi obtida em banco de dados na internet e em livros da biblioteca do CCEN. Os registros em relatórios dos resultados estudados estão sendo condensados nesse relatório final.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Uma forma bilinear b em V é uma função cujo domínio é o cartesiano de duas copias de V, é tal que assume valores reais e que é linear em cada coordenada. Intuitivamente podemos entender $b(u,u)$ algo sobre a norma do vetor u e $b(u,v)$ algo sobre o ângulo entre u,v. Assim dizemos que b induz uma estrutura métrica em V. Dizemos também que u é b-ortogonal a v quando $b(u,v)=0$. Note que se u é b-ortogonal a v não necessariamente também teremos que v é b-ortogonal a u. Então, quando é que uma forma bilinear nos uma noção de ortogonalidade simétrica? A resposta é quando a forma bilinear é simétrica ($b(u,v)=b(v,u)$) ou antissimétrica ($b(u,v)=-b(v,u)$). Aqui uma forma bilinear é dita degenerada quando existe um vetor w em V tal que $b(v,w)=0$, para todo v em V. Assim para nós uma forma simplética é uma forma bilinear não-degenerada antissimétrica.

Um operador linear T em V é uma função cujo domínio e contra domínio é o espaço vetorial V e tal que $T(u+av)=T(u)+aT(v)$, onde a é um número real e u e v são vetores de V. Estamos interessado nos operadores que preservam uma dada forma simplética, ditos transformações simpléticas ou simplectomorfismo. Esse conjunto tem uma estrutura de grupo, é chamado de grupo simplético e denotado por Sp(2n), onde 2n é a dimensão de V. Além disse, o Sp(2n) é gerado pelas transvecções. Geometricamente falando, as transvecções são operadores que movem cada vetor ao longo de uma mesma reta. Uma vez fixado uma base de Darboux para V podemos considerar $V=R^{2n}$ e o Sp(2n) corresponde ao subgrupo das matrizes A 2n x 2n tais que $A^TJA=J$, onde $J=[a_{ij}]$ com $a_{l\ 2n-l+1}$ igual a 1 se l está entre 1 e n, igual a -1 se l está entre n+1 e 2n e zero nos demais índices.

Subespaços Lagrangeanos são subespaços de dimensão n cuja restrição da forma simplética, a esse subespaço, é degenerada. A Grassmanniana Lagrangeana é o conjunto formado por todos os subespaços lagrangeano de V. Interessados na ação do grupo simplético sobre as triplas de subespaços Lagrangeanos, observamos as obstruções quanto a transitividade da ação. Essas obstruções são as dimensões das intersecções e o invariante de Leray. Este último é a classe de isometrias de um espaço vetorial munido de uma forma bilinear simétrica não-degenerada associado a dada tripla de subespaços lagrangeanos de V.

Dados dois espaços topológicos X e Y, definimos uma homotopia entre duas funções f e g de X em Y, quando existe, uma função continua H do espaço topológico X x I à valores em Y tal que $H(x,0)= f(x)$ e $H(x,1)=g(x)$, aqui I é o intervalo fechado [0,1]. Podemos pensar a homotopia como uma deformação contínua entre duas funções. Assim, duas funções são homotópicas quando existe uma homotopia entre elas. Isto nos dá uma relação de equivalência. Quando $X=I$ e consideramos apenas homotopias de extremos fixados entre caminhos fechados com relação a um único ponto fixado, isto é, $H(0,s)=H(1,t)=x_0$ para todo s,t em I, as classes de equivalência formam um grupo que é conhecido como o grupo fundamental de Y denotado por $p_1(Y,x_0)$. O grupo fundamental de Sp(2n) é isomorfo ao grupo aditivo dos números inteiros.

Olhando para a decomposição polar e escolhendo parâmetros convenientes, temos que Sp(2) é homeomorfo ao produto topológico do conjunto dos números complexos de norma 1 com o interior do disco unitário. Isto é, Sp(2) é homeomorfo ao interior do toro.

Após algumas contas concluímos que existe uma função continua r com domínio Sp(2) e que toma valores no conjunto dos números complexos de norma 1 e é tal que:

i. é invariante por conjugação simpléticas;

ii. é homotópico ao mapa U que associa cada simplectomorfismo ao ângulo de rotação do operador ortogonal de sua decomposição polar;

iii. $r(R(q))=U(R(q))=q$, se $R(q)$ é a q-rotação;

iv. $r(A)=\pm 1$, se A tem autovalor real;

v. $r(A^n)=r(A)^n$, para todo A em Sp(2) e para todo numero inteiro n.

Esta função é conhecida como função rotação sobre Sp(2).

Considere o conjunto Sp(2)* formados pelas simplectomorfismo A de Sp(2) tais que $det(I - A) \neq 0$. O índice de Maslov está definido apenas para caminhos que começam com a matriz I e que terminam em algum elemento de Sp(2)*. Como Sp(2) é homeomorfo ao interior do toro, podemos pensar que o índice de Maslov conta o números de meias-voltas que o caminha dá no toro. A definição desse índice é feita a partir da função rotação.

CONCLUSÕES

Existe muito mais a ser estudado sobre o índice de Maslov, mas mesmo vendo apenas um caso particular já é possível entender a importância desde índice no estudo das soluções de sistemas Hamiltonianos em Sistemas Dinâmicos.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a Propesq-UFPE pela bolsa que possibilitou esse trabalho e agradecer ao professor Henrique Vitório pela dedicação e paciência nesse um ano de iniciação científica.

REFERÊNCIAS

ARTIN, E. Geometric Algebra. University, Princeton, New Jersey.

ABBONDANDOLO, A. 2001. Morse theory for Hamiltonian systems. Chapman & Hall/CRC research notes in mathematics series.

RAO, R. R. 1993. Pacific Journal of Mathematics, vol 157, nº 2. p. 335-344.

LIMA, E. L. 1993. Grupo fundamental e Espaços de Recobrimento. Rio de Janeiro. Institutuo de Matemática Pura e Aplicada, CNPq. (Projeto Euclides)