Síntria Labres Lautert
José Aires de Castro Filho
Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana

ENSINANDO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DO 1º ao 3º ano

Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica
Coletânea Cadernos E-Mult

Via Litterarum
EDITORA

ENSINANDO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DO

1º ao 3º ano

ORGANIZADORES

Síntria Labres Lautert

José Aires de Castro Filho

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana

ENSINANDO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DO

1º ao 3º ano

AUTORES

Débora Cabral Lima

Claudia Roberta Araújo Gomes

Ernani Martins dos Santos

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana

Juliana Ferreira Gomes da Silva

Síntria Labres Lautert

Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica
Coletânea Cadernos E-Mult

Itabuna - Bahia, 2017

Via Litterarum

Revisão
Maria Luiza Castro Araújo

Editoração Eletrônica
Via Litterarum Editora

Projeto Gráfico, Diagramação e Capa
Mel Campos

Apoio financeiro
CAPES

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Ficha Catalográfica: Elisabete dos Santos

E61 Ensinando multiplicação e divisão do 1º ao 3º ano / Sìntria Labres Lautert, José Aires de Castro Filho, Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana, organizadores. – Itabuna : Via Litterarum,2017.

140p.: il. Alfabetização Matemática, Estatística e Científica;

Coletânea de Cadernos E-mult.

Inclui referências e apêndice.

ISBN: 978-85-8151-149-8

1. Matemática (Ensino fundamental) – Estudo e ensino. 2.Multiplicação. 3.Divisão. I. Lautert, Sintria Labres. II. Castro Filho, José Aires. II. Santana, Eurivalda Ribeiro dos Santos. IV. Série.

CDD – 372.7

VIA LITTERARUM EDITORA
Rua Frederico Maron, 199, Centro, Ibicaraí, BA. CEP 45745-000
www.vleditora.com.br ::vialetras@gmail.com

SUMÁRIO

CAPÍTULO III

PREFÁCIO

Foi com muito gosto que aceitei o convite da Síntria para prefaciar esta obra, cujo caminho acompanhei desde o início, ou melhor, quando eram ainda valiosas ideias a serem implementadas no âmbito de um projeto de pesquisa em rede, cujo foco principal foi a formação em serviço de professores. Trata-se do primeiro de uma coletânea de três volumes, todos relacionados à pesquisa intitulada "Um estudo sobre o domínio das Estruturas Multiplicativas no ensino fundamental" (Edital OBEDUC, CAPES).

O projeto, realizado simultaneamente em três estados distintos (Bahia, Pernambuco e Ceará), teve por objetivo investigar e intervir na prática de professores do ensino fundamental no que tange às Estruturas Multiplicativas e todo o processo teve por sustentação a Teoria dos Campos Conceituais.

A Teoria dos Campos Conceituais, em especial o Campo Conceitual Multiplicativo, embora já muito referida na literatura, não é tão simples para ser entendida. Isso porque seus conceitos, longe de serem óbvios, exigem um reolhar para a maneira de como se pensar em uma multiplicação ou uma divisão. Além do mais, esta obra segue, com muita propriedade, a releitura que meus colegas e eu (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014) fizemos desse campo multiplicativo, no que tange à classificação das relações nele envolvidas, dentro de situações lineares.

No caso desse material bibliográfico, tenho a convicção de que ele muito pode contribuir para a área da educação matemática, em especial para aqueles que têm como foco de estudo, e/ou de trabalho, os anos de alfabetização. Por essa ótica, o livro pode interessar não apenas aos pesquisadores e estudantes de pós-graduação nas áreas de Ensino, Educação e Psicologia, bem como professores e futuros professores dos anos inicias do ensino fundamental.

Assim, apoiado na Teoria dos Campos Conceituais, o livro traz dois enfoques muito interessantes e inovadores para abordar as Estruturas Multiplicativas: (1) a partir do fazer do estudante, discute, interpreta e explica as estratégias e os esquemas utilizados para resolver situações-problema multiplicativas à luz da Teoria dos Campos Conceituais (Capítulo II); e (2) a partir de reflexão, planejamento, ação e, novamente, reflexão (metodologia RePARe) do professor, apresenta uma rica e instigante discussão sobre possibilidades de ações pedagógicas para o ensino das Estruturas Multiplicativas, tendo como aporte o viés psicológico (Capítulo III). Esse último capítulo, inclusive, merece destaque especial, pois seu viés psicológico, próprio de autores com tal formação, fez toda a diferença na maneira como a formação foi abordada.

A obra ainda oferece, no fim do Capítulo III, um conjunto significativo de situações-problema elaboradas pelos professores que atuavam nos anos de alfabetização (1º, 2º e 3º anos do ensino fundamental), no momento dessa formação em serviço.

Dessa forma, concluo este prefácio agradecendo aos autores, amigos muito queridos, a oportunidade de ter lido, em *avant premiere*, obra tão agradável, escrita de maneira direta, objetiva, ilustrativa sem, contudo, perder a simplicidade peculiar de uma escrita sóbria. Recomendo definitiva e enfaticamente sua leitura para todos que têm interesse na Teoria dos Campos Conceituais, em especial nas Estruturas Multiplicativas e, ainda, para todos aqueles que, de alguma maneira, atuam nos anos iniciais do ensino fundamental.

Parabéns aos autores!

Sandra Magina

Ilhéus, outubro 2017.

INTRODUÇÃO

Este livro faz parte de uma coletânea de três livros que se complementam e apresentam resultados da pesquisa intitulada "Um estudo sobre o domínio das Estruturas Multiplicativas no Ensino Fundamental", uma pesquisa desenvolvida no âmbito do Programa Observatório da Educação – OBEDUC, financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, Projeto Nº15727, referente ao Edital 049/2012/CAPES/INEP.

A pesquisa teve suas fases realizadas pela rede que denominamos Rede E-Mult, composta por universidades de três estados da Região Nordeste: Bahia, Ceará e Pernambuco (apresentadas no Quadro 1) e com a colaboração de um pesquisador da Universidade Nove de Julho do estado de São Paulo.

Quadro 1 – Universidades que compõem a Rede E-Mult por estado

Estado	Universidades Parceiras
Bahia	Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) – IES responsável pela coordenação geral (SEDE) e pelo Núcleo Ilhéus
Ceará	Universidade Federal do Ceará (UFC) – IES responsável pelo Núcleo Fortaleza Universidade Estadual do Ceará (UECE)
Pernambuco	Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) IES responsável pelo Núcleo Recife Universidade de Pernambuco – (UPE) Universidade Federal Rural de Pernambuco – (UFRPE)

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

A Rede E-Mult teve como finalidade principal investigar e intervir na prática de professores do ensino fundamental no que tange às Estruturas Multiplicativas, baseada no modelo de formação "reflexão-planejamento-ação-reflexão". Para alcançar o objetivo, a Rede E-Mult realizou a pesquisa durante quatro anos, de 2013 a 2016. Em 2013, foi conduzido um estudo dos modelos disponibilizados pela Prova Brasil e de seus descritores, dos currículos das escolas e da Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud no que se refere ao Campo Conceitual Multiplicativo.

Tendo como base os estudos realizados em 2013, no ano seguinte, o projeto foi apresentado para 12 escolas de ensino fundamental dos três estados, sendo quatro escolas por estado, que foram denominadas escolas parceiras, visto que se buscou, desde o início, estabelecer, em cada escola, um grupo com características colaborativas composto por professores que ensinam matemática; gestores e coordenadores pedagógicos; pesquisadores[1] e estudantes de graduação, mestrado e doutorado.

Paralelamente, foi elaborado, testado e aplicado um instrumento diagnóstico contendo 13 situações envolvendo o Campo Conceitual Multiplicativo. O estudo diagnóstico foi feito com 3.890 estudantes do 1º ao 9º ano do ensino fundamental das 12 escolas parceiras. Ainda no ano 2014, foi dado início às análises referentes ao desempenho e aos esquemas usados pelos estudantes para resolver as situações apresentadas no instrumento diagnóstico.

Em 2015, realizou-se o processo formativo da Rede E-Mult com 84 professores das 12 escolas que estavam em sala de aula e em cargos de gestão. O processo formativo possibilitou colaborar para o desenvolvimento profissional dos professores, facilitando a reflexão de suas ações, seguida pelo planejamento reflexivo de suas novas ações num movimento espiralar crescente.

No ano 2016, a Rede E-Mult desenvolveu, de modo mais intenso, o processo de organização e de análise dos dados obtidos e a continuidade do processo formativo com professores de sete das doze escolas parceiras.

1 No total, foram 15 pesquisadores envolvidos diretamente com a pesquisa.

Os principais resultados referentes ao estudo seguem apresentados nos três livros da Coletânea Cadernos E-Mult, que fazem parte da Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica. O primeiro livro é direcionado aos professores que atuam do 1º ao 3º ano do ensino fundamental, o segundo, aos que atuam no 4º e no 5º ano do ensino fundamental e, o terceiro, àqueles que atuam do 6º ao 9º ano do ensino fundamental.

O livro Ensinando Multiplicação e Divisão do 1º ao 3º ano, compõe o primeiro livro da coletânea e foi estruturado em três capítulos. No Capítulo I, apresentamos, numa linguagem simples, as bases principais da Teoria dos Campos Conceituais no que se refere ao Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas da forma como foi abordada na Rede E-Mult. No Capítulo II, apresentamos os resultados do desempenho dos estudantes no teste diagnóstico aplicado em 2014, bem como discutimos sobre os esquemas e formas de registros adotadas pelos estudantes desses anos escolares em situações que obtiveram maiores percentuais de acertos. No Capítulo III, tratamos sobre o processo formativo colaborativo desenvolvido na Rede E-Mult, no ano 2015, discutimos as situações elaboradas pelos professores, que foram aplicadas aos seus estudantes e analisadas no grupo colaborativo. E, por fim, são trazidas narrativas acerca da experiência do professor e o processo formativo, entrelaçando-se as memórias compartilhadas e o rebatimento na sua ação docente dos conhecimentos adquiridos ao longo desse processo. Para finalizar, acrescentamos situações elaboradas e aplicadas pelos professores e que não foram contempladas na escrita do Capítulo III.

Desejamos a todos uma boa leitura e que os resultados aqui apresentados possam contribuir com o fazer do professor em sala de aula.

Os organizadores

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Programa Observatório da Educação, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES/Brasil.

Professores do 1º ao 3º ano do Ensino fundamental que participaram ativamente do Processo formativo E-Mult

1º Ano	
Ana Cristina Alves de Souza Silva	Ilhéus - Bahia
Aniele de Oliveira Coelho	São José da Vitória - Bahia
Antônia Gerusa Lopes Maciel	Barreira - Ceará
Jane Eyre Vieira de Souza	Fortaleza - Ceará
Livia Carvalho de Paula	São José da Vitória - Bahia
Luciene Gonçalves Dumas Nascimento	Recife - Pernambuco
Manuela Rodrigues da Silva	Barreira- Ceará
Maria do Socorro Marinho Lima	Recife - Pernambuco
Martha Nadja Gonçalves de Oliveira	Recife - Pernambuco
Monica da Silva Costa	São José da Vitória - Bahia
Rosilene Gomes Ferreira de Moura	Recife – Pernambuco
Regina Antonia Lima da Silva	Fortaleza - Ceará
Silvana Lopes da Silva Santos	São José da Vitória - Bahia
Suzye Egley Tavares	Ilhéus – Bahia
2º Ano	
Débora Bahia Teixeira da Silva	Ilhéus – Bahia
Isael de Oliveira Varelo	Barreira – Ceará
Lindinalva dos Santos Teixeira Barbosa	São José da Vitória - Bahia
Maria Benevides dos Santos	São José da Vitória - Bahia
Maria Eleni Santos da Silva	São Gonçalo do Amarante - Ceará
Mônica Maria Wanderley Nunes Moneta	Recife - Pernambuco
Nadja S. D. R. Santos	Ilhéus – Bahia

Nayara Santana dos Santos	São José da Vitória - Bahia
Nelma Carla Florêncio Vilar	Recife – Pernambuco
Norma Maria Sousa de Lima	Fortaleza – Ceará
Roberta Conceição Vieira	São José da Vitória - Bahia
Samara Souza de Oliveira	Ilhéus – Bahia
Sandra Maria de Souza Cruz Serafim	Fortaleza- Ceará
Socorro Aclécia Araújo Pereira Medeiros	Barreira – Ceará
Zenaide dos Santos Sacramento	São José da Vitória - Bahia
3º Ano	
Adriana Costa Santos da Silva	Ilhéus – Bahia
Ana Paula Dantas Fonseca dos Anjos	Recife – Pernambuco
Andreia Luciana Cavalcante de Melo*	Recife – Pernambuco
Carla Roberta Fraga de Souza*	Recife – Pernambuco
Delvênia Maria Andrade Carvalho	Barreira – Ceará
Francisca Gislene Lopes Maciel Chagas	Barreira- Ceará
Hilda Benedito Costa Guerra	Recife – Pernambuco
Isabel Santos Gesteira	Ilhéus – Bahia
Janete Silva Nascimento	São José da Vitória - Bahia
Maria Anileide de Almeida Gomes	São Gonçalo do Amarante - Ceará
Maria Rita l. S. de Almeida	Ilhéus – Bahia
Marília Carvalho dos Santos Branco*	Recife - Pernambuco
Railda Mares Vieira	São José da Vitória - Bahia
Rita Márcia b. da Silva	Ilhéus - Bahia
Rosimery de Souza Silva	Recife - Pernambuco
Silvânia Maria de Assis	Recife - Pernambuco
Solange Maria Batista da Silva Soares	Recife – Pernambuco

Nota: * Professor atuava em cargo de Gestão e realizou as atividades com esse ano escolar.

CAPÍTULO I

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana

Débora Cabral Lima

1- TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais fornece um quadro teórico para trabalhar com elementos que fazem parte do desenvolvimento cognitivo do indivíduo, tais como, a linguagem, o raciocínio, a percepção e a memória.

Essa teoria concebe o conhecimento em Campos Conceituais e define o Campo Conceitual como um conjunto variado de situações, conceitos, conteúdos, relações e operações de pensamento, que podem estar interconectados durante o processo de aquisição (VERGNAUD, 1983).

As situações[1] são o ponto de entrada para um dado Campo Conceitual e elas dão sentido ao conceito e, esse, necessita de uma variedade de situações para tornar-se significativo (SANTANA, 2012).

Com essas concepções, a teoria auxilia o professor a analisar os processos pelos quais os estudantes adquirem o conhecimento, permitindo que ele tenha mais clareza sobre os elementos conceituais, as propriedades, as operacionalizações que estão sendo ensinadas e, assim, possa mediar situações nas quais exista a intenção de ampliar o conhecimento deles.

1 Usamos o termo situação como sinônimo de problema, situação-problema e tarefa.

Para que ocorra a aprendizagem de um conceito, o estudante precisa ser confrontado com diversas situações e essa aprendizagem pode ocorrer num longo período de tempo, por meio da experiência oportunizada ao longo dos anos, da maturação inerente ao desenvolvimento biológico e da aprendizagem possibilitada principalmente pela escola (VERGNAUD, 1996; SANTANA, 2012).

Ser confrontado com uma variedade de situações que deem sentido a um conceito e, com diferentes níveis de complexidade, é importante para que o estudante compreenda um determinado conceito, de modo que esse confronto propicie não apenas filiações, mas também rupturas, pois, às vezes, para a formação de uma competência, é preciso abandonar ideias assumidas anteriormente, para assumir outras ideias (VERGNAUD, 2011).

Referindo-se à multiplicação, a filiação, está ligada à adição por meio da soma de parcelas iguais, quando o estudante resolve as situações multiplicativas com o conhecimento do Campo Aditivo. A ideia de a multiplicação ser tratada apenas como soma de parcelas iguais, reduz o significado dessa operação. É necessário que o estudante compreenda que a adição de parcelas iguais não é suficiente para compreender e resolver algumas situações que envolvam a multiplicação, mas é essencial ter rupturas para que o estudante possa compreender o conceito de multiplicação e suas relações.

Um dos motivos para que a escola sustente essa ligação da adição com a multiplicação, relaciona-se

> [...] com a própria concepção de currículo que norteia a ação pedagógica do professor, qual seja: a ideia de que o currículo apresenta uma sequência lógica de conteúdos: primeiro se aprende a adição, depois a subtração e, em seguida, a multiplicação e a divisão (SANTOS, 2015, p. 100).

O professor, enquanto mediador, pode elaborar um conjunto de situações que não leve em consideração essa ordem, pois as ideias de cada uma dessas operações podem ser trabalhadas desde o primeiro ano da educação básica, sem que precise trabalhar com o algoritmo. Entretanto, o momento para a aprendizagem do algoritmo de cada uma dessas operações é que precisa ser organizado numa certa ordem.

Para o entendimento das relações envolvidas nas situações multiplicativas, é importante a compreensão da grandeza e das suas medidas.

As grandezas são atributos de objetos[2], isto é, características ou qualidades de objetos, que não pertencem à essência do objeto, porém é determinada por essa essência. Escolhido um atributo, é possível comparar objetos conforme esse atributo (MORAIS; TELES, 2014). Por exemplo, comprimento, largura, altura são atributos de uma caixa.

Para comparar as grandezas é preciso que elas tenham a mesma natureza: comprimento com comprimento, temperatura com temperatura, unidades com unidades, etc. Ao observar dois terrenos podemos escolher o atributo área e comparar: quantas vezes a área de um terreno é maior que a outra, qual a maior área ou qual a menor área.

A medida de uma grandeza é determinada por meio da comparação com uma unidade de medida e o resultado de cada medição é expresso por um número indicando a unidade de medida (MORAIS; TELES, 2014).

Para a representação numérica de grandeza, podemos assumir que é um par formado pelo número (medida) e a unidade de medida escolhida. Mas, não apenas as medidas padronizadas compõem as unidades de medida de uma grandeza, vejamos a situação do Exemplo 1:

Exemplo 1: Na bandeja rosa cabem seis copos e, na bandeja verde, três copos.

A natureza da grandeza envolvida é a capacidade de cada bandeja que será determinada pela quantidade[3] de copos que se pode colocar em cada bandeja. Nesse exemplo, predomina a contagem dos elementos e usamos a unidade como medida.

Considerando que elementos como números, pessoas, conjuntos, pacotes, entre outros, podem ser relacionados entre si, é possível observar relações: a ternária e a quaternária.

2 Objeto está colocado na perspectiva da Semiótica de Peirce (PEIRCE, C. S. Semiótica. Tradução de NETO, J.T.C. São Paulo: Perspectiva, 2012).

3 Quantidade como uma qualidade do que pode ser contado ou medido..

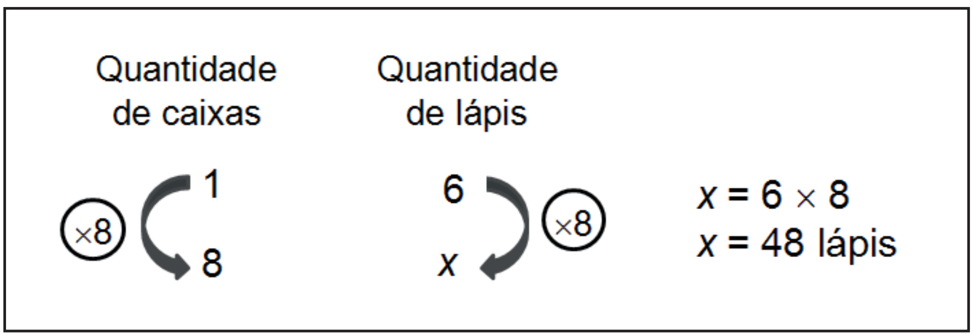
A relação ternária é definida como uma ligação de "três elementos entre si" e, a quaternária, de quatro elementos entre si. A relação quaternária tem frequentemente a forma "a está para b assim como c está para d" (VERGNAUD, 2014, p. 57-72).

Nas relações quaternárias em que as quantidades podem assumir a forma *a* está para *b*, assim como *c* está para *d*, a correspondência entre as quantidades pode ser determinada pelo operador escalar e pelo operador funcional e, esses operadores, podem ser usados como esquema de resolução de situações com essas relações.

O operador escalar permite a transformação entre as medidas de uma mesma grandeza e é representado por um número (operador escalar – porque não tem a unidade de medida). Um exemplo:

Exemplo 2: Se em uma caixa tem seis lápis, quantos lápis terão em oito caixas iguais a essa?

Figura 1.1 – Esquema de resolução com o uso do operador escalar

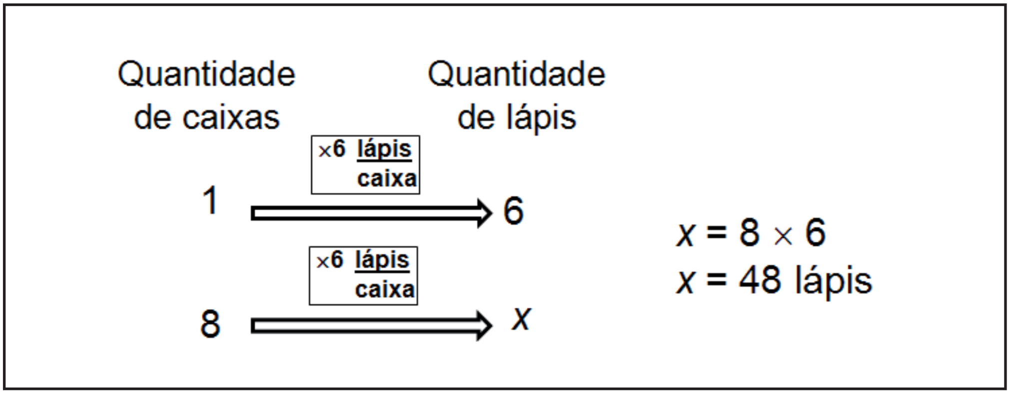


Fonte: Rede E-Mult (2013-2017)

A Figura 1.1 evidencia um esquema de resolução com o uso do operador escalar para a situação do Exemplo 2. Na grandeza quantidade de caixas, 1 e 8 representam as quantidades de caixas e são medidas, oo operador escalar (X8) permite passar de uma para oito caixas de lápis. Como as grandezas são proporcionais, esse mesmo operador (X8), permite passar de seis para *x*. Assim, em oito caixas, têm-se 48 lápis.

O operador funcional expressa a passagem das medidas de uma grandeza para outra (grandezas distintas). Na relação de uma grandeza em função da outra, a Figura 1.2 apresenta o operador funcional para o Exemplo 2.

Figura 1.2 – Esquema de resolução com o uso do operador funcional



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

O operador funcional (×6) permite passar da grandeza quantidade de caixas para a grandeza quantidade de lápis. Têm-se uma caixa vezes seis lápis por caixa, o que resulta em 48 lápis. Esse operador expressa a passagem da medida da grandeza quantidade de caixas para a medida da grandeza quantidade de lápis à qual está relacionada. Visando discutir mais o Campo Conceitual Multiplicativo, colocamos, a seguir, a sua definição.

1.1 O Campo Conceitual Multiplicativo

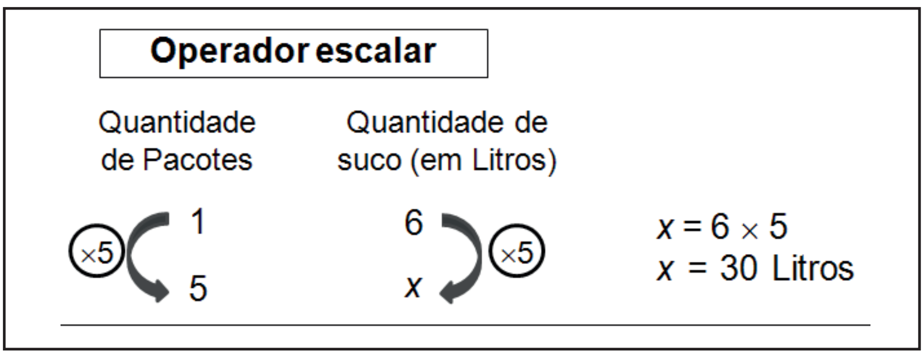
O Campo Conceitual Multiplicativo ou Estruturas Multiplicativas é o conjunto das situações que podem ser resolvidas com o uso de uma ou de várias multiplicações ou divisões e os conceitos e teoremas que permitem analisar e resolvê-las, como, por exemplo: proporção simples, proporção múltipla, fração, múltiplo, divisor, entre outros (VERGNAUD, 1996).

Vamos exemplificar aqui três formatos de situações em que se pode utilizar as operações de multiplicação ou de divisão para a sua resolução: Proporção Direta, Comparação Multiplicativa e Produto de Medidas. A primeira está associada à proporcionalidade entre as grandezas distintas (quantidade de pacotes, quantidade de biscoitos, quantidade em metros, valor em dinheiro, quantidade de pessoas, entre outras) e tem o foco na Proporção Direta[4] (simples, dupla e múltipla). Quando temos duas grandezas, temos quatro medidas (quantidade) relacionando-se e caracterizando uma relação quaternária.

Exemplo 3: Um pacote de suco em pó rende seis litros. Se Marisa comprar cinco pacotes iguais a ele, quantos litros de suco ela poderá fazer?

No Exemplo 3, existem duas grandezas, a quantidade de pacotes e a quantidade de litros de suco:

Figura 1.3 – Esquema com as grandezas do Exemplo 3



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

4 Quando as grandezas de uma situação são diretamente proporcionais, ou seja, se a medida de uma das grandezas aumenta (ou diminui), a medida da outra grandeza aumenta (ou diminui) na mesma proporção. Neste livro abordamos apenas situações que são diretamente proporcionais.

A quantidade de pacotes aumentou significando que a quantidade de litros também vai aumentar. A essa relação de aumento que uma grandeza influencia na outra é chamada proporção e, no Exemplo 3, é direta porque as duas aumentam.

Será uma proporção direta entre as grandezas quando a medida de uma grandeza aumentar e a medida da outra grandeza também aumentar ou se a medida de uma grandeza diminuir a outra também diminuir.

A segunda forma de relação multiplicativa é o Produto de Medidas e relaciona três medidas, refere-se a uma Relação Ternária pois, relaciona uma medida ao produto de duas outras. Vejamos o Exemplo 4.

Exemplo 4: Alice quer comprar um tapete para a sala e, para ir à loja, ela mediu o comprimento de 2m e a largura de um metro e meio do espaço que será ocupado pelo tapete. Qual será a área da sala a ser coberta pelo tapete?

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Área} = \text{comprimento} \times \text{largura} \\ \text{Área} = 2 \times 1{,}5 = 3 \\ \text{Área} = 3\text{m}^2 \end{array}\right.$$

A medida da área é o produto das duas outras medidas: o comprimento e a largura.

A terceira forma de relação multiplicativa é a Comparação Multiplicativa que relaciona três elementos, sendo que um dos elementos relaciona os outros dois.

Exemplo 5: Ana tem 12 lápis de cor e Pedro tem três vezes mais lápis de cor do que Ana. Quantos lápis de cor Pedro tem?

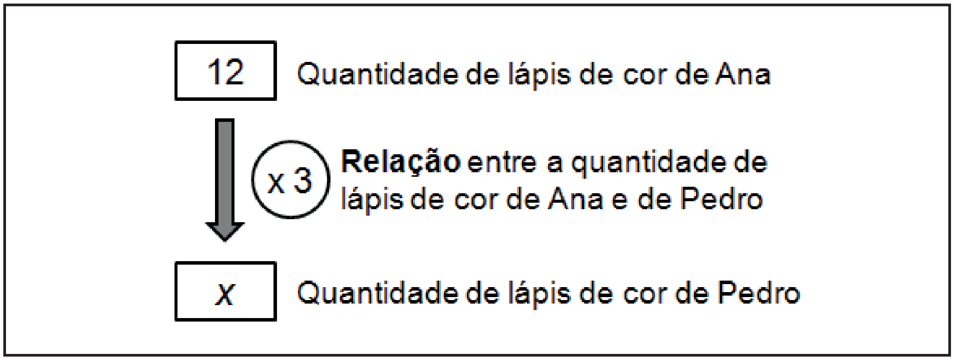
Quantidade de lápis de cor de Ana = 12

Relação entre a quantidade lápis de cor de Ana e de Pedro = 3 vezes mais

Quantidade de lápis de cor de Pedro = x

Para saber a quantidade de lápis de cor de Pedro, é preciso saber a quantidade de lápis de cor de Ana e a relação que existe entre elas (três vezes mais). Temos a Relação Ternária, pois estabelece a relação entre três elementos.

Figura 1.4 - Esquema com os elementos do Exemplo 5

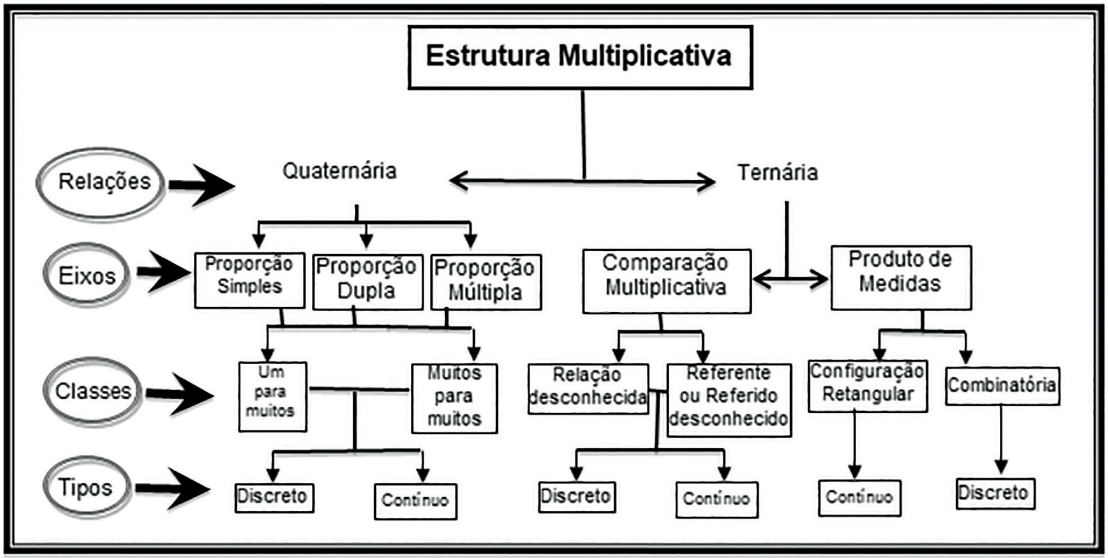


Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Para compreendermos essas três formas de relação multiplicativa (Proporção Direta, Comparação Multiplicativa e Produto de Medidas), tomamos como base a estrutura ternária e quaternária, que foi colocada inicialmente por Vergnaud (1983, 1996, 2014), sendo adaptada por Magina, Merlini e Santos (2014).

Consideramos o campo numérico dos números racionais para a classificação apresentada na Figura 1.5.

Figura 1.5 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2014).

O esquema mostra o Campo Multiplicativo (Estrutura Multiplicativa) dividido nas relações quaternária e ternária. A primeira subdivide-se em eixos de Proporções Diretas (Proporção Simples, Proporção Dupla e Proporção Múltipla) e, a segunda, no eixo da Comparação Multiplicativa e do Produto de Medidas. São do tipo discreto, se são passíveis de contagem e, do tipo contínuo, se são passíveis de mensuração, podendo assumir valores decimais (quantidade em metros, quantidade em quilogramas, valor em dinheiro...). A seguir, discutiremos situações com relação quaternária.

1.2 Situações com a relação quaternária

Para compreender a organização da relação quaternária no eixo Proporção Simples, conforme a classificação da Figura 1.5, descreveremos algumas situações que nos permitem analisá-las.

A **Proporção Simples** é uma relação proporcional entre duas grandezas, envolvendo quatro medidas. Elas podem ser classificadas na classe de um para muitos ou de muitos para muitos.

PROPORÇÃO SIMPLES UM PARA MUITOS

As situações classificadas na classe um para muitos associa uma unidade de uma grandeza com várias unidades da outra grandeza. Vejamos o Exemplo[5] 6.

Exemplo 6: Joana sabe que em um pacote há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?

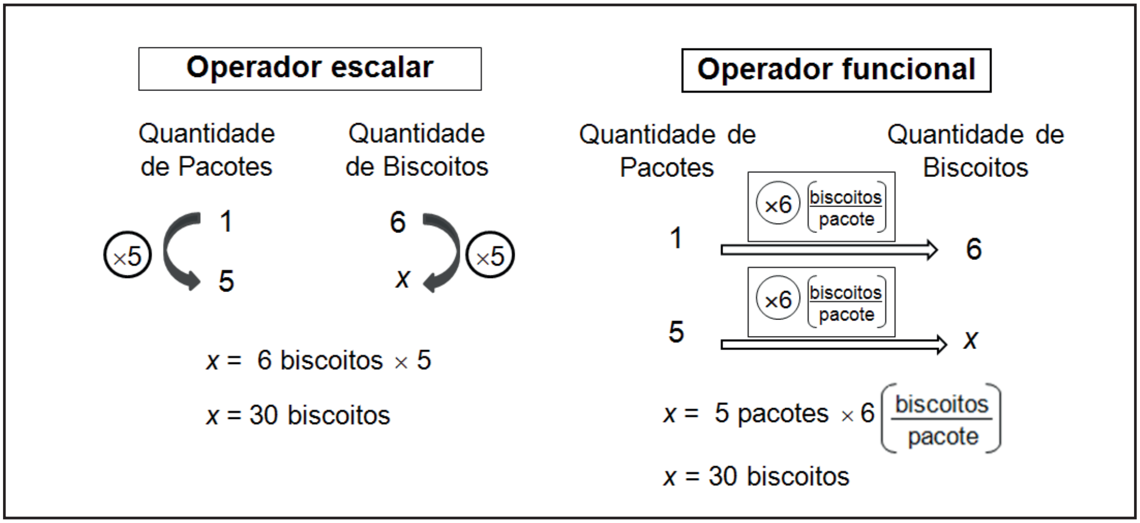
O Exemplo 6 pode ser resolvido com uma multiplicação e usando procedimentos diferentes – o operador escalar multiplicativo ou o operador funcional, ver a Figura 1.6.

Exemplo 6 - Relação quaternária, eixo da Proporção Simples, classe muitos para muitos.

Grandezas - Quantidade de pacotes e quantidade de biscoitos.

5 As situações dos exemplos de 6 a 17, com exceção das situações 9 e 13, são apresentadas aqui conforme elaboradas nas ações da Rede E-Mult, para compor o teste diagnóstico da pesquisa.

Figura 1.6 – Proposta de resolução do
Exemplo 6 com operador escalar e operador funcional



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

A análise dessa situação possibilita perceber a existência dos dois operadores: a) o operador escalar que está descrito na transformação entre as medidas (quantidade de pacotes e quantidade de biscoitos) de uma mesma grandeza; b) o operador funcional que ocorre entre as medidas de grandezas distintas (de quantidade de pacotes para quantidade de biscoitos).

Ao analisar o operador existente entre as medidas da grandeza quantidade de pacotes, observamos que, de um para cinco, houve uma ampliação de cinco vezes, em relação ao estado inicial (de um para cinco, multiplicou por cinco). Esse operador escalar (×5) é que faz a correspondência de um pacote para cinco pacotes. E, pela proporcionalidade entre as grandezas, operador escalar (×5) é o mesmo que deve transformar a medida da grandeza quantidade de biscoitos.

Em um pacote de biscoitos, há seis biscoitos, ou seja, 6(biscoitos/(pacote de biscoitos)), nas mesmas condições e queremos encontrar quantos biscoitos existem em cinco pacotes. Ao multiplicar um pacote pelo operador funcional 6(biscoitos/(pacote de biscoitos)), temos a quantidade de seis biscoitos. A relação entre as grandezas é proporcional e ampliada seis vezes, portanto, a quantidade de 30 biscoitos é encontrada multiplicando 5 pacotes por 6(biscoitos/(pacote de biscoitos)).

Essa situação do Exemplo 6 pode ser elaborada buscando a quantidade de pacotes de biscoito ou a quantidade de biscoitos por pacote, o que modifica a complexidade da situação, vejamos:

Exemplo 6(a) – Joana sabe que em um pacote há seis biscoitos. Ela tem 30 biscoitos. Quantos pacotes Joana tem?

Exemplo 6(b) – Joana sabe que 30 biscoitos foram embalados igualmente em cinco pacotes. Ela tem um pacote. Quantos biscoitos Joana tem?

A Figura 1.7 apresenta o esquema de resolução para as situações dos exemplos 6, 6(a) e 6(b).

Figura 1.7 – Esquemas de resolução observando diferentes níveis de complexidade

Exemplo 6		**Exemplo 6(a)**		**Exemplo 6(b)**	
Quantidade de Pacotes	Quantidade de Biscoitos	Quantidade de Pacotes	Quantidade de Biscoitos	Quantidade de Pacotes	Quantidade de Biscoitos
1	6	1	6	1	***x***
5	***x***	***x***	30	5	30

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Com os exemplos das situações 6, 6(a) e 6(b) queremos mostrar a importância de selecionar e confrontar o estudante com situações com diferentes níveis de complexidade. Podemos observar que, no Exemplo 6, a quantidade de pacotes aumenta cinco vezes, com a ideia de que o operador escalar multiplica a quantidade de biscoitos em cada pacote por cinco e determina a quantidade de biscoitos para cinco pacotes, utilizando uma multiplicação para resolver a situação.

No Exemplo 6(a), para determinar o operador escalar, divide-se a quantidade total de biscoitos pela quantidade de biscoitos por pacote. Esse tipo de divisão é chamado divisão por quota (divisão entre as medidas de uma mesma grandeza). O resultado da divisão é o valor do escalar que, multiplicado por um, da grandeza quantidade de pacotes, vai determinar a resposta da situação.

No Exemplo 6(b), para determinar o operador escalar, divide-se a quantidade total de pacotes por um. O operador escalar 5 deve ser usado para determinar a quantidade de biscoitos por pacote, ou seja, divide-se a quantidade total de biscoitos (30) pelo escalar (5). Outra forma de resolver sem pensar no operador escalar é utilizar o operador funcional, usar o que denominamos divisão por partição (divisão entre as medidas de grandezas distintas), dividir 30 (quantidade total de biscoitos) por 5 (quantidade total de pacotes).

Ao alterar o termo desconhecido nas situações, é possível observar que o nível de complexidade da situação varia, pelas relações a serem compreendidas em cada situação e pela operação a ser utilizada. Mas, é importante que o professor confronte os estudantes com situações que estimulem o raciocínio e favoreçam a constituição de novas aprendizagens.

PROPORÇÃO SIMPLES MUITOS PARA MUITOS

A segunda classe da relação quaternária do eixo da Proporção Simples é de muitos para muitos. Nessa classe, a medida de **uma unidade** não está expressa para nenhuma das grandezas da situação dada, ou seja, as medidas envolvidas na situação são diferentes de um. Vejamos um exemplo:

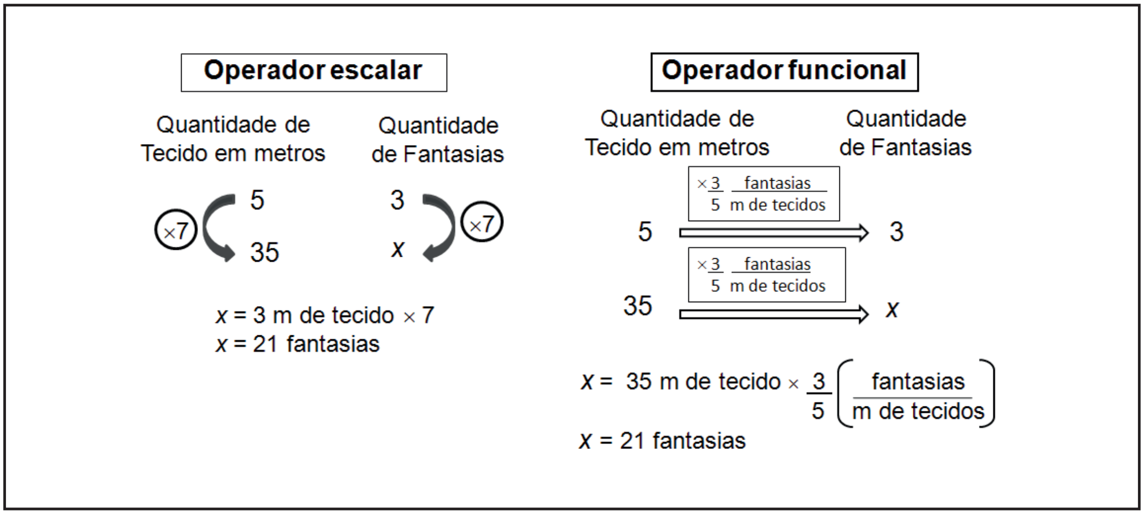
Exemplo 7: Para fazer 3 fantasias, são necessários 5 m de tecido. Ana tem 35 m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?

Vejamos, na Figura 1.8, dois esquemas para solucionar essa situação, um usando operador escalar e, outro, o operador funcional.

Exemplo 7 - Relação quaternária, eixo da Proporção Simples, classe muitos para muitos.

Grandezas - Quantidade de tecido em metros e quantidade de fantasias.

Figura 1.8 – Proposta de esquemas de resolução para o Exemplo 7



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Para encontrar o operador escalar na razão entre as medidas da metragem de tecido de 5 para 35 metros, ocorre uma ampliação de sete vezes, que pode ser encontrada dividindo 35 por 5 e resultando no operador escalar 7. A proporcionalidade permite que o operador seja mantido entre as medidas da quantidade de fantasias de forma a recorrer à multiplicação para encontrar o resultado: 21 fantasias feitas com 35 metros de tecido.

O operador funcional entre as medidas 5 metros de tecido e 3 fantasias é de (3/5 fantasias por metro de tecido). Aqui, para resolver, recorremos às operações: multiplicação (o produto do número natural 35 pelo número racional 3/5) e também divisão (observada na razão entre 3 e 5 expressa em 3/5).

Considerando o ano escolar em que estejam sendo abordados os conceitos do Campo Conceitual Multiplicativo, a resolução da situação com o operador funcional pode ficar mais complexa, pois ele expressa uma relação entre as medidas de duas grandezas, tornando-o mais difícil de compreensão.

No quarto e quinto ano do ensino fundamental, é importante que o operador funcional seja apresentado (mas não exigido como forma de resolver a situação) permitindo o reconhecimento da existência dos dois operadores: na vertical entre as medidas de uma mesma grandeza (operador escalar) e, na horizontal, entre as medidas de grandezas distintas (operador funcional).

PROPORÇÃO DUPLA

O segundo eixo da relação quaternária é a **Proporção Dupla**. Nas situações que envolvem esse eixo tem-se, no mínimo, três grandezas de diferentes naturezas. Quando se tem três grandezas, uma é proporcional às outras duas. Uma grandeza é diretamente proporcional a cada uma das outras. O Exemplo 8 apresenta uma situação de Proporção Dupla.

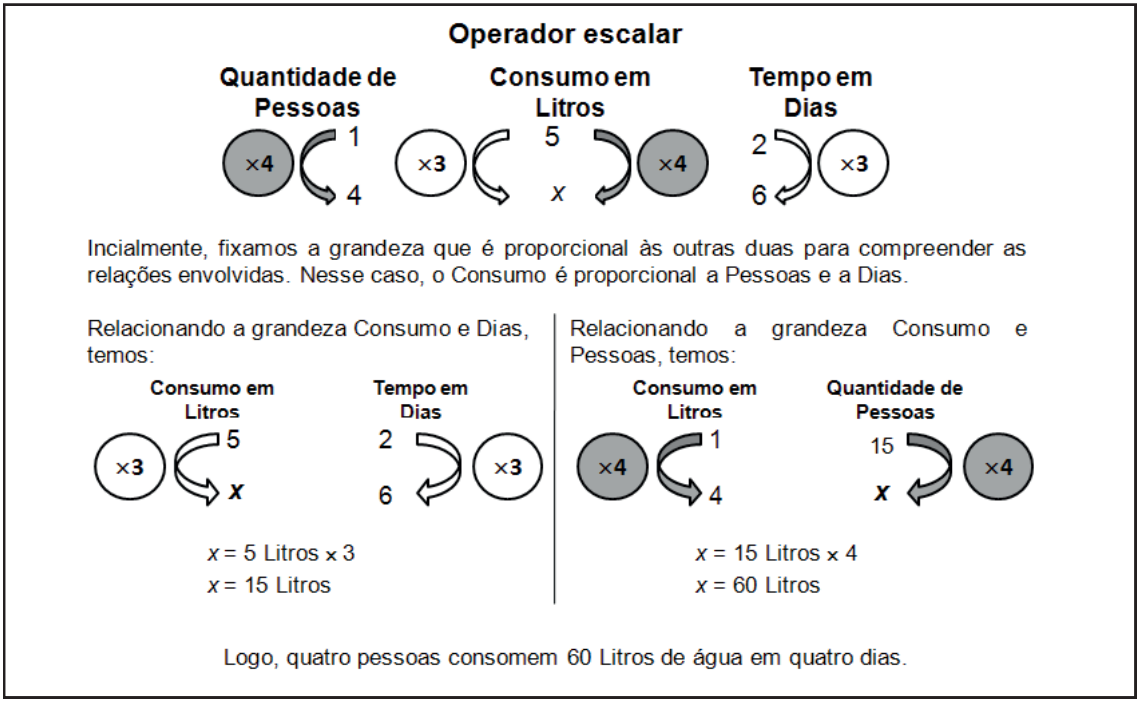
Exemplo 8: Uma pessoa consome, em média, 5 litros de água em 2 dias. Quantos litros de água consumirá uma família composta por 4 pessoas em 6 dias?

Nessa situação, a grandeza consumo em litros é proporcional à quantidade de pessoas e à quantidade de dias, mas essas duas últimas não são proporcionais entre si, pois, se variarmos a quantidade de dias, não altera a quantidade de pessoas. Apresentamos na Figura 1.9 um esquema de proposta de solução do Exemplo 8.

Figura 1.9 – Proposta de esquema para resolução
do Exemplo 8 com o operador escalar

Exemplo 8 - Relação quaternária, eixo da Proporção Dupla, classe um para muitos e muitos para muitos.

Grandezas - Quantidade de pessoas, consumo em litros e tempo em dias.



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na Figura 1.9, são apresentadas as três grandezas (Quantidade de pessoas, Consumo em litros e Consumo em dias) e as suas medidas. Para resolver a situação (lado esquerdo), tomamos duas proporcionais (Consumo em litros e Tempo em dias) e, para encontrar o consumo de uma pessoa em seis dias, aplicamos o operador escalar (×3), ou seja, multiplicamos a quota de 5 litros pelo operador escalar (×3) e obtivemos 15 litros. Em seguida (lado direito), relacionamos as grandezas, Quantidade de Pessoas e Consumo em Litros, para saber quantos litros quatro pessoas consomem em seis dias. Assim, aumentando a quantidade de pessoas (de uma para quatro), alterou-se o consumo, mas não houve interferência nos dias. Do mesmo modo, aumentando o número de dias (de dois para seis) em nada influenciou no número de pessoas. Por esses motivos, dizemos que, na Proporção Dupla, as grandezas não são todas proporcionais entre si, assumem duplas de proporcionalidades.

PROPORÇÃO MÚLTIPLA

Na relação quaternária, o eixo da **Proporção Múltipla** envolve mais de duas grandezas com Proporções Simples que são encadeadas, ou seja, ao aumentar ou diminuir a quantidade de uma das grandezas, consequentemente, aumenta ou diminui as demais na mesma proporção. A característica elementar é as quantidades possuírem uma relação de dependência. O Exemplo 9 retrata uma situação de Proporção Múltipla, classe um para muitos.

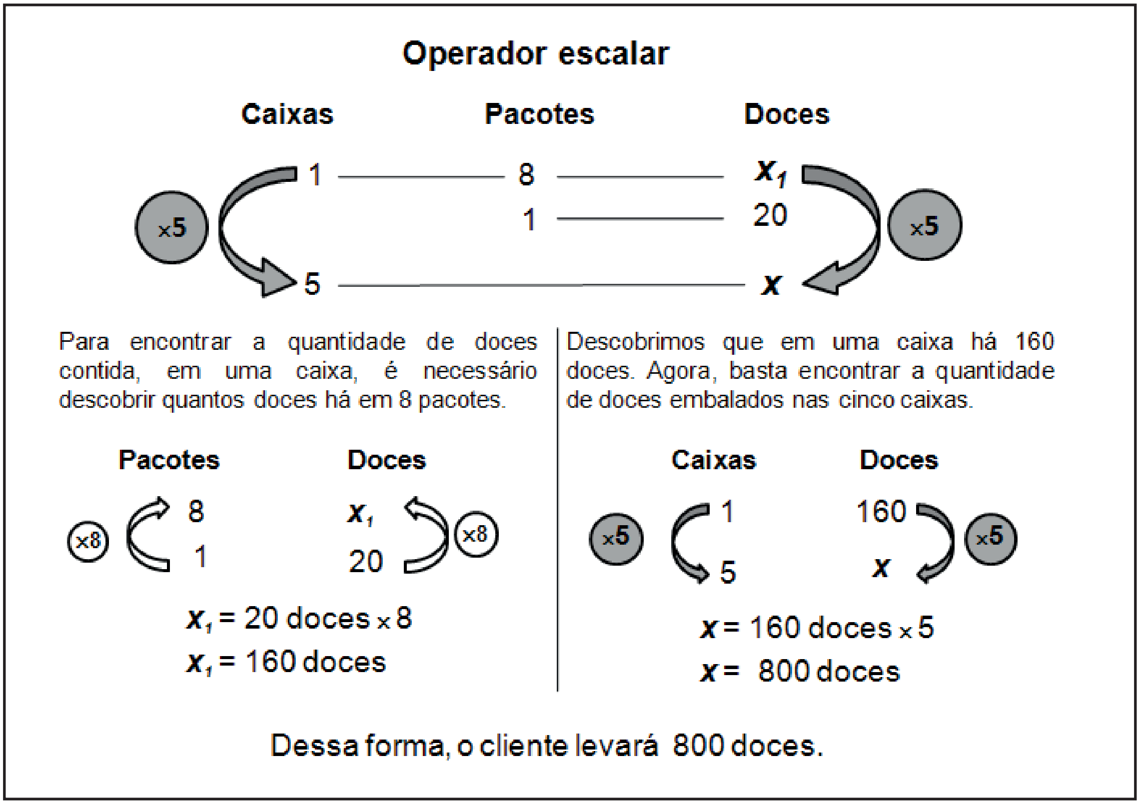
Exemplo 9: Dona Maria vende caixas com pacotes de doce. Em uma caixa, há oito pacotes. Cada pacote contém 20 doces. Se vender cinco caixas, quantos doces o cliente levará?

Apresentamos, na Figura 1.10, uma possível solução para essa situação utilizando o operador escalar.

Exemplo 9 - Relação quaternária, eixo da Proporção Múltipla, classe um para muitos.

Grandezas - Quantidade de caixas, quantidade de pacotes e quantidade de doces.

Figura 1.10 – Proposta de esquema para resolução do Exemplo 9 com o operador escalar



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na situação do Exemplo 9, podemos perceber que as grandezas envolvidas são proporcionais, o que nos permite encontrar os (160) doces contidos em oito pacotes realizando uma proporção simples entre as grandezas "pacotes" e "doces". Tendo essa quantidade, determinamos o total de 800 doces obtidos na compra de cinco caixas. Observe que, ao aumentar a quantidade de pacotes, o mesmo acontece com os doces e, aumentando o número de caixas, aumentamos a quantidade de doces. Assim, utilizamos duas Proporções Simples encadeadas, o que caracteriza uma Proporção Múltipla. A seguir, discutiremos a respeito da relação ternária.

1.3 Situações com a relação ternária

No esquema da Figura 1.5, a relação ternária tem dois eixos: Comparação Multiplicativa e Produto de Medidas. A seguir, analisaremos esses eixos.

COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA

Para a Comparação Multiplicativa, vamos usar a separação das classes, feita por Lima (2016), identificando cada classe desse eixo separadamente, nomeadamente: relação, referente e referido. A situação, a seguir, é um exemplo.

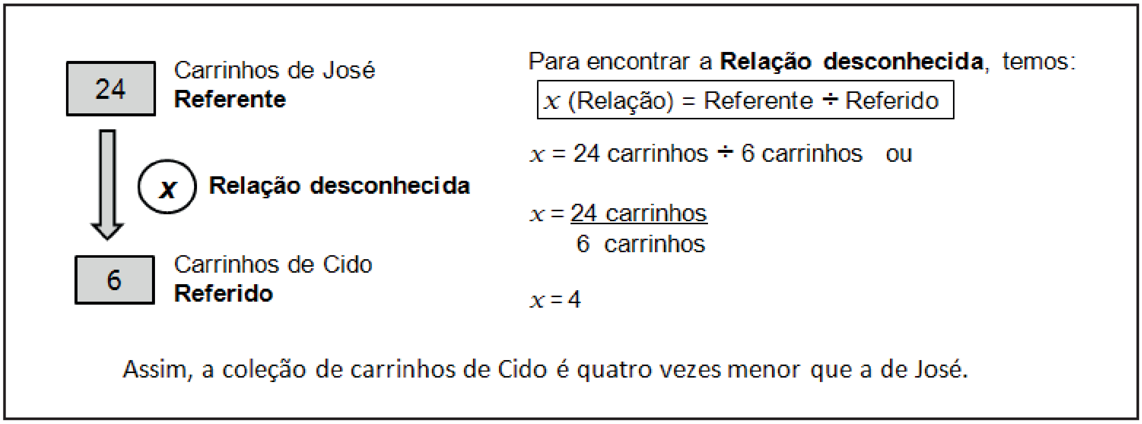
Exemplo 10: Cido tem uma coleção de 6 carrinhos e José tem uma de 24 carrinhos. Quantas vezes a coleção de Cido é menor do que a de José?

A relação desconhecida é o operador que transforma uma medida e trata-se de um escalar. O referente é a medida referencial para estabelecer a comparação entre os elementos. O referido é a medida que depende do referente.

Entre o referente e o referido, a relação exprime, por exemplo, a ideia de 'vezes maior', 'vezes mais', 'vezes menor' ou 'vezes menos'. A Figura 1.11 apresenta um esquema de resolução para o Exemplo 10.

Exemplo 10 - Relação ternária, eixo da Comparação Multiplicativa, relação desconhecida.

Figura 1.11 – Proposta de esquema para resolução da situação do Exemplo 10



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Observe que a relação estabelecida parte da quantidade de carrinhos de José (referente) para a quantidade de carrinhos de Cido (referido). E, ao dividir essas quantidades, determinamos a relação entre elas, sendo que a coleção de carrinhos de Cido é quatro vezes menor que a de José.

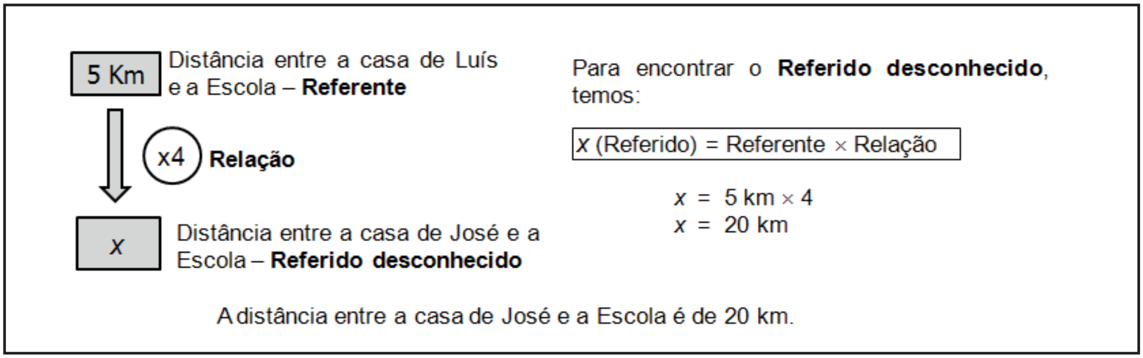
Vejamos outro exemplo de situação da Comparação Multiplicativa.

Exemplo 11: A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?

A Figura 1.12 mostra um esquema de resolução.

Exemplo 11 - Relação ternária, eixo da Comparação Multiplicativa, referido desconhecido.

Figura 1.12 – Proposta de esquema para resolução para a Situação 11



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Podemos observar (Figura 1.12) que o referente é a medida da distância entre a casa de Luís e a escola e constitui-se no ponto de partida para resolver a situação, ou seja, a referência. Busca-se o referido (medida da distância entre a casa de José e a Escola). Entre as medidas, existe uma relação (quatro vezes mais distante), dada por um escalar que amplia a medida do referente e, assim, o referido é o produto entre elas: $5\text{km} \times 4 = 20\text{km}$.

A solução dessa situação também é possível por meio da adição de parcelas iguais ($5 + 5 + 5 + 5 = 20$). No entanto, salientamos a necessidade de ampliar o significado da multiplicação não se reduzindo apenas a esse significado.

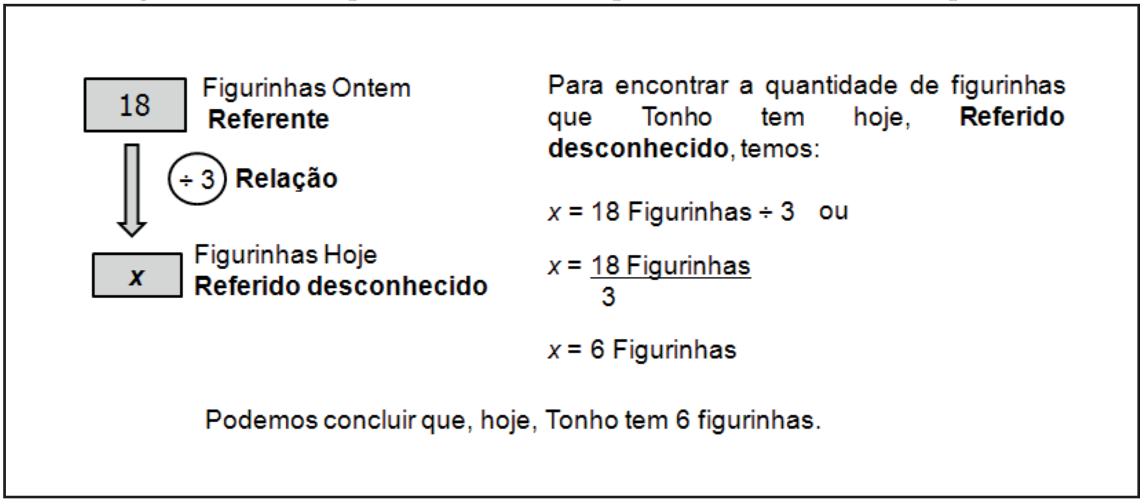
O Exemplo 12 é uma situação da Comparação Multiplicativa.

Exemplo 12: Ontem Tonho tinha 18 figurinhas e hoje ele tem 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele tem hoje?

Vejamos, na Figura 1.13, uma possível resolução para essa situação.

Exemplo 12 - Relação ternária, eixo da Comparação Multiplicativa, referido desconhecido.

Figura 1.13 – Proposta de resolução para a situação do Exemplo 12



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

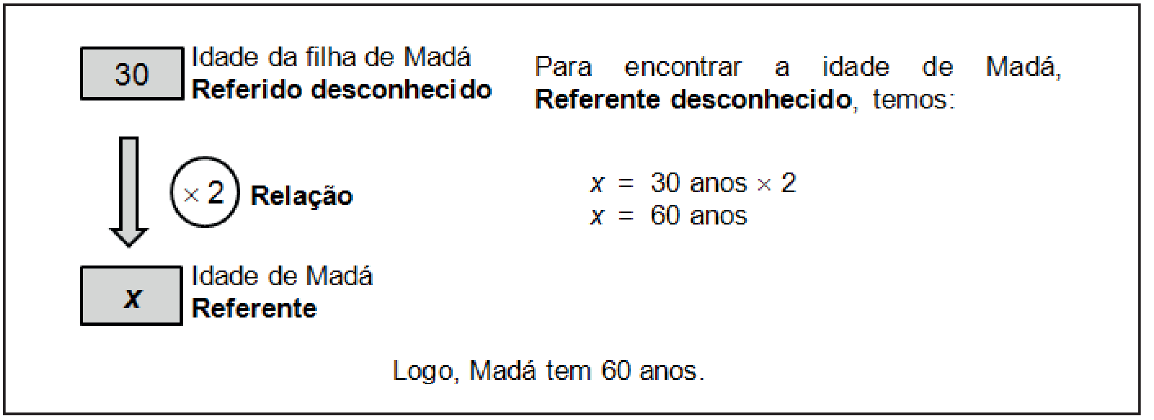
Na situação do Exemplo 12, busca-se a quantidade de figurinhas que Tonho tem hoje (referido desconhecido), a partir da quantidade de figurinhas que Tonho tinha ontem (referente). A relação entre o referente e o referido é de "três vezes menos". Essa expressão remete-nos a uma redução de quantidades e está representada no quociente entre a medida do Referente e o escalar da Relação (18 figurinhas ÷ 3 = 6 figurinhas).

O Exemplo 13 é outra situação de Comparação Multiplicativa.

Exemplo 13: A filha de Madá tem 30 anos. Sabendo que a filha é duas vezes mais nova que a mãe, qual a idade de Madá?

Exemplo 13 - Relação ternária, eixo da Comparação Multiplicativa, referente desconhecido.

Figura 1.14 – Proposta de resolução para a situação do Exemplo 13



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Observe, na Figura 1.14, que a idade da filha de Madá é colocada como dependente da idade de Madá. Assim, a idade da mãe constitui-se numa referência (referente desconhecido) para se determinar a idade da filha (referido). A relação indica uma divisão, pois a expressão "duas vezes mais nova" representa que a idade da filha será a metade da idade da mãe. Em sala de aula, é essencial a discussão para a compreensão da relação envolvida na situação e, depois, efetivar a resolução em nível de cálculo numérico.

PRODUTO DE MEDIDAS

A relação ternária do eixo **Produto de Medidas** é composta por duas classes: a Configuração Retangular e a Combinatória. Vergnaud (2014, p. 264) afirma que elas podem envolver uma multiplicação, quando se quer "encontrar a medida-produto, conhecendo-se as medidas elementares" ou uma divisão, quando se procura "as medidas elementares", conhecendo-se a outra e a medida-produto.

PRODUTO DE MEDIDAS – CONFIGURAÇÃO RETANGULAR

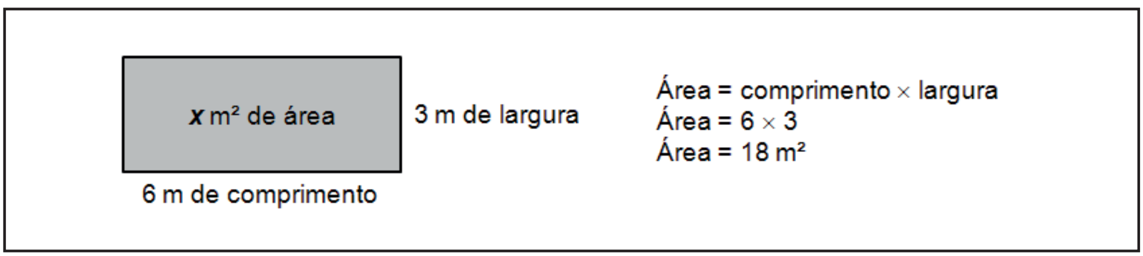
Assumimos que, na **Configuração Retangular**, as medidas referem-se às formas retangulares. A ideia de retangular baseia-se na tabela cartesiana, pois, para Vergnaud (2014, p. 254), "é a noção de produto cartesiano de conjuntos que explica a estrutura do produto de medidas".

Quando no referimos a grandezas diferentes (comprimento, área, volume), as unidades de medida são distintas para cada uma delas. A unidade de medida de comprimento é o metro – comprimento de um segmento de reta. A unidade de área 1m2 representa a área de um quadrado com 1 m de lado e não resulta de fazer 1m x 1m, pois não se podem multiplicar as unidades de grandezas. O mesmo para a unidade de volume – 1m3 é o volume de um cubo com 1m de aresta.O Exemplo 14 apresenta uma situação da Configuração Retangular.

Exemplo 14: Rute quer mudar o piso do quarto dela. Este quarto tem 3m de largura e 6m de comprimento. Quantos metros quadrados Rute precisa comprar?

Exemplo 14 - Relação Ternária, eixo Produto de Medidas, configuração retangular.

Figura 1.15 – Proposta de resolução para a situação do Exemplo 14



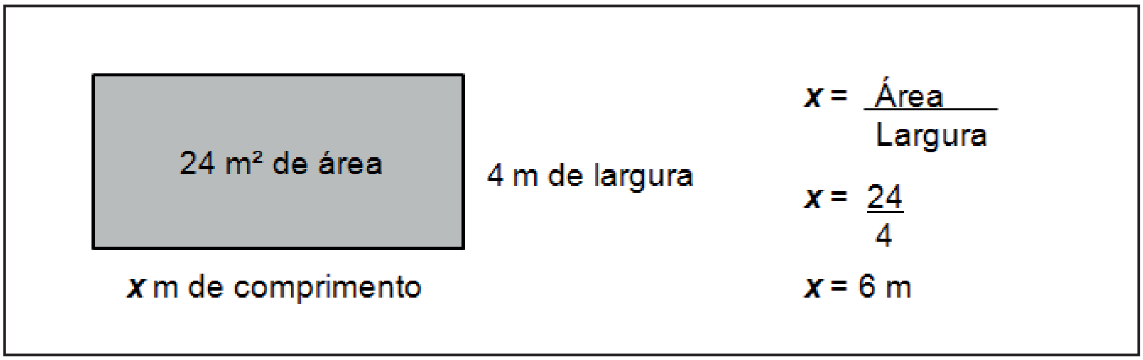
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Observe na Figura 1.15, que se dispõe de duas quantidades (comprimento e largura) e procura uma terceira medida de outra quantidade (área). Nesse caso, o produto entre as medidas lineares (comprimento e largura) resulta na medida da área da superfície. Assim, 6 x 3 tem como resultado 18, ou seja, a área é de 18m². Vejamos outro exemplo de Configuração Retangular.

Exemplo 15: A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem $24m^2$. A largura é 4m. Qual é o comprimento em metros desse jardim?

Exemplo 15 - Relação ternária, eixo Produto de Medidas, configuração retangular.

Figura 1.16 – Proposta de resolução para a situação do Exemplo 15



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Observe na Figura 1.16 que as medidas apresentadas são: a medida da área, 24 em m² (o todo, a medida-produto), a medida da largura, 4 em m (uma das partes) e se deseja encontrar a medida do comprimento (a outra parte). Para isso é necessário recorrer a operação de divisão entre as medidas das grandezas - área e largura - ($24 \div 4 = 6$) para encontrar o resultado.

PRODUTO DE MEDIDAS – COMBINATÓRIA

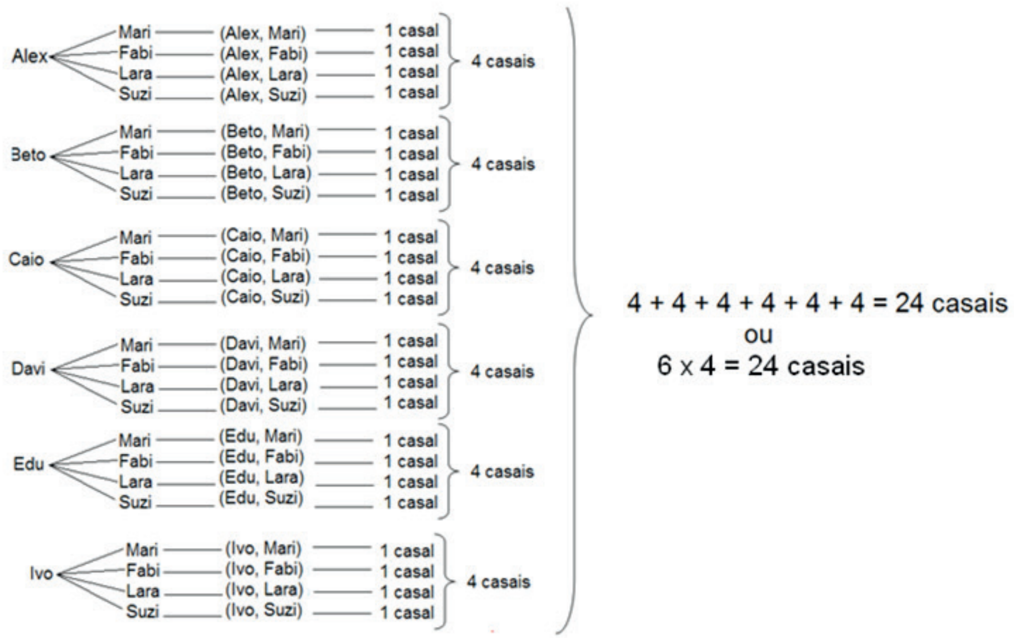
Nas situações de **Combinatória** que envolvem uma relação ternária, é possível fazer o produto entre as quantidades de elementos de dois conjuntos e se determinar a quantidade de elementos de um novo conjunto. Vejamos um exemplo.

Exemplo 16: Na aula de dança de forró tinham 6 rapazes (Alex, Beto, Caio, Davi, Edu, Ivo) e 4 moças (Mari, Fabi, Lara, Suzi). Todas as moças dançaram com todos os rapazes. Quantos casais diferentes foram formados?

A Figura 1.17 mostra uma resolução partindo do diagrama de árvore.

Exemplo 16 - Relação ternária, eixo Produto de Medidas, Combinatória.

Figura 1.17 – Proposta de resolução para a situação do Exemplo 16



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Nessa situação, são apresentadas as partes, o número de rapazes e de moças e busca-se o todo que é a quantidade de casais formados com as duas partes.

É possível que o estudante adicione as quantidades dos conjuntos obtidos pelas combinações entre os seis rapazes e as quatro moças ($4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24$), mas também, é possível que ele opte por efetuar o produto das quantidades correspondentes aos rapazes e às moças, isto é, 6 rapazes × 4 moças = 24 casais diferentes. Vejamos outro exemplo:

Exemplo 17: A lanchonete do Ernani vende 15 tipos de sanduíches. Para cada sanduíche, é usado apenas um tipo de pão e um tipo de recheio. Tem 3 tipos de pão (leite, integral, francês). Quantos tipos de recheio são necessários para fazer todos os tipos de sanduíche?

Exemplo 17 - Relação ternária, eixo Produto de Medidas, Combinatória.

Figura 1.18 – Proposta de resolução para a situação do Exemplo 17

		Pães		
		Leite	Integral	Francês
Recheio	R_1	(Leite, R_1)	(Integral, R_1)	(Francês, R_1)
	R_2	(Leite, R_2)	(Integral, R_2)	(Francês, R_2)
	R_3	(Leite, R_3)	(Integral, R_3)	(Francês, R_3)
	R_4	(Leite, R_4)	(Integral, R_4)	(Francês, R_4)
	R_5	(Leite, R_5)	(Integral, R_5)	(Francês, R_5)
				15 sanduíches

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na situação do Exemplo 17, são dadas as quantidades de tipos de sanduíches (o todo) e os tipos de pães (uma das partes) e, procura-se a quantidade de recheio (a outra parte). Para resolver, efetuamos a divisão entre as grandezas 15 tipos de sanduíches e 3 tipos de pães (15 ÷ 3 = 5). Podemos observar que essa situação é diferente da anterior, pois, para a sua resolução, é utilizado outro raciocínio.

Neste capítulo, abordamos pontos da Teoria dos Campos Conceituais com exemplos de situações do Campo Conceitual Multiplicativo que podem ser trabalhados em sala de aula com os estudantes, cabendo ao professor adaptar essas situações para a realidade de sua sala de aula conforme as compreensões apresentadas pelos estudantes e seus desempenhos de aprendizagem. No capítulo seguinte, apresentaremos o desempenho de estudantes ao resolverem situações do Campo Conceitual Multiplicativo, bem como esquemas de resolução utilizados por eles.

REFERÊNCIAS

LIMA, Débora Cabral. **A formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais e as estruturas multiplicativas.** Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-Ba, 2016.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; MERLINI, Vera Lucia; SANTOS, Aparecido dos**.** O Raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e Educação** (UNESP. Impresso), v. 20, 2014. p. 517-533.

MORAIS, Maria das Dores de; TELES, Rosinalda Aurora de Melo. Texto 1: Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. In: **Cadernos da TV Escola:** Um salto para o futuro. Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. Ano XXIV-Boletim 8 – set, 2014.

SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos. **Adição e subtração**: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante? Ilhéus: Editus, 2012.

SANTOS, Aparecido dos. **Formação de professores e as estruturas multiplicativas:** reflexões teóricas e práticas. 1. Ed. Curitiba: Appris, 2015.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicate structures. In: RESH, R.; LANDAU, M. (Orgs.). **Acquisitions of mathematics concepts and processes.** New York. Academic Press,1983.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

VERGNAUD, Gérard. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. In: **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, Editora UFPR, 2011. p. 15-27.

VERGNAUD, Gérard. **A Criança, a Matemática e a Realidade**: Problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de: MORO, Maria Lúcia Faria. Edição revisada. Curitiba: Editora da UFPR, 2014.

Capítulo II

Síntria Labres Lautert

Ernani Martins dos Santos

Estudantes do 1º ao 3º ano resolvem situações multiplicativas

Este capítulo propõe-se a compartilhar e discutir os resultados do desempenho de estudantes do 1º ao 3º ano do ensino fundamental e alguns esquemas por eles utilizados para resolverem as situações propostas no trabalho desenvolvido na Rede E-Mult. Inicialmente, apresentamos os resultados do desempenho (percentual de acertos) por ano escolar, considerando as relações (quaternária e ternária), os eixos (Proporção Simples, Comparação Multiplicativa e Produto de Medida) e as classes (um para muitos, muitos para muitos, relação desconhecida, referido desconhecido, Configuração Retangular e Combinatória). Em seguida, fazemos uma discussão sobre as representações e os esquemas[1] utilizados pelos estudantes nos diferentes anos escolares para resolver o instrumento diagnóstico, com vistas a contribuir para o trabalho do professor.

Ressalta-se que as situações apresentadas neste capítulo foram aplicadas em 2014, nas escolas parceiras e contou com a colaboração do professor. A aplicação foi coletiva, o professor lia uma situação por vez e, em seguida, solicitava que os estudantes resolvessem nos espaços indicados.

1 "O esquema é uma organização invariante da atividade para uma classe de situações [...] O esquema não organiza somente a conduta observável, mas também o pensamento subjacente" (VERGNAUD, 2009, p. 21).

2.1. O desempenho

Em 2014, foi aplicado um instrumento diagnóstico a 3.890 estudantes do 1º ao 9º ano do ensino fundamental da rede pública dos três estados participantes da Rede E-Mult. Desses, 1.384 eram estudantes dos três primeiros anos do ensino fundamental, sendo 402 estudantes cursando o 1º ano, 391, o 2º ano e, 591, o 3º ano.

O Quadro 2.1 apresenta as 13 situações referentes às relações quaternárias e ternárias que avaliaram o desempenho dos estudantes sobre o Campo Conceitual Multiplicativo nos diferentes anos escolares[2]. Essas situações abordam apenas três dos eixos propostos por Magina, Santos e Merlini (2014): Proporção Simples, Comparação Multiplicativa e Produto de Medida; investigando as classes um para muitos, muitos para muitos, relação desconhecida, referido desconhecido, Configuração Retangular e Combinatória.

2 Mais informações a respeito do desempenho dos estudantes do 1º ao 9º ano podem ser obtidas em Santana, Lautert e Castro-Filho (2015) e, em Santana, Lautert, Castro-Filho e Santos (2016).

Quadro 2.1 – Situações apresentadas no instrumento diagnóstico

Relação	Eixo	Classe	Enunciado
Quaternária	Proporção Simples	Um para muitos	**S1.** Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?
			S4. A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?
			S8. Um supermercado fez uma promoção: "Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais". Quanto vai custar cada litro de suco?
		Muitos para muitos	**S3**. Para fazer 3 fantasias são necessários 5m de tecido. Ana tem 35m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?
			S6. Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar?
			S12. Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra o aluno marca 4 pontos. Alex deu 15 voltas correndo na quadra. Quantos pontos ele marcou?
Ternária	Comparação Multiplicativa	Relação desconhecida	**S10.** Cido tem uma coleção de 6 carrinhos e José tem uma coleção de 24 carrinhos. Quantas vezes a coleção de Cido é menor do que a de José?
		Referido desconhecido	**S2.** A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?
			S13. Ontem Tonho tinha 18 figurinhas. E hoje ele tem 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele tem hoje?
	Produto de Medida	Configuração retangular	**S5.** Rute quer mudar o piso do quarto dela. Este quarto tem 3m de largura e 6m de comprimento. Quantos metros quadrados, de piso, Rute precisa comprar?
			S7. A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem 24m^2. A largura é 4m. Qual é comprimento em metros desse jardim?
		Combinatória	**S11.** Na aula de dança de forró tinha 6 rapazes (Alex, Beto, Caio, Davi, Edu, Ivo) e 4 moças (Mari, Fabi, Lara, Suzi). Todas as moças dançaram com todos os rapazes. Quantos casais diferentes foram formados?
			S9. A Lanchonete do Ernani vende 15 tipos de sanduíches. Para cada sanduíche é usado apenas um tipo de pão e um tipo de recheio. Tem 3 tipos de pão (leite, integral e francês). Quantos tipos de recheio são necessários para fazer todos os tipos de sanduíches?

Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Nota: as situações denominadas S1, S2, S3, S5, S6, S7, S9, S10, S11 e S12 foram apresentadas e discutidas no Capítulo I, nos respectivos eixos: Proporção Simples, Comparação Multiplicativa e Produto de Medida.

As situações resolvidas pelos estudantes (ver Quadro 2.1) foram classificadas em corretas, incorretas ou em branco. A Tabela 2.1 apresenta os percentuais de acerto por ano escolar considerando as relações, os eixos e as classes.

Tabela 2.1 – Percentual de acertos nos anos escolares considerando as relações, os eixos e as classes

Ano	Relação Quaternária			Relação Ternária					Média geral
	Proporção Simples			Comparação Multiplicativa		Produto de Medida		Média	
	um para muitos	muitos para muitos	Média	relação desconhecida	referido desconhecido	Configuração Retangular	Combinatória		
1º ano	4,39	2,32	3,36	4,98	1,99	1,37	1,00	1,95	2,60
2º ano	15,86	4,01	9,93	4,60	3,58	1,53	2,56	2,85	6,12
3º ano	27,92	4,34	16,13	4,91	14,38	6,35	2,12	7,23	11,34
Média	17,68	3,66	10,67	4,84	7,73	3,54	1,91	4,46	7,33

Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Como pode ser observado na Tabela 2.1, no geral, o desempenho dos estudantes foi de 2,6% no 1º ano; 6,12%; no 2º e 11,34%; no 3º. Esses resultados revelam que os estudantes apresentam uma compreensão intuitiva sobre o Campo Conceitual Multiplicativo e que avançam de forma expressiva, à medida que o currículo escolar orienta que os conceitos multiplicativos sejam explorados em sala de aula.

Nesse sentido, torna-se interessante olhar para as situações em que os estudantes apresentaram melhores desempenhos, nos três primeiros anos do ensino fundamental, considerando as relações, os eixos e as classes propostas por Magina, Santos e Merlini (2014), apresentadas e discutidas no Capítulo I.

De modo geral, verificamos que os estudantes apresentaram melhores desempenhos nas relações quaternárias (1º ano: 3,36%; 2º ano: 9,93%; 3º ano: 16,13%) quando comparados com as relações ternárias (1º ano: 1,95%; 2º ano: 2,85% e 3º ano: 7,23%.) Isso talvez ocorra porque as relações quaternárias estão mais presentes no cotidiano das crianças desse nível escolar.

Os percentuais de acerto nas relações quaternárias revelam que os estudantes do 1º ao 3º ano apresentam melhores desempenhos nas situações envolvendo a classe um para muitos (17,68%) quando comparados à classe muitos para muitos (3,66%). Isso talvez ocorre porque, nas situações um para muitos, em geral, as relações entre as grandezas são explícitas, em termos da unidade de uma das grandezas, o que facilita a compreensão, já que parte da relação um para muitos, ao contrário da relação muitos para muitos. Por exemplo, nas situações cotidianas, é possível dizer que um carro tem quatro rodas e que três carros, terão 12 rodas (a relação um para quatro está explícita).

Na situação S1 "Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?", os estudantes podem estabelecer uma relação entre a quantidade de pacotes e a quantidade de biscoitos, tendo como ponto de referência a unidade (um pacote de biscoitos) que representa o cardinal um, considerado o elemento neutro da multiplicação. Fazendo a correspondência do número de pacotes (no caso, um) com a quantidade de biscoitos, é possível encontrar em um pacote (nessa situação, seis). Elas estabelecem a relação um para seis e, possivelmente, conseguem compreender que, se em um pacote há seis biscoitos, em cinco pacotes iguais a ele, a quantidade total de biscoitos será 30 (cinco vezes a quantidade seis).

As situações muitos para muitos, não partem da unidade como referência, embora em algumas situações o estudante possa encontrar a unidade. Na situação S3 "Para fazer 3 fantasias são necessários 5m de tecido. Ana tem 35m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?", por exemplo, o estudante, ao estabelecer a relação entre a unidade de fantasias e a quantidade de metros de tecido, poderá obter um número fracionário (5/3), que se refere a uma quantidade menor que um inteiro (um número decimal) e, posteriormente, operar com o valor encontrado. Isso aumenta o grau de dificuldade para a resolução desse tipo de situação, pois envolve um número racional.

Embora os estudantes dos três anos iniciais do ensino fundamental apresentem um desempenho mais baixo nas relações ternárias, verifica-se que eles demonstram melhores desempenhos no eixo da Comparação Multiplicativa (classes referido desconhecido 7,73% e relação desconhecida: 4,84%) quando comparado ao eixo de Produto de Medida (classes Configuração Retangular: 3,54% e Combinatória: 1,91%), evidenciando que as situações do eixo Produto de Medida são mais complexas.

Por exemplo, na situação S11 "Na aula de dança de forró, tinha 6 rapazes (Alex, Beto, Caio, Davi, Edu, Ivo) e 4 moças (Mari, Fabi, Lara, Suzi. Todas as moças dançaram com todos os rapazes. Quantos casais diferentes foram formados?", verifica-se que os estudantes precisam estabelecer uma relação entre dois elementos (rapazes e moças) que vão se compor para formar um terceiro elemento (casais); existe uma relação entre três quantidades: número de rapazes, número de moças e número de casais formados; que são obtidos pelo produto de duas dessas quantidades (número de rapazes vezes número de moças resulta no número de casais). Segundo Nunes e Bryant (1997), situações como essa seriam mais difíceis para crianças nessa idade, pois o esquema de correspondência um para muitos está implícito, ou seja, a relação de combinação entre rapazes e moças parece não ser tão evidente para os estudantes dos primeiros três anos do ensino fundamental que tendem a usar formas de resolução do tipo combinação por pares fixos (MORO; SOARES, 2006; PESSOA; BORBA, 2009; SPINILLO; LAUTERT; FERREIRA, 2016).

Considerando que os estudantes resolveram 13 situações, buscamos verificar em qual situação eles apresentam melhor desempenho nas relações quaternárias e nas relações ternárias. A Tabela 2.2 apresenta os percentuais de acertos por ano escolar em cada situação, por relação, por eixo e por classe.

Tabela 2.2 – Percentual de acertos em cada situação por ano escolar

Ano	Relação Quaternária						Relação Ternária							Média Geral
	Proporção Simples						Comparação Multiplicativa			Produto de Medida				
	um para muitos			muitos para muitos			relação desconhecida	referido desconhecido		Configuração Retangular		Combinatória		
	S1	**S4**	**S8**	**S3**	**S6**	**S12**	**S10**	**S2**	**S13**	**S5**	**S7**	**S11**	**S9**	
1º ano	6,72	3,23	3,23	0,50	4,98	1,49	4,98	1,74	2,24	1,24	1,49	0,50	1,49	2,60
2º ano	26,85	12,79	7,93	0,77	7,93	3,32	4,60	4,60	2,56	0,77	2,30	0,26	4,86	6,12
3º ano	39,09	26,06	18,61	3,38	4,91	4,74	4,91	26,57	2,20	9,48	3,21	1,69	2,54	11,34
Média	26,23	15,68	11,13	1,81	5,78	3,40	4,84*	13,15	2,31	4,62	2,46	0,94	2,89	7,33

Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Observamos na Tabela 2.2 que, entre as relações quaternárias, os estudantes apresentam melhor desempenho na situação S1 (26,23%) "Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?" e entre as componentes das relações ternárias na situação S2 (13,15%) "A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?". Percebemos, ainda, um crescimento expressivo em outras duas situações de relações quaternárias, ambas envolvendo Proporção Simples um para muitos: S4 (15,68% – "A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?" e S8 (11,13% – "Um supermercado fez uma promoção: "Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais". Quanto vai custar cada litro de suco?"

Esses resultados revelam que os estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental apresentam conhecimentos prévios que lhes permitem resolver situações que requerem esse tipo de raciocínio e que a escola tem um papel importante na sistematização desses conhecimentos. Em outras palavras, professor, não precisa esperar que os estudantes dominem os conceitos de adição e a subtração para iniciar uma discussão sobre o Campo Conceitual Multiplicativo.

Dito isso, cabe problematizar sobre as representações e os esquemas que conduziram os estudantes a respostas corretas ou incorretas nas situações (S1, S2, S4 e S8), com vistas a contribuir para o trabalho do professor nos anos iniciais do ensino fundamental.

2.2. Esquemas e representações adotados por estudantes para resolver as situações propostas no instrumento diagnóstico

Ao nos debruçarmos sobre os esquemas que os estudantes adotam para resolver todas as situações propostas no instrumento diagnóstico, quer conduzam a resposta correta ou não, verificamos que, em geral, eles fizeram uso de diferentes formas de registros, que envolvem, tanto o uso de representações pictográficas ou icônicas[3] desenhos) como as representações simbólicas (números e operações). Um olhar cuidadoso sobre essas formas de registro, usadas pelos estudantes, poderá contribuir para que o professor problematize com eles sobre as formas possíveis de resolução, que conduzem ao acerto e aquelas que apresentam equívocos, na forma de organização; mas que também revelam as formas de pensar dos estudantes sobre as situações. Isso porque os erros precisam, também, ser inseridos no planejamento das aulas, uma vez que errar faz parte do processo de ensino e aprendizagem da matemática, como afirmam Spinillo, Pacheco, Ferreira e Cavalcanti (2014).

Optamos por apresentar aos professores discussões sobre situações em que os estudantes dos três primeiros anos iniciais do ensino fundamental obtiveram um maior percentual de acertos, uma vez que os esquemas de resolução apresentados nessas situações revelam uma diversidade de registros e, em alguns casos, são registros coincidentes com as situações nas quais eles obtiveram baixo percentual de acertos no instrumento diagnóstico.

3 Representações pictográficas – são grafismos que ilustram tanto a numerosidade como expressam a aparência dos elementos presentes no enunciado das situações, enquanto que as representações icônicas – são grafismos esquemáticos (traços, riscos, pontos, círculos etc.) que substituem os elementos envolvidos na situação, sem relação com a aparência dos elementos do enunciado. Mais discussões podem ser obtidas em Hughes (1986) e Lautert e Spinillo (1999).

Passamos agora a observar as representações e os esquemas usados por estudantes quando resolvem as situações com maior percentual de acertos[4].

Situação S1: Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?

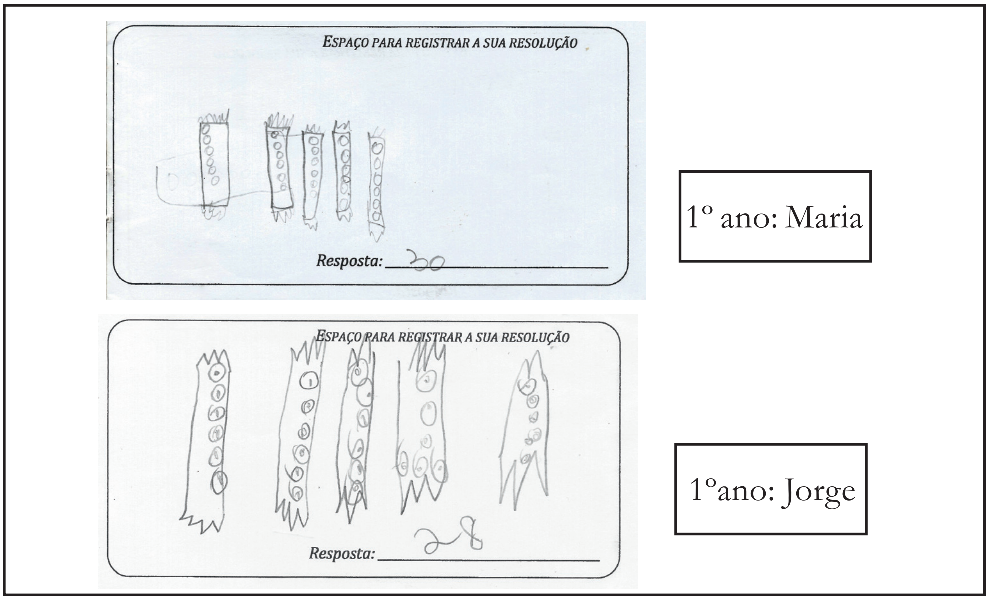
Em geral, os estudantes do 1º e 2º ano, por estarem iniciando o processo de alfabetização matemática, prioritariamente tendem a fazer uso de representações pictográficas e icônicas (desenhos), enquanto os estudantes do 3º ano tendem a fazer uso de representações simbólicas (números e operações) que podem ou não vir acompanhadas de representações pictográficas e icônicas. Vejamos alguns exemplos que revelam as formas como os estudantes estão pensando essa situação que requer o uso da operação de multiplicação.

Observamos o exemplo de dois estudantes do 1º ano que usaram a representação pictográfica (desenhos) para resolver S1, em que um apresenta a resolução e a resposta correta (Maria) e outro apresenta a resolução correta com a resposta errada (Jorge).

Figura 2.1 – Resolução com registo pictográfico
e esquema de agrupamento na situação S1

S1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?

4 Todos os nomes apresentados são fictícios atendendo as normas referentes às questões éticas em pesquisa, bem como foram selecionados exemplos de registros dos estudantes de escolas distintas para discutir em cada uma das figuras.



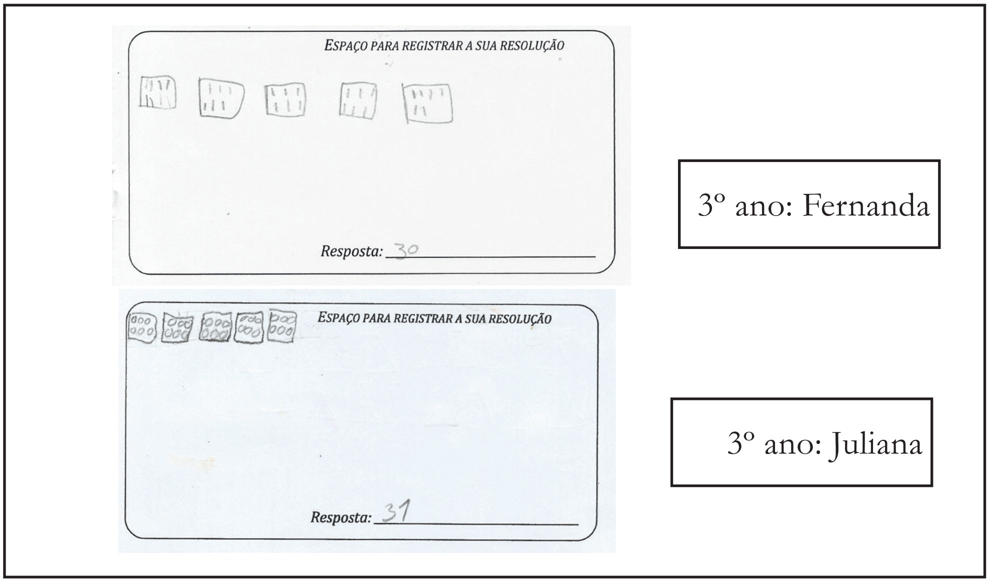
Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Observe que os estudantes usam a representação pictográfica muito semelhante, já que ambos desenham os cinco pacotes de biscoitos e, dentro de cada pacote, a quantidade de biscoitos presente no enunciado (seis biscoitos). Em ambas as representações, constatamos que os estudantes conseguem resolver a situação utilizando a noção de agrupamento (esquema). No entanto, Jorge, ao proceder a contagem do número de biscoitos encontrados, apresenta como resposta 28, deixando de contar dois biscoitos, enquanto Maria encontra a quantidade correta para a resposta da situação, 30 biscoitos. É interessante observar que, ainda no 1º ano, sem terem sido formalmente ensinadas sobre a multiplicação, as duas crianças conseguem compreender a situação, estabelecendo a correspondência um para muitos entre a quantidade de pacotes e a quantidade de biscoitos. Contudo, Jorge comete um erro de contagem que o prejudica em seu desempenho. Outro aspecto que merece destaque é que ambas as crianças utilizam representações pictográficas, o que demonstra que é possível pensar matematicamente sobre essas relações antes do ensino formal dos algoritmos e das operações da multiplicação.

Na Figura 2.2, apresentamos dois exemplos de estudantes do 3º ano que usam o esquema de agrupamento utilizando o registro pictográfico e icônico.

Figura 2.2 – Resolução com registo pictográfico
e icônico com esquema de agrupamento na situação S1

S1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Fernanda e Juliana também usaram o esquema de agrupamento através de registros pictográfico e icônico (desenhos). No entanto, esperava-se que, pelo fato de estarem no 3º ano, fariam uso da operação de multiplicação, o que não aconteceu. Por que isso ocorre? Uma possível explicação pode estar relacionada ao fato de que, para os estudantes que estão apropriando-se das ideias da multiplicação, as representações pictográfica e icônica (desenhos) permitem não apenas a representação do enunciado, mas sobretudo, acompanhar o processo de resolução da situação. Observe, também, que Juliana faz registros pictográficos (desenha corretamente a quantidade de pacotes de biscoitos e a quantidade de biscoitos que deve ter em cada pacote de acordo com o proposto no enunciado da situação), mas errou na contagem. O fato de ter chegado ao resultado 31 nos leva a supor que Juliana, depois de ter representado cada uma das parcelas envolvidas, usou a contagem. Isso porque é pouco provável que chegasse a esse resultado, se realizasse a operação de multiplicação ou a soma de parcelas iguais.

Tanto Juliana como Jorge (Figuras 2.2. e 2.1, respectivamente) parecem compreender as relações envolvidas na situação, no entanto, ambos se confundem ao fazer a contagem. O professor deve auxiliar os estudantes, tanto na contagem como no uso correto das operações que auxiliem na contagem dos agrupamentos realizados. No esquema apresentado pelos estudantes, em que foram representados cinco pacotes contendo seis biscoitos, o professor pode, por exemplo, questionar a respeito de qual operação matemática pode simbolizar o que foi registrado (o agrupamento).

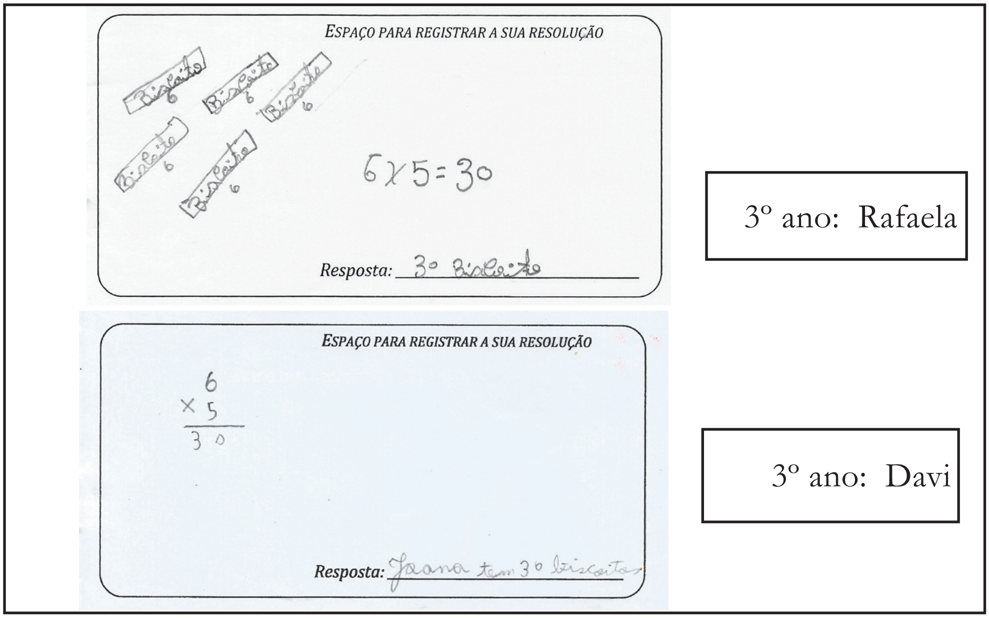
Dialogar com os estudantes sobre a condição de ter cinco vezes o mesmo evento acontecendo: se em um pacote tem seis biscoitos significa que para o total de cinco pacotes teremos seis vezes a quantidade de um biscoito (unidade), e isso pode ser resolvido com a multiplicação de 5 x 6 igual a 30. Ressaltamos que a compreensão dos agrupamentos com os números naturais de 1 a 10 é importante para que o estudante possa memorizar com mais facilidade essas multiplicações. Isso pode ser feito através do estudo da tabuada e dos significados a ela atribuídos, que pode ser potencializado com o uso de diferentes recursos didáticos com desafios, brincadeiras, contação de histórias e jogos (recursos para essa faixa etária).

Tomando o esquema proposto por Jorge e Juliana, o professor poderá levantar questões aos estudantes. Por exemplo, é possível utilizar uma operação matemática para representar essa contagem? Dependendo das respostas dos estudantes, ele pode ser mais diretivo: pode ser que operação? Quais são os termos (números) que podemos utilizar nas operações mencionadas por vocês? O que cada termo representa na situação? As discussões em torno da operação a ser enfatizada dependerão do ano que os estudantes estão cursando. Nessa direção, sugere-se que o professor faça o registro, no quadro, da operação de multiplicação, mesmo que seja com os estudantes do 1º e 2º anos.

Outra possibilidade é socializar com a turma os registros usados por outros estudantes. Com essa atividade, é possível facilitar a participação de todos e evidenciar as diferentes formas de pensar e resolver a situação (ver Figura 2.3).

Figura 2.3 – Resolução usando os registos pictográfico e simbólico

S1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?



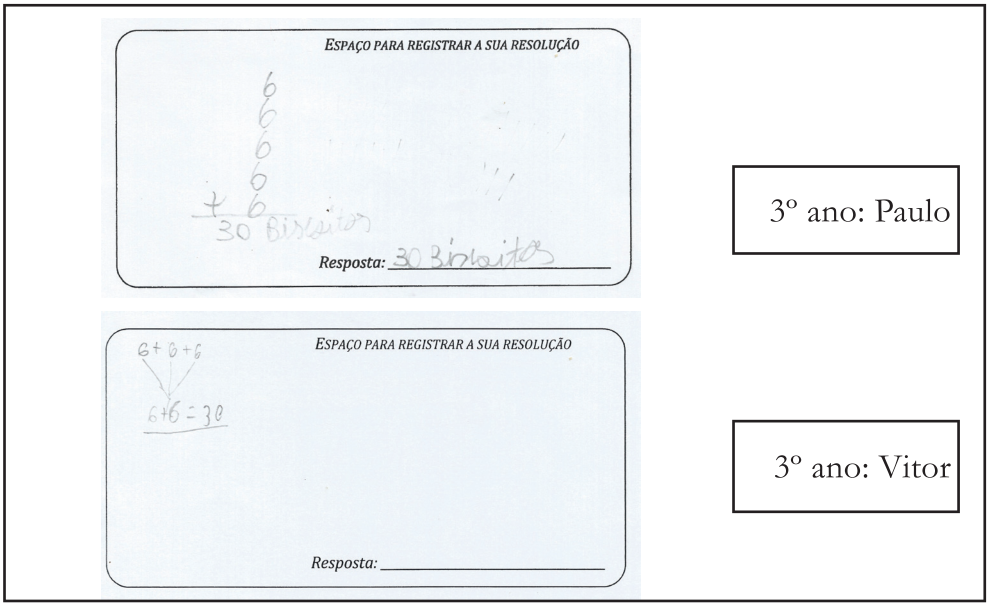
Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Observamos, na Figura 2.3, que Rafaela usa a representação pictográfica (quantidade de pacotes) e, para cada conjunto formado, ela faz o registro do cardinal (quantidade total de biscoitos em cada pacote), bem como usa a operação de multiplicação na horizontal. Davi faz apenas registro da operação de multiplicação, na vertical. Ambos usam a operação de multiplicação com dois registros simbólicos distintos e corretos, bem como colocam a resposta para a pergunta apresentada na situação.

Outras formas de resolução usadas pelos estudantes podem ser observadas nas Figuras 2.4 e 2.5, nas quais eles usam a operação de adição para resolver a S1. Entretanto, essas formas de resolução apresentam diferenças na forma como os estudantes estão entendendo a situação proposta, como veremos a seguir.

Figura 2.4 – Resolução simbólica usando adição de parcelas repetidas

S1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?

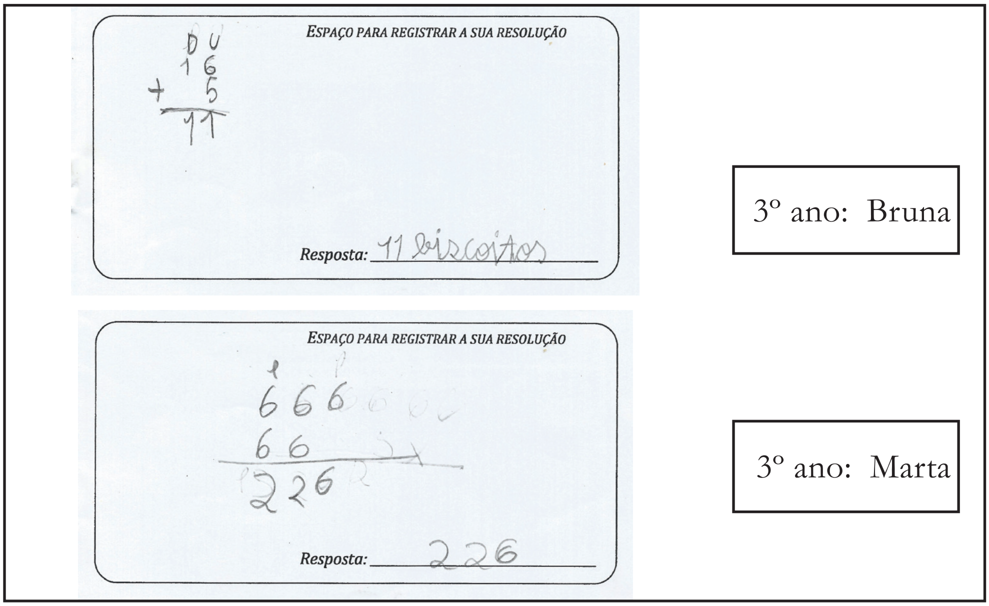


Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Como pode ser observado Paulo, apresenta a resposta correta. Ao fazer a solução, ele repete o número seis (quantidade de biscoitos) cinco vezes (que corresponde à quantidade de pacotes) e usa o sinal da operação da adição. A forma usada por Paulo, assim como a apresentada por Vitor evidenciam que eles estão compreendendo a situação em termos de adições com parcelas repetidas. Essa é uma das formas usadas pelos estudantes quando estão iniciando a compreensão da multiplicação, mas que precisa ser ampliada, uma vez que a multiplicação não pode ser vista apenas como adições de parcelas repetidas, conforme discutido no Capítulo I.

Figura 2.5 – Erro na resolução da situação S1
– opera com os números presentes no enunciado

S1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Observe, agora, o esquema usado por Bruna, que realiza uma operação de adição obtendo como resultado 11 biscoitos. Em seu esquema, o seis corresponde à quantidade de biscoitos e, o cinco, à quantidade de pacotes, ambos os números presentes no enunciado da situação. Marta demonstra na sua representação que, inicialmente, fez o registro do número seis (a quantidade de biscoitos) cinco vezes (quantidade de pacotes), mas, ao invés de realizar adição de parcelas repetidas, ela registra o número seis em duas parcelas e ensaia uma adição, dando como resultado final 226.

Diferentemente de Paulo e Vitor (Figura 2.4) que trazem uma das ideias básicas da multiplicação (adições com parcelas repetidas), os estudantes que apresentam esses esquemas, como os apresentados por Bruna e Marta (Figura 2.5) precisam de uma maior atenção por parte do professor. Elas usam os números presentes no enunciado de forma distinta, mas que revelam a sua compreensão sobre a situação proposta e a sua forma de operacionalização. Ao fazer o registro dos números, Marta dá indícios de que pode, inicialmente, ter considerado o raciocínio multiplicativo, entretanto, a forma como registra a operação com o resultado, revela que ela não compreende o valor posicional dos números, bem como abandonou o esquema inicial para dar conta da resolução, enquanto que, para Bruna, somar os números presentes no enunciado estaria dando conta de achar a solução para a situação, usando talvez uma das operações que ela compreende, uma vez que o resultado obtido encontra-se correto para a operação realizada por ela, diferentemente de Marta (666+66= 226).

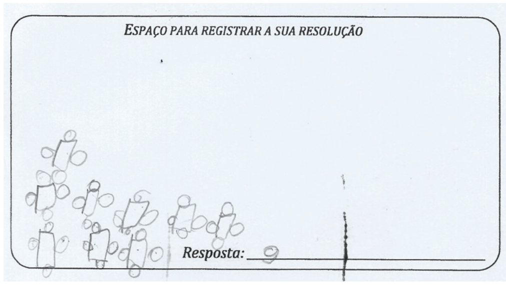
Passamos agora a observar as representações e os esquemas usados por estudantes quando resolvem a situação S4.

Situação 4: A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?

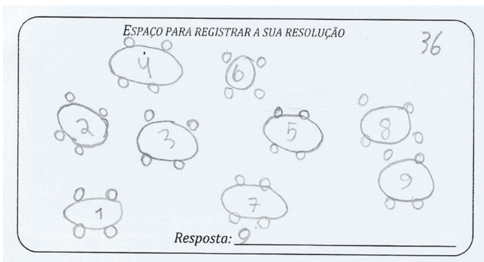
Assim como na situação S1, observamos que os estudantes do 1º e 2º anos, prioritariamente, tendem a fazer uso de representações pictográficas e icônicas (desenhos), enquanto os do 3º ano buscam utilizar representações simbólicas (números e operações) que podem ou não vir acompanhadas de representações pictográficas e icônicas. Vejamos alguns exemplos que revelam as formas como os estudantes estão pensando essa situação que envolve a operação de divisão.

Figura 2.6 – Resoluções com registros pictográficos e icônicos

S4. A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?

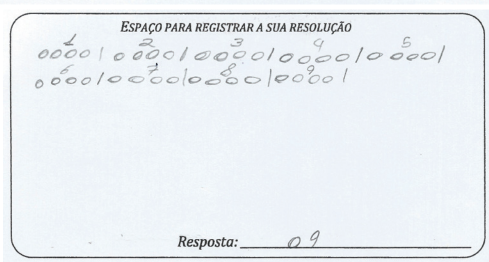


1º ano: Maria



2º ano: Ana

3º ano: Pedro



3º ano: Rute

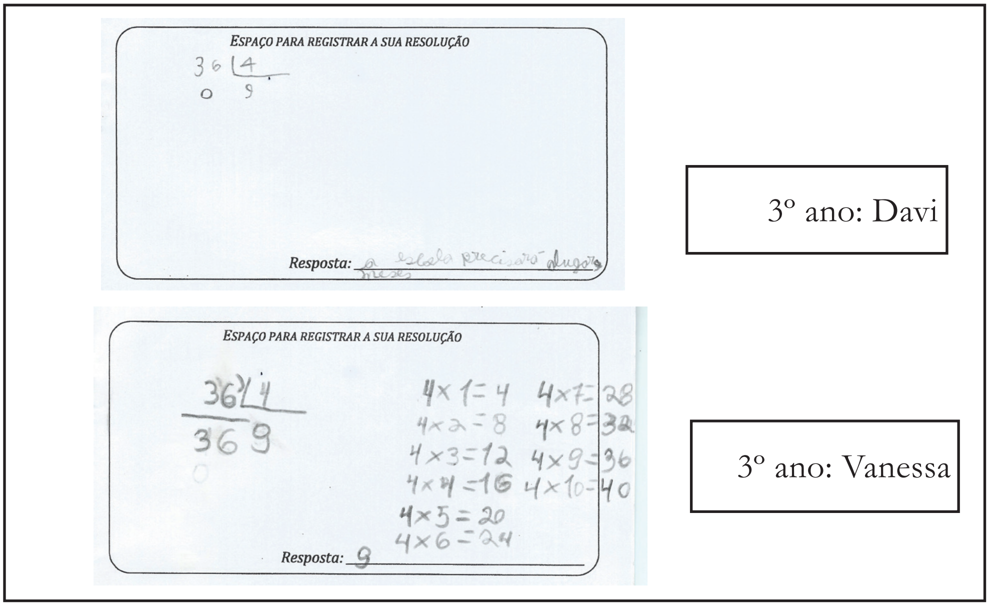
Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Como podemos observar, os estudantes usam esquemas que envolvem agrupamentos, conceito esse trabalhado com os estudantes desde o 1º ano do ensino fundamental e que, possivelmente, eles já se apropriaram. Pedro usa uma representação mais detalhada, quando comparado aos outros três estudantes. Ele representa, de forma pictográfica, o número de convidados (36), o número de mesas (9) e usa linhas que ligam cada quatro convidados a uma mesa. O esquema usado por Pedro permite que ele explicite a relação "um para quatro" implícita na situação (quatro convidados para cada mesa), diferentemente de Maria e Ana que realizam a representação pictográfica de uma mesa com quatro cadeiras e procedem à contagem de quantas mesas serão necessárias. Verificamos, também, que Ana e Rute usam a representação simbólica, um número para registrar a quantidade de mesas necessárias, chegando ao número 9, que corresponde à quantidade de mesas solicitadas. Constata-se, ainda, que Rute parece ter registrado, inicialmente, a quantidade de convidados (cada um representado por um círculo), para depois separar a quantidade de convidados por mesa (cada traço representado separa a quantidade de convidados por mesa) e, acima dessa quantidade, insere o número que corresponderá a cada mesa que irá precisar.

Vejamos, agora, exemplos de esquemas dos estudantes que usam apenas a operação (representações simbólicas) e que conduzem tanto ao acerto como ao erro.

Figura 2.7 – Resolução correta adotando a operação (algoritmo) da divisão

S4. A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?



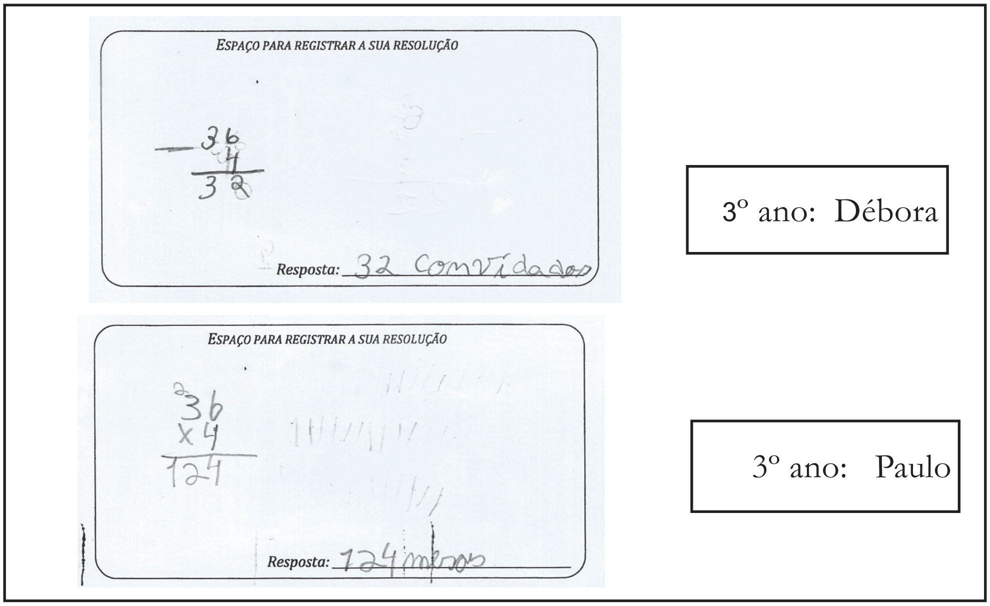
Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Observamos que Vanessa, assim como Davi[5], usam a operação adequada, a divisão, e que ela faz o registro da tabuada para encontrar o número que, multiplicado por 4, resultaria em 36. O registro da tabuada pelos estudantes que estão apropriando-se do Campo Conceitual Multiplicativo, pode contribuir para que eles compreendam o agrupamento sem a necessidade de realizar a contagem.

Figura 2.8 – Resolução incorreta adotando outras operações

S4. A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?

5 Davi usa a representação simbólica em outras situações (ver Figura 2.3) resolvendo de forma adequada.



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Débora e Paulo[6], embora usem os números presentes no enunciado, parecem não compreender a relação que se estabelece entre as quantidades, optando por uma operação inadequada. Isso porque Débora subtrai a quantidade de convidados que ficarão em cada mesa (4) do número de convidados que participarão da festa (36). Paulo multiplica o número total de convidados (36) pelo número de convidados que ficarão em cada mesa (4), obtendo 124 como resultado, demonstrando que já tem elementos da percepção de realização do algoritmo da multiplicação, mas o executa com falhas.

Quando os estudantes fazem esse tipo de esquema, o professor poderá chamar a atenção deles para os valores obtidos como resposta, 32 e 124, e colocar questões como: será que as quantidades encontradas por vocês são adequadas como resposta à situação proposta? Se temos 36 convidados que irão se sentar em mesas que cabem 4 convidados, será que 32 mesas seriam necessárias? Ou, ainda, há necessidade de 124 mesas para 36 convidados?

6 Paulo usa adições de parcelas repetidas para resolver a situação S1(ver Figura 2.4).

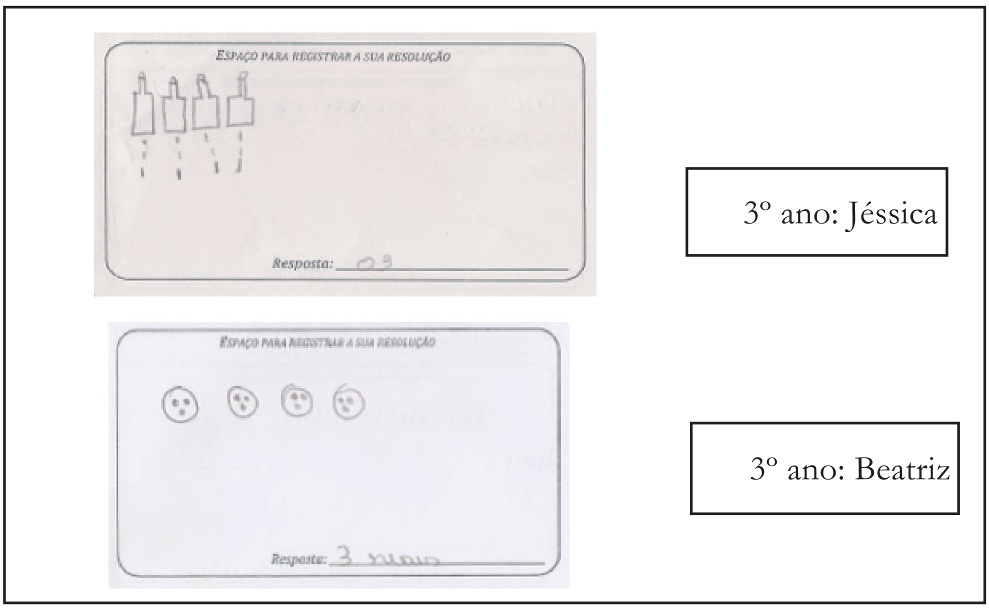
Passamos, agora, a observar as representações e os esquemas usados por estudantes quando resolvem a Situação S8.

Situação 8: Um supermercado fez uma promoção: "Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais." Quanto vai custar cada litro de suco?

Tal como nas situações anteriores (S1 e S4), observamos que os estudantes tendem a fazer uso de representações pictográficas e icônicas (desenhos) acompanhadas ou não de representações simbólicas (números e operações). Por exemplo:

Figura 2.9 – Resolução pictográfica e icônica situação S8

S8. Um supermercado fez uma promoção: "Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais." Quanto vai custar cada litro de suco?



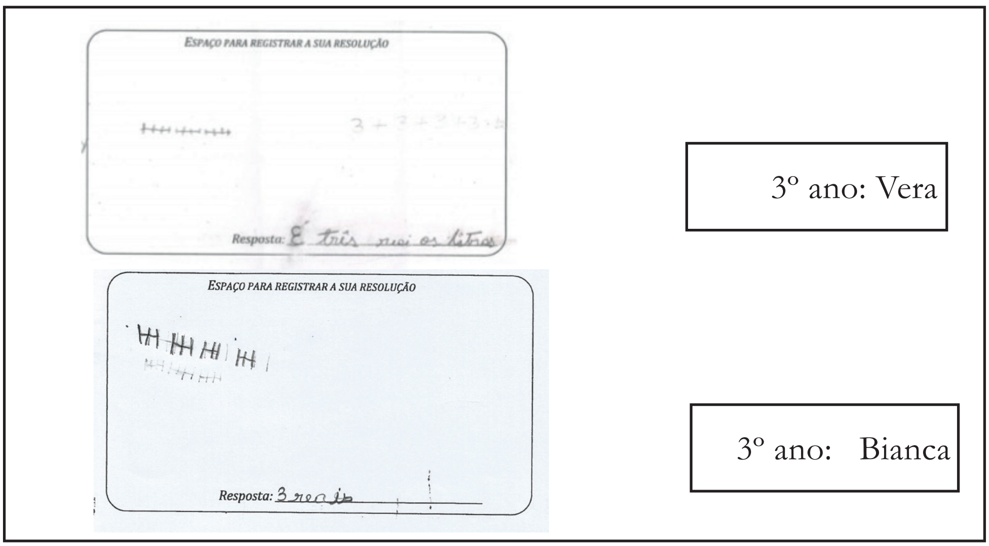
Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Jéssica e Beatriz utilizam representações pictográficas e icônicas (desenhos), respectivamente, bem como procedem à distribuição do valor total em reais (12), para obter o valor de uma caixa de suco. A distribuição dos reais para cada litro de suco, parece-nos mais evidente no esquema usado por Jéssica, quando ela desenha quatro garrafas e, abaixo de cada uma delas, distribui unidades (risquinhos) de forma equitativa, que podem ser visualizados, tanto na horizontal (três linhas com a quantidade de quatro risquinhos em cada uma) como na vertical (quatro colunas com a quantidade de três risquinhos abaixo de cada litro). A divisão equitativa entre as partes é um dos invariantes[7] operatórios da divisão que os estudantes precisam dominar para lidar com a divisão enquanto operação matemática.

Vejamos, agora, a Figura 2.10 que ilustra duas representações icônicas com esquemas, também de agrupamento.

Figura 2.10 – Resolução ilustrando o esquema agrupamento e o registro icônico

S8. Um supermercado fez uma promoção: "Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais." Quanto vai custar cada litro de suco?



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

7 Invariantes são as propriedades fundamentais que caracterizam um conceito e que podem ser mobilizadas pelos indivíduos para resolver situações semelhantes. Mais discussões sobre esse tema podem ser obtidas em Lautert e Spinillo (2011) e em Spinillo, Ferreira e Lautert (2016).

Observamos, na Figura 2.10, as duas representações com esquemas de agrupamento realizados por Vera e Bianca que, em um primeiro momento, o professor pode achar que os estudantes estão pensando da mesma forma, usando a propriedade comutativa da multiplicação (a ordem dos fatores não altera o produto, 3 x 4 ou 4 x 3 resulta em 12).[8] Isso porque ambas as estudantes usam a representação icônica (risquinhos que tanto representam caixas como reais) e apresentam como resposta "É três reais os litros" e "3 reais."

No entanto, Vera resolve utilizando um raciocínio que evoca a divisão, uma vez que ela registra 12 risquinhos, em três grupos com quatro risquinhos. Ou seja, ela divide os 12 reais por quatro litros e chega ao valor de três reais (preço de um litro). Bianca registra 12 risquinhos e faz um agrupamento com três risquinhos, quatro vezes. Três reais (preço de um litro) vezes quatro litros resultam em 12 reais (preço de quatro litros). Se Bianca tivesse pensado em termos da divisão, ela estaria considerando 12 reais divididos por três reais resultando em quatro litros, mas essa não é sua resposta final para a solução do problema, uma vez que registra como resposta três reais (resposta correta), o que nos leva a inferir que Vera e Bianca estão considerando o raciocínio multiplicativo, na solução da situação, independentemente da técnica operatória empregada por elas.

Os esquemas de resolução usados por Vera e Bianca indicam que esses esquemas e formas de registro precisam ser problematizados, na sala de aula, pelo professor, de forma complementar e não isolada, conforme discutido no Capítulo I.

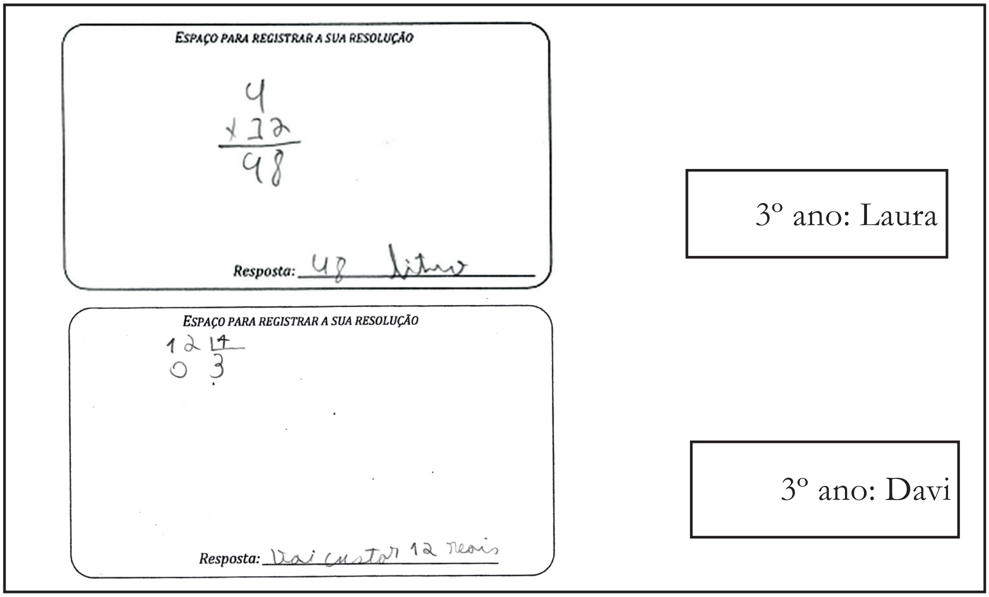
Observemos, agora, os esquemas de resolução adotados por estudantes que usaram operações para resolver a situação S8.

---

8 A comutatividade acontece quando a sequência das operações não afeta o resultado. Por exemplo, tanto faz vestir a camisa e depois pôr a bermuda como pôr a bermuda e depois vestir a camisa, porque o resultado é o mesmo: a pessoa estará vestida com a mesma roupa. Mas, escovar os dentes e ir tomar café da manhã é diferente de ir tomar café da manhã e escovar os dentes, porque, na primeira situação, a pessoa fica com os dentes sujos após a refeição e, na segunda, não. Na Matemática, a propriedade comutativa é muito usada quando se fala em operações aritméticas. Na adição e na multiplicação, verifica-se facilmente que 2 + 3 = 3 + 2 = 5 (adição) e que 2 x 3 = 3 x 2 = 6 (multiplicação). Nesse último exemplo, temos que a ordem dos fatores (2 e 3) não altera o produto (6).

Figura 2.11 – Uso de representação simbólica

S8. Um supermercado fez uma promoção: “Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais.” Quanto vai custar cada litro de suco?



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Observamos, agora, no esquema utilizado por Laura, o uso da operação de multiplicação para resolver a situação. Embora a operação de multiplicação possa ser usada para resolver a situação, como constatamos anteriormente, quando os estudantes usam a noção de agrupamento, verificamos que Laura não compreende o que está proposto no enunciado, pois ela multiplica a quantidade de caixas de suco (quatro) por reais (12), obtendo o resultado correto para a operação realizada (48), sendo esse resultado incorreto para a questão proposta. Laura demonstra, também, não compreender a escrita do algoritmo da multiplicação (operação aritmética), uma vez que não sabe posicionar corretamente os termos da multiplicação. O fato de os estudantes não usarem a convenção matemática, poderá dificultar a obtenção correta do resultado de uma operação. Davi parece compreender que a situação requer a operação de divisão e ele opera corretamente, encontrando o número três (o quociente – resultado). Ele não consegue interpretar o resultado encontrado, visto que dá como resposta "vai custar 12 reais."

Os esquemas de resolução usados pelos estudantes, que conduzem à resposta certa ou à incorreta, podem ajudar o professor a identificar e compreender o que ele precisa discutir de forma individual ou coletiva, na sala de aula. O professor, conforme já comentamos, precisa discutir com os estudantes sobre as relações envolvidas no enunciado da situação (ver Capítulos I e III), os agrupamentos e as técnicas usadas para resolver a operação de multiplicação e de divisão.

Passamos, agora, a observar as representações e os esquemas usados por estudantes quando resolvem a situação S2.

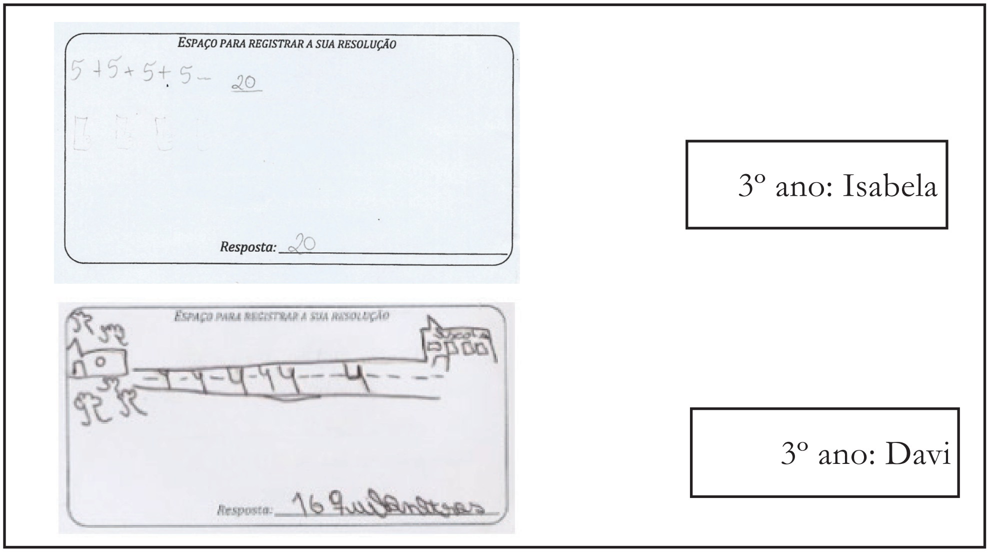
Situação 2: A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?

Ao observarmos os esquemas usados pelos estudantes na situação S2 que aborda uma relação ternária de comparação multiplicativa, também verificamos que os estudantes utilizam registros semelhantes aos ilustrados anteriormente, na relação quaternária, como as situações de Proporção Simples (representações pictográficas ou icônicas – desenhos, bem como as representações simbólicas – números e operações), independentemente de essas representações estarem corretas ou incorretas.

Vejamos, na Figura 2.12, dois exemplos que revelam as formas como os estudantes pensaram essa situação.

Figura 2.12 – Resolução usando esquema de parcelas repetidas

S2. A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?



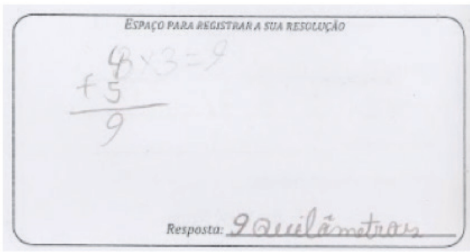
Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Como pode ser observado na Figura 2.12, embora a situação traga a palavra "vezes mais" (dando uma dica de que a situação envolve a multiplicação), Isabela, que está cursando o 3º ano, usa a adição de parcelas repetidas para resolver a situação, chegando ao resultado correto, ao invés de fazer o uso da multiplicação. Bruno ilustra, através do registro pictográfico, buscando compreender a situação como a distância entre dois pontos (a casa e a escola), entretanto, ele faz o registro do número quatro seis vezes (4-4-4-4-4-4), o que nos leva a inferir que ele está fazendo o uso de uma adição de parcelas repetidas, que não conduz ao resultado esperado. Essa compreensão da multiplicação partindo da adição de parcelas repetidas é muito presente no raciocínio dos estudantes, nesse nível de escolaridade, o que os leva a utilizar esse raciocínio independentemente da natureza da situação multiplicativa proposta.

Para outros estudantes, a expressão "vezes mais" pode estar contribuindo para que eles utilizem a operação de adição, como ilustrado na Figura 2.13.

Figura 2.13 – Resolução através da operação de adição

S2. A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?



3º ano: Lívia

Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Observamos que Lívia não compreende que a situação proposta envolve o raciocínio multiplicativo, ela arma e efetua usando a operação de adição na vertical. Nesse sentido, ressaltamos a importância de o professor problematizar sobre o que a situação propõe e o significado de palavras e expressões presentes no enunciado que podem ou não estar associadas à problemática da situação a ser resolvida.

Identificamos, também, estudantes do 3º ano que fazem uso de representações pictográficas acompanhadas da operação correta para resolver a situação, como o realizado por Rute (Figura 2.14).

Figura 2.14 – Resolução usando pictográfico e operação

S2. A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?

3º ano: Rute

Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Como pode ser verificado, Rute[9] está buscando compreender a relação multiplicativa (quatro vezes mais) através do estabelecimento de relações entre a distância da casa de José e de Luiz até a escola. Para isso, ela faz o registro pictográfico da distância da casa de Luís para a escola, bem como a distância da casa de José para escola, utilizando traços que podem ser pensados enquanto representantes das distâncias percorridas. Além da representação pictográfica, Rute faz uso da representação simbólica (a operação) de forma adequada.

Salientamos que, assim como nas situações apresentadas anteriormente (S1, S4 e S8) identificamos estudantes do 3º ano que usam as operações de adições demonstrando que eles não conseguem compreender as relações presentes no enunciado, mesmo tendo iniciado com conceitos do Campo Conceitual Multiplicativo, conforme as orientações oficiais para o currículo escolar.

Assim, parece-nos importante que o professor disponibilize momentos para refletir junto aos seus estudantes sobre as diferentes representações (pictográficas, icônicas e simbólicas), bem como sobre o raciocínio empregado nas relações ternárias e quaternárias, que, embora abordem o raciocínio multiplicativo, contêm características distintas entre si segundo apresentado no Capítulo I.

9 Rute usa representações icônicas para resolver outra situação (ver Figura 2.6).

O que podemos levar para a prática na sala de aula com os estudantes?

Ao longo deste capítulo, apresentamos os desempenhos e discutimos sobre os esquemas e as formas de registro usadas por estudantes do 1º ao 3º ano do ensino fundamental. Os desempenhos apresentados por eles revelam que, embora apresentem baixo percentual de acertos para resolverem as situações do Campo Conceitual Multiplicativo, demonstram, em seus esquemas de resolução, uma compreensão intuitiva e avançam, de forma expressiva, à medida que o currículo proposto nas escolas passa a explorar de forma mais sistemática os conceitos multiplicativos.

Acreditamos que, ao analisar diferentes esquemas de resolução usados por seus alunos, o professor poderá verificar, na solução apresentada, se eles conseguem interpretar o enunciado ou se estão usando "expressões verbais" (dicas) para escolher a operação a ser utilizada. Além disso, perceber se eles empregam corretamente os elementos que relacionam as quantidades presentes no enunciado, bem como se armam acertadamente e efetuam as operações escolhidas para a resolução. Por fim, analisar se eles compreendem as trocas e os agrupamentos necessários para resolver a operação e as regras referentes ao sistema de numeração decimal.

Nesse sentido, chamamos a atenção para a importância de o professor observar os esquemas de resolução e os registros usados pelos estudantes, quer conduzam a respostas corretas ou incorretas. Isso porque ele poderá identificar, na sua turma, a forma como seus alunos estão compreendendo as situações envolvendo o Campo Conceitual Multiplicativo e os equívocos que eles comentem na resolução, com vistas a propor atividades que contribuam para uma ampliação conceitual.

Por exemplo, o uso sistemático de representações pictográficas e icônicas (desenhos) pelos estudantes desses anos escolares para resolver as situações envolvendo o Campo Conceitual Multiplicativo, mostra que esse é um recurso didático a ser explorado pelo professor com seus alunos, na sala de aula. Isso porque esse tipo de representação permite não apenas o estudante fazer registro das quantidades presentes no enunciado, mas, sobretudo, acompanhar o processo de resolução da situação.

Fazer atividades em sala de aula envolvendo uso de representações pictográficas ou icônicas não significa deixar de explorar o uso da operação para a resolução das situações propostas, mas essas podem ser o ponto de partida para apresentação da operação a ser usada. O entendimento da operação não deve ser o único critério usado pelo professor para avaliar se os alunos compreendem as relações multiplicativas presentes nas situações propostas no contexto escolar.

Se desejamos que os estudantes dos primeiros anos do ensino fundamental ampliem suas concepções sobre o Campo Conceitual Multiplicativo, precisamos planejar atividades de modo a contemplar diferentes eixos, classes e estimular que eles usem formas diversificadas de registros (pictográfico, icônico e simbólico) para representar a situação proposta. O grande desafio no processo de ensino- aprendizagem é ampliar as dificuldades para os estudantes, no conjunto de situações propostas, sabendo o que se está propondo e onde se deseja chegar com o que está sendo proposto.

Nesse sentido, organizamos, em 2015, um processo formativo com os professores parceiros da Rede E-Mult, para apresentar e discutir sobre a Teoria dos Campos Conceituais, bem como analisar e elaborar situações envolvendo o Campo Conceitual Multiplicativo. Esse processo formativo possibilitou a troca de experiências entre os professores, de diferentes anos, e pesquisadores, culminando na organização do próximo capítulo que trata sobre as memórias da formação: as atividades elaboradas pelos professores e as narrativas acerca da experiência vivenciada.

REFERÊNCIAS

HUGHES, Martin. **Children and number:** difficulties in Learning mathematics. Oxford: Basil Blackwell, 1986.

LAUTERT, Síntria Labres; SPINILLO, Alina Galvão . Como as crianças representam a operação de divisão: da linguagem oral para outras formas de representação. **Temas em Psicologia** (Ribeirão Preto), Brasília, v. 7, 1999. p. 23-36.

LAUTERT, Síntria Labres; SPINILLO, Alina Galvão . Estudo de intervenção sobre a divisão: ilustrando as relações entre metacognição e aprendizagem. **Educar em Revista** (Impresso), v. 1, 2011. p. 93-108.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; MERLINI, Vera Lúcia; SANTOS, Aparecido dos. O raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e Educação** (UNESP. Impresso), v. 20, 2014. p. 517-533.

MORO, Maria Lúcia Farias; SOARES, Maria Tereza Carneiro. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, 2006. p.99-124.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute Elizabete de Sousa. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetike**, v.17, jan/jun, 2009. p.105-150.

SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos; LAUTERT, Síntria Labres; CASTRO-FILHO, José Aires de; Educação em rede e as estruturas multiplicativas a educação básica. In: 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Ilhéus. **Anais** ... Ilhéus: UESC, 2015. p.3357-3368.

SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos; LAUTERT, Síntria Labres; CASTRO-FILHO, José Aires de; SANTOS, Ernani Martins dos. Observatório da educação em rede: as estruturas multiplicativas e a formação continuada. **Revista Educação Matemática em Foco**. 5(01), 2016. p. p.105-150.

SPINILLO, Alina Galvão; FERREIRA, Juliana; LAUTERT, Síntria Labres . Ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos a partir de explicitação dos princípios invariantes. In: CASTRO-FILHO, José Aires de; BARRETO, Marcilia Chagas; BARGUIL, Paulo Meireles; MAIA, Dennys Leite; PINHEIRO, Josilene Lima. (Org.). **Matemática, cultura e tecnologia:** perspectivas internacionais. Curitiba: CRV, 35-47, 2016.

SPINILLO, Alina Galvão; PACHECO, Auxiliadora Baraudi; FERREIRA, Juliana; CAVALCANTI, Luciano. O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso? **Boletim GEPEM (on-line)**, v. 64, 2014. p. 1-12.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender. In: BITTAR, Marielena; MUNIZ, Cristiano Alberto (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Curitiba: CRV, 2009. p. 13 – 35.

Capítulo III

Ernani Martins dos Santos
Síntria Labres Lautert
Claudia Roberta Araújo Gomes
Juliana Ferreira Gomes da Silva

MEMÓRIAS DA FORMAÇÃO: ATIVIDADES ELABORADAS PELOS PROFESSORES E NARRATIVAS ACERCA DA EXPERIÊNCIA

Neste capítulo, apresentamos o processo formativo colaborativo desenvolvido na Rede E-Mult, no ano 2015, nos três estados: Bahia, Ceará e Pernambuco. Discutimos as situações elaboradas pelos professores do 1º ao 3º ano do ensino fundamental, que foram aplicadas com seus estudantes e analisadas no grupo colaborativo. No fim, são apresentadas narrativas acerca da experiência do professor e do processo formativo, entrelaçando-se as memórias compartilhadas e as implicações na ação docente dos conhecimentos adquiridos ao longo do processo.

3.1. A Formação Colaborativa E-Mult

No ano 2014, iniciamos o contato com as possíveis escolas parceiras, visando desenvolver uma formação continuada, no âmbito do Campo Conceitual Multiplicativo. Tal formação deveria atender às particularidades das escolas e das cidades envolvidas em cada um dos estados, tendo como fio condutor o modelo proposto por Magina (2008), que apresenta o método da *ação-reflexão-planejamento-ação*.

Nos três estados, a formação colaborativa iniciou-se com uma reflexão sobre o desempenho dos estudantes no instrumento diagnóstico (ver Capítulo II), seguida de discussões sobre a Teoria dos Campos Conceituais (ver Capítulo I), da elaboração e aplicação de situações do Campo Conceitual Multiplicativo. Essas atividades tiveram, por objetivo, promover a reflexão com os professores sobre as diferentes estratégias de ensino e aprendizagem que possibilitam a apropriação e expansão do Campo Conceitual Multiplicativo, pelos estudantes.

A cada encontro, os professores realizavam discussões teóricas sobre o conteúdo matemático (por exemplo, Proporção Simples, Comparação Multiplicativa, entre outros); elaboravam as situações e, ainda, planejavam as atividades didáticas sobre como trabalhar o que foi elaborado com sua(s) turma(s), configurando-se, assim, em ação – reflexão – planejamento (como no modelo de Magina, acima citado) em grupo, para posterior aplicação em sala de aula.

É importante destacar que, embora a execução da ação tenha ocorrido de modo individual na escola, onde cada professor aplicou, separadamente, a atividade com a sua turma, as situações e o planejamento da aplicação foram elaborados no grupo. As atividades eram construídas, inicialmente, em pequenos grupos e, posteriormente, discutidas no grande grupo, juntamente com o professor-formador (pesquisador). Quando necessário, as atividades eram revistas e reformuladas para posterior aplicação com os estudantes, seguidas de discussões sobre ações didáticas.

No encontro seguinte, a formação iniciava-se com um momento de discussão sobre a aplicação das situações em sala de aula (por exemplo: como o professor desenvolveu a atividade com a sua turma? Quais as dificuldades observadas?), seguido de uma discussão sobre os procedimentos utilizados pelos estudantes de cada turma na resolução da situação (por exemplo: quais foram as formas de registro utilizadas pelos estudantes? Quais os esquemas de resolução empregados?). De modo simultâneo e paralelo, eram promovidos momentos de reflexão sobre as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes e as possíveis formas de intervir, abordando os registros e os esquemas usados pelos estudantes para resolver a situação proposta.

Antes de iniciarmos a apresentação e discussão de situações elaboradas pelos professores, resgatamos pressupostos básicos presentes na Teoria dos Campos Conceituais que são relevantes para o ensino e a aprendizagem da Matemática, pautando-se em discussões que tratavam de aspectos da teoria já abordados e discutidos nos Capítulos I e II deste livro.

Conforme visto no Capítulo I, Vergnaud (1996, 2003, 2011, 2009) discute que o conhecimento emerge a partir da resolução de situações sendo ele considerado um processo cognitivo que está presente nas diversas atividades cotidianas ou nos ambientes formais de ensino, iniciando com validade restrita e se desenvolvendo por um longo período de tempo. Para esse teórico, o que se desenvolve "são as formas de organização da atividade e essa forma de organização da atividade concerne a vários registros dessa atividade" (VERGNAUD, 1996, p.11). Ao abordar o conceito de organização, ele chama a atenção para a noção de *esquema*, inicialmente proposto por Piaget e ampliado por ele.

É nas situações cotidianas que as crianças deparam-se com várias ideias matemáticas que não são visíveis e que serão, posteriormente, exploradas na forma de conceitos, no contexto escolar, de forma sistemática. Por exemplo, uma criança de cinco anos, ao ser solicitada pela mãe para ajudá-la a contar quantas pessoas irão almoçar em casa e que estão espalhadas na sala e no jardim, poderá proceder da forma que apresentamos a seguir. Ela irá na sala, conta apontando para a quantidade de pessoas: um, dois, três, quatro, e retorna dizendo para a mãe que tem "quatro". Então, a mãe solicita que ela conte quantas pessoas estão no jardim e ela procede da mesma forma: um, dois, três e informa à mãe que tem "três". A mãe solicita que ela, dessa vez, conte quantas pessoas, ao todo, estão na sala e no jardim para o almoço.

Essa mesma criança irá à sala e contará: "um", "dois", "três", "quatro" e depois irá ao jardim e conta "cinco", "seis", "sete" e retorna para informar à mãe que tem "sete". A mesma criança, dois anos mais tarde, não irá recontar o todo novamente. Ela dirá para mãe que, se na sala têm "quatro" e no jardim têm "três", então, 4+3 são 7. Por que ela faz isso? Porque essa criança apropriou-se da noção de cardinal, como sendo o representante de um conjunto, ou seja, o quatro representa a quantidade total de pessoas que estão na sala e o três a quantidade total de pessoas que estão no jardim. Essa nova organização permitirá a essa criança responder à mãe sem precisar realizar a contagem de cada uma das pessoas novamente.

O exemplo, acima descrito, proposto por Vergnaud (1996), ilustra duas ideias matemáticas extremamente importantes que não são visíveis quando as crianças estão realizando a atividade: a correspondência biunívoca e o conceito de cardinal. Portanto, o *esquema* envolve uma organização invariante da conduta para uma classe de situações, que vão desde o gesto até uma explicitação simbólica compartilhável – a qual Vergnaud denomima *conceitos*.

Esse teórico afirma, também, que uma única situação, em geral, exige a consideração de vários conceitos e que, para o estudante compreender um conceito, ele precisará interagir com uma diversidade de situações. Nos dois capítulos anteriores, discutimos diversas situações que devem ser apresentadas pelo professor aos estudantes para que eles possam compreender a multiplicação e a divisão. Aqui, neste capítulo, buscamos discutir sobre o fato de uma situação exigir a consideração de vários conceitos. Vejamos o exemplo de uma situação elaborada pelos professores durante a formação do Projeto E-Mult:

> *Andrea foi à feira e comprou quatro abacaxis a cinco reais a unidade. Quanto Andrea gastou?*

Ao perguntarmos a um professor que ensina Matemática, nos anos iniciais do ensino fundamental, quais conceitos estão presentes nessa situação, ele, muito provavelmente, enfatizará o conceito da multiplicação que está mais evidente na problematização: multiplicando a quantidade de abacaxis pela quantidade de reais pagos para cada abacaxi, obteremos o valor gasto por Andréa. É bem provável, também, que ele faça referência ao conceito do campo aditivo, considerando a adição de parcelas repetidas como abordagem inicial da multiplicação (o valor pago em reais, nesse caso, cinco, poderá ser somado considerando-se a quantidade de abacaxis comprados, no caso, quatro). No entanto, é preciso atentar para outros conceitos que estão inseridos nessa atividade e que se fazem presentes para a compreensão da situação na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais. Por exemplo, o conceito de cardinal (o número quatro representa a quantidade total de abacaxis comprados e, o número cinco, a quantidade total de reais a ser paga por cada abacaxi); o conceito de proporção (existe uma relação entre a quantidade de abacaxi e a quantidade em reais a ser paga: se a quantidade de abacaxi aumentar, aumenta a quantidade de reais a ser paga), como também os conceitos de medida, de grandezas, entre outros.

Tais reflexões apresentadas chamam a atenção para o fato de que "não é em alguns dias ou em algumas semanas que a criança adquire uma competência nova ou compreende um conceito novo, mas sim ao longo de vários anos de escola e de experiência" (VERGNAUD, 2011, p.16). Para que isso aconteça, é necessário que ela interaja com uma diversidade de situações e que o professor reconheça que uma situação, por mais simples que seja, envolve vários conceitos e que um conceito por mais simples que seja, está inserido em várias situações, como ilustrado ao longo dessa coleção sempre que apresentamos a abordagem dos campos conceituais. Por essa razão, fala-se que a formação de um conceito é gradual e progressiva, uma vez que está frequentemente sendo reconstruída a cada nova *situação* problematizada. O grau de dificuldade de uma *situação* será determinado pela sua estrutura e não pela aplicação de uma ou outra operação, ou algoritmo da Matemática.

O que temos discutido até este momento – e que foi abordado e discutido com todos os professores no processo formativo – leva-nos a refletir sobre a importância de os professores (que ensinam Matemática e atuam nos anos iniciais do ensino fundamental) terem conhecimento acerca dos diferentes tipos de situações que compõem o Campo Conceitual Multiplicativo, uma vez que eles podem empregar a mesma operação em sua resolução, mas apresentarem níveis de dificuldade distintos. Nesse sentido, o professor deve se questionar: *qual seria o obstáculo, se as situações apresentadas em sala de aula são sempre as mesmas? Será que estaríamos contribuindo para uma ampliação conceitual dos estudantes quando apresentamos* *situações semelhantes?* Defendemos que não. Por isso, retomamos, aqui, o Campo Conceitual Multiplicativo, apresentando situações que foram elaboradas pelos professores durante o processo formativo, para que eles possam trabalhar com seus alunos diversas situações, em que emerjam vários conceitos e que apresentem, também, diferentes níveis de dificuldade.

3.2. Situações elaboradas pelos professores do 1º ao 3º ano

Neste tópico, apresentamos situações que envolvem as relações quaternária e ternária, elaboradas pelos professores, considerando as *classes*: um para muitos, muitos para muitos, relação desconhecida, referente desconhecido, referido desconhecido, Combinatória e Configuração Retangular. Essas situações foram selecionadas de forma aleatória, dentro de uma lista construída e aplicada pelos professores, nas suas turmas.

3.2.1. As situações de Proporção Simples

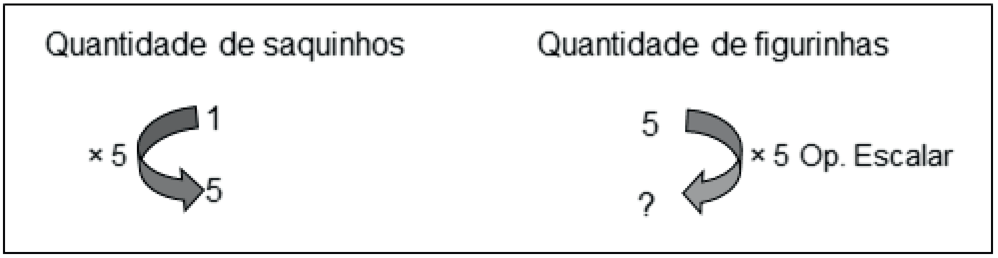
Conforme comentado no Capítulo I, as situações de Proporção Simples envolvem relações quaternárias e abarcam duas classes de problemas: um para muitos e muito para muitos. Vejamos, a seguir, exemplos dessas situações elaboradas pelos professores que envolvem o raciocínio multiplicativo, cujas operações indicadas para resolução são a multiplicação ou a divisão (algoritmos); mas que também podem ser resolvidas pelos estudantes do 1º ao 3º ano através de contagens ou adição de parcelas repetidas (ou, na maioria das vezes, a partir da representação pictográfica ou icônica, uma vez que eles ainda não foram introduzidos à multiplicação e à divisão, no contexto escolar). Como vimos no Capítulo II, os estudantes desses anos escolares, inicialmente, tendem a utilizar os esquemas do Campo Conceitual Aditivo para responder às situações que evocam o Campo Conceitual Multiplicativo.

3.2.1.1. Proporção Simples: um para muitos

Exemplo 1. Joana comprou um saquinho com 5 figurinhas. Quantas figurinhas têm em 5 saquinhos iguais a esse?

Observamos que essa situação parte da unidade de uma das grandezas (um saquinho), caracterizando-se, assim, como pertencente à classe um para muitos. Ela é prototípica quando se ensina a multiplicação na escola; ou seja, comumente os professores partem desse tipo de situação quando abordam o conceito de multiplicação. Diante disso, entendemos que a operação mais indicada para a sua resolução é a multiplicação, conforme apresentamos na Figura 3.1. Muitas crianças, nessa fase escolar, trabalham as ideias multiplicativas a partir da adição de parcelas repetidas ou da contagem de agrupamentos. Mesmo diante dessa constatação, encorajamos o seu trabalho com o conceito multiplicativo, explorando os conceitos da situação, conforme o esquema proposto, para o seu aprofundamento no entendimento das relações presentes nessa situação.

Figura 3.1. Proposta para resolução do Exemplo 1 com o operador escalar[1]



Fonte: E-Mult (2013/2017)

1 Mesmo não sendo comum a abordagem dos diagramas de Vergnaud no ensino de situações de multiplicação e divisão do 1º ao 3º ano, é pertinente o professor esclarecer as relações existentes e o processo resolutivo a partir de tais diagramas, como forma de explicitar o raciocínio envolvido. Neste capítulo, levando emconsideração o nível escolar a que se destina, abordaremos as resoluções das situações partindo apenas do operador escalar, mesmo sabendo que elas podem ser resolvidas pelo operador funcional, como discutido no Capítulo 1. Ressaltamos que, no processo formativo, todas as situações de Proporção Simples foram discutidas e analisadas com os professores utilizando os operadores escalar e funcional na resolução.

Essa situação, assim como outras quaternárias de proporção simples, pode ser resolvida partindo das ideias discutidas no Capítulo I. Iniciamos nossa discussão utilizando o operador escalar (observe as setas) que, nesse caso, é cinco, conforme a Figura 3.1 acima. Analisando especificamente a grandeza "quantidade de saquinhos", notamos que ela aumentou de um para cinco, ou seja, multiplicamos a unidade pelo operador escalar (5). Para manter a proporcionalidade, aplicamos o mesmo operador escalar (5) na grandeza "quantidade de figurinhas", multiplicando esse operador escalar pela quantidade de figurinhas de um saquinho (que também é 5) e obtendo, assim, o valor total de figurinhas – que é 25. A ideia, nesse caso, é sempre manter a proporcionalidade: se em uma grandeza, as quantidades são alteradas pela multiplicação de um operador escalar, esse mesmo operador deve ser utilizado para alterar a quantidade da outra grandeza.

Comentários feitos por professores do 1º e do 3º anos que aplicaram o Exemplo 1 em sala de aula:

> Essa situação foi respondida por 35 estudantes, sendo 18 do 1º ano e 17 do 3º. Desses, apenas três estudantes do 3º ano responderam corretamente.
>
> Sobre os esquemas observados pelos professores após a aplicação da situação, eles apontaram que os estudantes, tanto do 1º ano quanto do 3º ano responderam seguindo suas próprias estratégias, utilizando a representação pictórica, através de procedimentos aditivos envolvendo tanto a adição como a subtração; alguns realizaram a operação de multiplicação e também registraram, em alguns casos, apenas a resposta final, utilizando numerais.

Sobre os erros encontrados, os professores do 1º ano indicaram que foram realizadas contagens e distribuições aleatórias, representações pictóricas erradas, dificuldades na interpretação da situação (lê, mas não compreende) e tentaram realizar uma operação aritmética, mas, de forma incompleta. Os professores do 3º ano indicaram o equívoco na operação aritmética, uma vez que os estudantes empregaram procedimentos aditivos, mesmo evidenciando uma adição de parcelas repetidas (em alguns casos), o que demonstra o início de um pensamento multiplicativo.

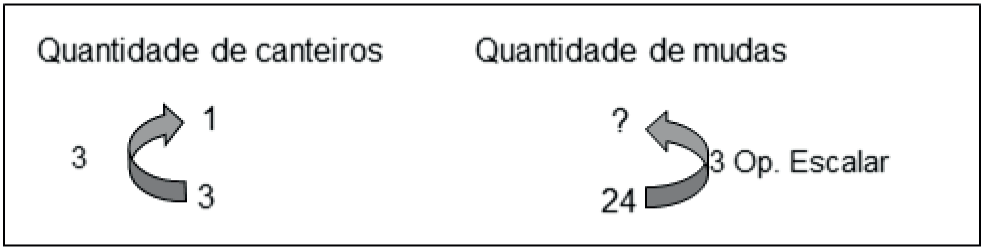
Utilizando a metodologia da formação, os professores discutiram coletivamente a situação, os erros dos estudantes e planejaram uma nova ação para trabalhar os erros encontrados. Os professores do 1º ano realizaram uma nova aplicação da situação, de forma coletiva (em grupos), observando os diálogos e os procedimentos dos estudantes nessa nova aplicação. Nesse processo, a todo momento, eles assessoravam os grupos questionando as possibilidades de respostas e estratégias de resolução levantadas pelos estudantes. Os professores do 3º ano optaram por resolver a situação, na lousa, evidenciando os procedimentos operatórios e trabalhando outros exemplos semelhantes.

Os professores classificaram essa atividade como ótima, porque levou os estudantes ao raciocínio lógico. Os professores do 1º ano destacaram que não haviam trabalhado anteriormente com esse tipo de situação, em sala de aula, já que os conceitos multiplicativos não fazem parte do currículo escolar.

Exemplo 2. Na escola em que Camila estuda, há uma horta com 3 canteiros. Neste mês, serão plantadas 24 mudas de couve. As mudas serão repartidas igualmente entre os canteiros. Quantas mudas serão plantadas em cada canteiro?

O Exemplo 2 também envolve uma relação quaternária, do eixo Proporção Simples e classe um para muitos; nessa direção, a proposta de resolução também emprega o operador escalar.

Figura 3.2 Proposta para a resolução do Exemplo 2 com o operador escalar.



Fonte: E-Mult (2013/2017).

Ao analisarmos a resolução com o uso do operador escalar (flecha vertical), partimos do mesmo princípio que empregamos no Exemplo 1. Porém, agora, focamos no conceito-chave presente na situação (divisão). Partindo da grandeza quantidade de canteiros, dividindo a quantidade total de canteiros (3) pelo escalar (3), obtém-se um (nesse caso, precisamos identificar qual número divide três e resulta em um). Para manter a proporcionalidade, utilizando o mesmo raciocínio, esse mesmo operador escalar deve ser utilizado na grandeza quantidade de mudas, com a mesma operação indicada na grandeza quantidade de canteiros. Assim, obtemos a quantidade de mudas por canteiro (8). Em termos aritméticos: 24 ÷ 3 = 8.

Comentários feitos pelo professor do 3º ano que aplicou o Exemplo 2 em sala de aula:

O Exemplo 2 foi resolvido por 22 estudantes do 3º ano, sendo que apenas um estudante resolveu de forma incorreta. Os esquemas observados pelo professor foram a utilização da operação de divisão e os registros através da representação pictográfica.

Mesmo com apenas um estudante errando a resposta, o professor chama a atenção para o fato de, no 3º ano, apenas 50% dos estudantes conseguirem realizar a operação corretamente. A outra metade acertou utilizando a estratégia da representação pictográfica, evidenciando que esse ainda é um recurso recorrente quando os estudantes não dominam a operação de divisão para resolver a situação proposta e chegar ao resultado correto.

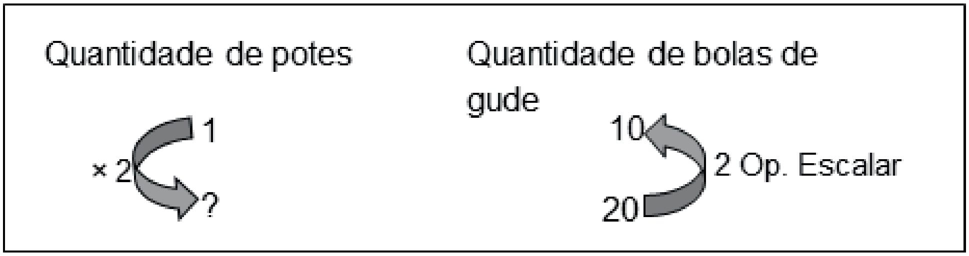
O professor destaca que o erro encontrado refere-se ao procedimento de resolução da operação (algoritmo da divisão). Para sanar a dificuldade desse e de outros estudantes, o professor realizou a explanação da situação, no quadro, explicando os procedimentos operatórios da divisão.

Na discussão coletiva, no momento de reflexão durante a formação, o professor classificou a atividade como boa, pois, apesar da dificuldade da turma com a operação de divisão, eles conseguiram solucionar e tiveram um bom resultado.

Exemplo 3. João tem um pote em que cabem 10 bolas de gude, mas ele tem 20 bolas de gude. Quantos potes ele precisa ter para colocá-las?

O Exemplo 3 também envolve uma relação quaternária, do eixo Proporção Simples, classe um para muitos, que requer uma distribuição equitativa de 20 bolas de gude, na qual é afirmado que cada pote comporta 10 bolas de gude e pergunta pela quantidade de potes necessários, evidenciando uma divisão por quotas. Portanto, nesse caso, é preciso realizar, também, uma operação de divisão, só que com um significado diferente daquele apresentado no Exemplo 2. Sendo um problema de Proporção Simples, o princípio empregado para a resolução será o mesmo, com o uso do operador escalar. Vejamos os procedimentos de resolução para esse caso.

Figura 3.3. Proposta de resolução do Exemplo 3 com o operador escalar.



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Observando as flechas verticais, iniciando na grandeza quantidade de bolas de gude, que já possui as medidas definidas, dividindo a quantidade total de bolas (20) pela quantidade de bolas de gude para um pote (10), obtemos o operador escalar (2). Nesse caso, com relação ao operador escalar a ser descoberto, precisamos encontrar um número que divida o 20 e dê como resultado o 10 (20÷2=10). Para manter a proporcionalidade, aplicamos o mesmo operador escalar (2) na grandeza quantidade de potes; contudo, de maneira inversa, já que não temos a quantidade maior para realizar a divisão. Ao multiplicarmos esse operador escalar pela quantidade unitária (um pote), determinamos, assim, a quantidade total de potes necessários (2), uma vez que 1×2 = 2.

Observem que, nessa situação, como buscamos o tamanho das partes (quotas), o significado é diferente da situação em que buscamos o número de partes (partição). Por isso, os procedimentos de resolução são diferentes (um parte da operação de divisão e, o outro, da operação de multiplicação), mesmo tratando-se de uma divisão equitativa, em ambos os casos.

Comentários feitos pelos professores do 1º ano que aplicaram o Exemplo 3 em sala de aula:

O Exemplo 3 foi resolvido por 43 estudantes do 1º ano, tendo 29 deles resolvido ou chegado a apresentar o resultado correto.

Os professores relataram que os estudantes utilizaram representações pictóricas, além do registo apenas do resultado final de forma numérica (utilização de algarismos), nas suas resoluções.

Com relação aos erros encontrados, eles destacaram a confusão conceitual entre a quota (número de potes) e a parte (número de bolas de gude); e, também, o uso de números aleatórios com quantidades que não correspondiam aos dados presentes na situação.

Buscando trabalhar os erros e, ao mesmo tempo, introduzir o conceito de divisão, os professores utilizaram os esquemas proporcionais das relações quaternárias na resolução e explanação da situação para os estudantes e, à medida que a resolução era apresentada, os professores foram questionando as crianças acerca dos processos de resolução, os números presentes na situação e os significados presentes nesse processo.

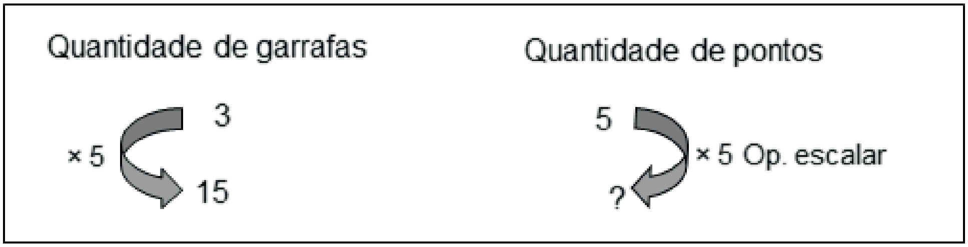
Os professores classificaram essa situação como ótima, porque ela conduziu os estudantes ao raciocínio lógico, resolvendo questões que, costumeiramente, não são trabalhadas em sala de aula nesse nível escolar, já que evocam, explicitamente, os conceitos multiplicativos (nesse caso, o da divisão).

3.2.1.2. Proporção Simples: muitos para muitos

Exemplo 4. Em uma festa na escola, a cada 3 garrafas recicláveis coletadas, a turma marcaria 5 pontos. A turma do 2º ano coletou 15 garrafas. Quantos pontos essa turma marcou?

Essa situação envolve uma relação quaternária, do eixo Proporção Simples, da classe muitos para muitos. Por isso, para sua resolução, requer uma operação de multiplicação ou divisão. Observe, na Figura 3.4, a descrição dos procedimentos resolutivos para essa situação, usando o operador escalar.

Figura 3.4. Proposta de resolução do Exemplo 4 com o operador escalar



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Analisando a grandeza "quantidade de garrafas", que tem as duas medidas definidas (3 e 15), para saber em quantas vezes o operador escalar (setas verticais) aumenta a quantidade de garrafas, basta descobrirmos qual é o número (o operador escalar) que, multiplicado por 3, irá resultar em 15. Temos que esse número é cinco pois, 3×5 = 15. Logo, o operador escalar é cinco. Também podemos obter esse mesmo operador a partir da divisão da quantidade 15 pela quantidade 3, encontrando-se cinco vezes, ou seja, o operador escalar é cinco já que 15÷3 = 5. Ora, se a quantidade aumentou em cinco vezes em uma das grandezas e como as grandezas são proporcionais, esse mesmo operador escalar é utilizado para determinar a quantidade de pontos para as 15 garrafas e, então, multiplica-se 5x5 cujo resultado é 25 (quantidade de pontos para 15 garrafas).

Comentários feitos pelo professor do 2º ano que aplicou o Exemplo 4 em sala de aula:

> Essa situação foi aplicada com 17 estudantes do 2º ano e nenhum deles conseguiu resolvê-la corretamente.
>
> A professora responsável pela aplicação relatou que os estudantes buscaram a solução a partir da operação de adição e de representações pictóricas ou icônicas.

Com relação aos erros encontrados, ela destaca o uso dos pares numéricos com procedimentos aditivos, uso de números aleatórios, na tentativa de solução, e dos desenhos que não conduzem ao resultado.

Esses erros foram trabalhados coletivamente, convidando cada estudante a vir resolver a situação, no quadro, e explicar para os colegas o seu raciocínio. À medida que isso acontecia, a professora trabalhava o entendimento da resolução da situação, apresentando procedimentos referentes ao pensamento multiplicativo existente na situação.

A professora relata que teve uma experiência bastante positiva em replanejar a aplicação da situação e que, não necessariamente, precisou trabalhar as operações de multiplicação e divisão com os estudantes (algoritmo). Ela focou no uso de contagens, bem como na compreensão das relações estabelecidas na situação, conduzindo os estudantes ao pensamento multiplicativo presente na situação. O estímulo ao trabalho coletivo foi o ponto forte destacado pela professora e, também, a socialização das representações dos estudantes para a compreensão do resultado final.

3.2.2. As Situações de Comparação Multiplicativa

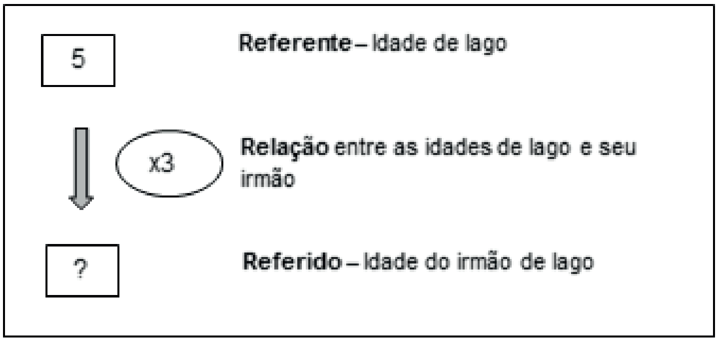
Nesse eixo, pertencente à relação ternária, encontramos situações que envolvem as classes referente, referido ou relação desconhecidos. Nas situações referente ou referido desconhecido é comum a utilização das operações de multiplicação ou de divisão, uma vez que as relações estabelecidas no eixo fazem referência a uma relação que aumenta ou a uma relação que diminui as quantidades envolvidas. Em situações de relação desconhecida, a operação utilizada é, necessariamente, a divisão. Vejamos alguns exemplos elaborados pelos professores.

3.2.2.1 Referido

Exemplo 5. Iago tem 5 anos e seu irmão tem 3 vezes mais que a idade dele. Qual a idade de seu irmão?

Essa situação envolve uma relação ternária, eixo de comparação multiplicativa, em que é apresentado o referente (idade de Iago), a relação (três vezes mais) e é solicitado o referido (idade do irmão de Iago).

Figura 3.5. Diagrama para compreender a situação de comparação sem referido



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Esse diagrama ilustra matematicamente que, se o irmão de Iago tem três vezes a idade do Iago, para determinar a idade desse irmão, é preciso multiplicar a idade de Iago pela relação entre essas idades (no caso, três). Aplicando a operação aritmética, temos: $5 \times 3 = 15$.

Destacamos, assim, que o uso das denominações dos elementos (referido, referente e relação) não necessariamente precisa ser ensinado aos estudantes do 1º ao 3º ano. Como este texto é um recurso para ampliar o entendimento e, consequentemente, o trabalho em sala de aula, achamos pertinente destacar essa terminologia. A nossa intenção, na construção desse diagrama, é facilitar a interpretação na situação (cálculo relacional). Esse diagrama também pode ser útil para evidenciar aos estudantes a compreensão das relações da situação sem, necessariamente, referir-se aos termos em destaque (referido, referente e relação).

Comentários feitos pelos professores que aplicaram o Exemplo 5 em sala de aula:

Essa situação foi aplicada com 17 estudantes do 1º ano e desses, 13 conseguiram solucioná-la.

Para a solução, os estudantes empregaram representações gráficas, contagens com os dedos e fizeram uso de operações aritméticas, como, por exemplo, a adição.

Os erros encontrados pelo professor foram referentes ao uso da operação de adição entre os pares numéricos presentes na situação.

Para trabalhar a questão dos erros, o professor realizou questionamentos aos estudantes, durante a reaplicação da situação em aula, explicitando os procedimentos de cada etapa e conduzindo-os a um raciocínio lógico referente ao conceito envolvido (raciocínio multiplicativo).

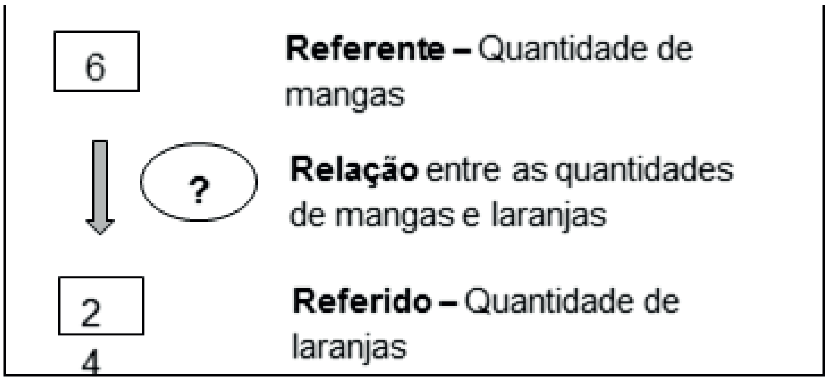
Os professores, na discussão sobre a situação elaborada e sobre os procedimentos de reaplicação da situação, classificaram as atividades desenvolvidas, na aplicação e reaplicação da situação, como ótimas, uma vez que, no processo de ensino e aprendizagem, ela promoveu a interação entre os estudantes e houve debates sobre as hipóteses de cada um deles acerca da resolução e do resultado obtido.

3.2.2.2 Relação

Exemplo 6. Para fazer uma salada de frutas, comprei 6 mangas e 24 laranjas, além de outras frutas deliciosas. Quantas vezes mais a quantidade de laranjas é maior que a quantidade de mangas?

O Exemplo 6 envolve, também, uma relação ternária do eixo Comparação Multiplicativa. Nesse caso, temos o referente (quantidade de mangas), o referido (quantidade de laranjas) e é solicitada a relação entre as quantidades de manga e laranjas (quantas vezes mais), conforme podemos observar na Figura 3.6, apresentada a seguir.

Figura 3.6. Diagrama para compreender a situação comparativa com relação desconhecida



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

A relação evidenciada no diagrama da Figura 3.6 mostra que, para determinar a relação entre as quantidades de laranja e de manga, é preciso dividir o número de laranjas (24) pelo número de mangas (6) e encontrar o número referente à relação entre a quantidade de laranjas e de mangas (4), ou seja, $24 \div 6 = 4$. Outra possibilidade é fazer tentativas de encontrar um número (que representa o valor da relação entre as frutas, ou seja, quatro vezes mais) que, multiplicado pela quantidade de mangas (6), resulta na quantidade de laranjas (24). Em termos aritméticos: $4 \times 6 = 24$.

Nesse tipo de situação, é muito comum os estudantes interpretarem a expressão "vezes mais" como uma adição e, por isso, eles tendem a realizar uma adição com os pares numéricos presentes no enunciado. Nesse sentido, torna-se importante o professor problematizar a situação com eles e solicitar que explicitem as suas formas de pensar, seja em pequenos grupos ou realizando a atividade no quadro.

Comentários feitos pelos professores que aplicaram o Exemplo 6 em sala de aula:

No total, 36 estudantes do 3º ano, de turmas diferentes, resolveram a situação e 11 deles conseguiram solucioná-la corretamente.

Os esquemas observados pelos professores, na resolução dos estudantes, foram contagens, representações pictóricas, explicações orais com registro numérico do resultado e uso de operações aritméticas.

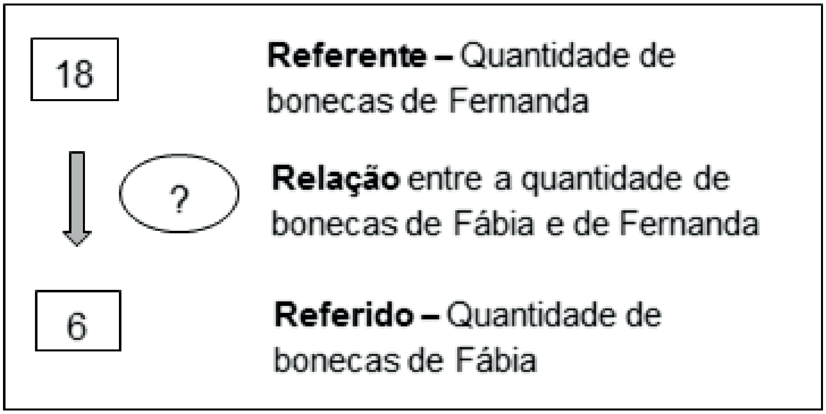
Os erros mais encontrados, nesse caso, foram a contagem errada da quantidade e o uso equivocado da operação (emprego da adição com os pares numéricos ou o resultado errado no cálculo multiplicativo).

Para trabalhar os erros, os professores expuseram a resolução da situação, no quadro, construindo um diagrama das relações, detalhando o que era pedido, na situação, e solicitando aos estudantes que explicassem como era possível chegar ao resultado. À medida que os questionamentos surgiam, eram exemplificadas situações semelhantes, que faziam referência aos questionamentos realizados, e os professores solicitavam que os estudantes pensassem, nesse exemplo, como relação à situação proposta.

Exemplo 7. Fábia ganhou 6 bonecas no seu aniversário. Fernanda, sua irmã mais velha, tem 18 bonecas. Quantas vezes a quantidade de bonecas de Fábia é menor que a quantidade de bonecas de Fernanda?

O Exemplo 7 apresenta o referente (quantidade de bonecas de Fernanda), o referido (quantidade de bonecas de Fábia) e solicita a relação (quantas vezes é menor). Ele aborda o conceito de divisão e, mesmo que não seja esperado o uso ou domínio da operação aritmética de dividir pelos estudantes do 1º ao 3º ano, esperava-se que eles resolvessem utilizando contagens, a partir de um pensamento multiplicativo que expusesse a relação "quantidade de vezes menor". Vamos, então, analisar o diagrama de resolução para o exemplo apresentado acima.

Figura 3.7. Diagrama para compreender a situação comparativa relação explícita desconhecida



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Analisando o diagrama, fica evidenciado que a relação (quantas vezes é menor), aplicada ao referente, faz diminuir a quantidade do referido. E, como essa relação é uma Comparação Multiplicativa, a operação mais indicada a ser utilizada, na resolução, é a divisão entre a quantidade do referente (18) pela quantidade do referido (6), que resulta na relação (3), ou seja, $18 \div 6 = 3$.

Comentários feitos pelo professor do 3º ano que aplicou o Exemplo 4 em sala de aula:

> 26 estudantes resolveram essa situação, sendo 8 do 1º ano e 18 do 3º. Apenas um estudante do 3º ano acertou.
>
> Os esquemas observados pelos professores indicam que os estudantes utilizaram contagens, representação pictórica e operações aritméticas (foco na adição, subtração e multiplicação)

Os erros encontrados explicitam que os estudantes fizeram a contagem errada ou utilizaram a operação errada (adição ou subtração ao invés da divisão). A dificuldade, nesse caso, parece residir na compreensão do termo "menor que".

Para trabalhar os erros, os professores apresentaram a resolução da situação e discutiram as respostas de forma coletiva com os estudantes, com representação de figuras para o referente e o referido para explicitar o raciocínio multiplicativo presente na situação e que expressa uma divisão equitativa.

Nas situações de Comparação Multiplicativa, embora os professores tenham discutido as situações em que o referente é o elemento desconhecido, durante o período de formação, eles não elaboram esse tipo de situação para aplicar com os estudantes. Uma possível explicação para esse fato poderia ser a própria complexidade desse tipo de situação, visto que nela, não é apresentado o elemento de referência (referente).

3.2.3. As situações de Combinatória

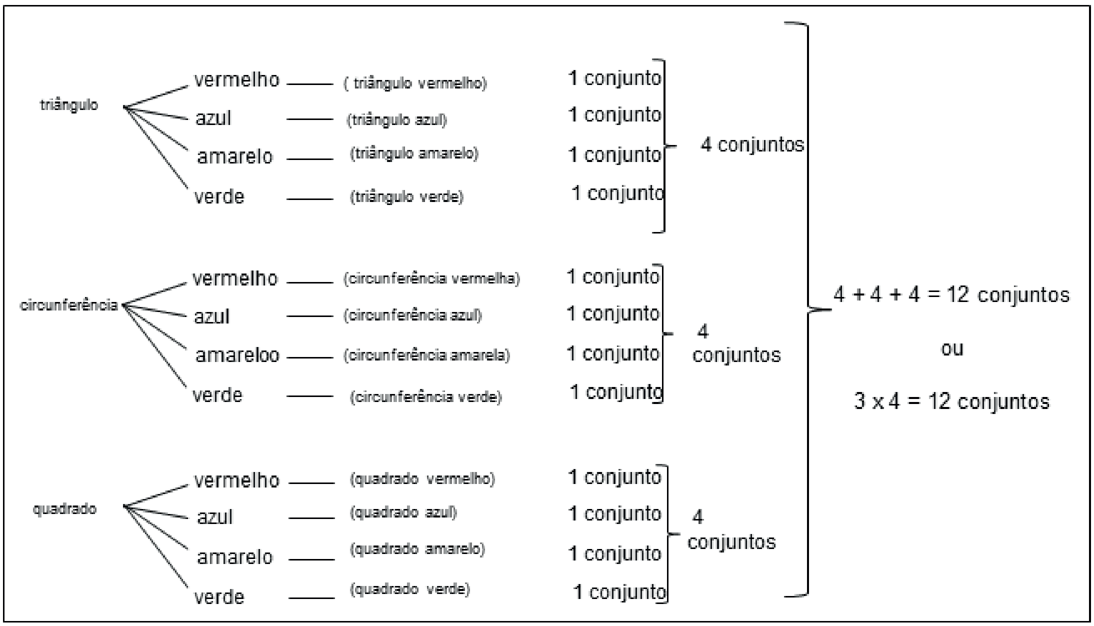
As situações que tratam da Combinatória também são de relações ternárias, porém, elas pertencem ao eixo Produto de Medidas e tratam da combinação de quantidades e medidas. Vejamos alguns exemplos das situações elaboradas pelos professores, no processo formativo.

Exemplo 8. A professora Adriana distribuiu 3 figuras geométricas: triângulo, círculo e quadrado e pediu que a turma pintasse as figuras de cores diferentes usando azul, amarelo, vermelho e verde. Quantas figuras com cores diferentes a turma terá no fim da atividade?

O Exemplo 8 aborda uma relação ternária, em que são apresentados dois conjuntos disjuntos[2]: o conjunto das figuras geométricas (triângulo, círculo e quadrado, totalizando três figuras) e o conjunto das cores (azul, amarelo, vermelho e verde, totalizando quatro cores). Busca-se encontrar um terceiro conjunto que é o da combinação entre as figuras e as cores apresentadas na situação, o conjunto das figuras coloridas. A operação mais indicada para resolução, nesse caso, é a de multiplicação dos conjuntos disjuntos (figuras geométricas e cores), ou seja, 3×4 = 12 conjuntos da combinação de figuras geométricas com cores (figuras coloridas).

Situações da classe Combinatória, que envolvem quantidades pequenas, podem ser resolvidas, facilmente, com o uso de listas ou do diagrama de árvore, conforme apresentado na Figura 3.8, a seguir.

Figura 3.8. Diagrama de árvore para o Exemplo 8.



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

2 Dois conjuntos são classificados como disjuntos quando eles não têm nenhum elemento em com

A utilização do diagrama de árvore, segundo o apresentado acima, ou da tabela de dupla entrada é bem pertinente para a solução de situações de combinatória com estudantes do 1º ao 3º ano e faz-se importante para a interpretação da situação. Contudo, também é essencial evidenciar/introduzir o cálculo aritmético envolvido, a operação de multiplicação, principalmente para o professor do 3º ano, em que a multiplicação encontra-se presente no currículo escolar.

Comentários feitos pelos professores do 3º ano que aplicaram Exemplo 8 em sala de aula:

> O Exemplo 8 foi resolvido por 58 estudantes do 3º ano, tendo 13 deles resolvido corretamente utilizando desenhos e operações (adição e multiplicação)
>
> Sobre os esquemas observados pelos professores, os estudantes resolveram utilizando desenhos e cálculos aritméticos envolvendo as operações mencionadas.
>
> O erro mais comum encontrado foi adicionar as quantidades presentes no enunciado da situação.
>
> Para trabalhar o erro, os professores fizeram intervenções orais, no quadro, no momento de resolução da situação, bem como utilizaram material concreto para facilitar a compreensão (construíram figuras geométricas coloridas para serem utilizadas na resolução).
>
> Ao discutirem e refletirem sobre a situação construída, os professores classificaram essa atividade como ótima, pois foi uma atividade desafiadora, que fez perceber a necessidade de trabalhar mais pontualmente com seus estudantes as situações envolvendo Combinatória.

Exemplo 9. Luiza tem 12 bolos diferentes e 3 tipos de cobertura (chocolate, morango e baunilha). Em cada bolo, ela usa um tipo de recheio e uma cobertura diferente. Quantos recheios diferentes Luiza utilizou para montar os seus 12 bolos?

O Exemplo 9 envolve uma relação ternária, do eixo Produto de Medidas, da classe Combinatória, sendo dados dois conjuntos: o conjunto de bolos (combinação entre recheios e coberturas) e o conjunto de coberturas (três tipos de cobertura: chocolate, morango e baunilha). É solicitado encontrar o conjunto dos recheios. A operação mais indicada para a resolução, nesse caso, é a de divisão do conjunto de bolos (12 bolos com recheio e cobertura) pelo conjunto de coberturas (três tipos diferentes):12 ÷ 3 = 4 recheios diferentes, formando, assim, o conjunto dos bolos com recheio e cobertura.

Para esse tipo de situação envolvendo quantidades pequenas, o uso da ideia da tabela de dupla entrada ou da árvore de possibilidades, apresentada no Exemplo 8, auxilia na interpretação da situação. A Figura 3.9 apresenta a ideia da tabela de dupla entrada para o Exemplo 9.

Figura 3.9. Ideia da tabela de dupla entrada para proposta de resolução do Exemplo 9

			Tipos de Cobertura e Recheio (R)	
B		Chocolate	Morango	Baunilha
O	R_1	(chocolate, R_1)	(morango, R_1)	(baunilha, R_1)
	R_2	(chocolate, R_2)	(morango, R_2)	(baunilha, R_2)
L	R_3	(chocolate, R_3)	(morango, R_3)	(baunilha, R_3)
O	R_4	(chocolate, R_4)	(morango, R_4)	(baunilha, $R_{4)}$
S				
			12 bolos	

Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Nesse caso, a tabela de dupla entrada, como recurso auxiliar, deve ser construída até atingir as 12 possibilidades propostas pela situação (12 bolos com recheio e coberturas diferentes). Porém, ressaltamos que esse esquema restringe-se a situações com quantidades pequenas, porque fica fácil listar todas as possibilidades de combinação dos conjuntos disjuntos (conjunto dos recheios e das coberturas). Sendo esse o ponto inicial para a compreensão da resolução da situação, destacamos que também é importante trabalhar com o uso de operações do Campo Conceitual Multiplicativo (operações de divisão ou multiplicação), principalmente para os estudantes do 3º ano. Isso porque, de acordo com o currículo escolar, como visto antes, eles são introduzidos ao Campo Conceitual Multiplicativo e é preciso dar um salto qualitativo nas resoluções, não se limitando ao uso das ideias do diagrama de árvore ou da tabela de dupla entrada.

Comentários feitos pelos professores do 1º e do 3º ano que aplicaram o Exemplo 9 em sala de aula:

> No total, 52 estudantes responderam essa situação, sendo 35 do 1º ano (nenhum obteve êxito na resposta) e 17 estudantes do 3º ano, dos quais três acertaram.
>
> Os esquemas identificados pelos professores foram representações pictóricas, esquemas de conjuntos e contagens.
>
> Os erros mais comuns encontrados foram: identificar os conjuntos formados e realizar as contagens dos elementos conjuntos, num raciocínio aditivo, pois os estudantes, em geral, somavam as quantidades presentes no enunciado da situação.
>
> Os erros foram trabalhados com a explicitação da situação, no quadro, evidenciando cada relação e questionando os estudantes sobre as possibilidades existentes, na busca de evidenciar o raciocínio multiplicativo e a operação envolvida (divisão).

Ressalta-se que, entre as situações da classe Combinatória, os estudantes apresentam mais dificuldades para responder às situações em que são dados o todo e uma parte e se pergunta pela outra parte. Sobre isso, destacamos que, para o uso da tabela de dupla entrada, a ausência de um dos conjuntos originários não permite montar toda a estrutura da tabela. Nesse caso, é necessário ir acrescentando, progressivamente, um elemento ao conjunto originário, verificando as combinações possíveis de serem construídas na situação. Essas estratégias estão relacionadas à estrutura aditiva, fazendo uso de contagem e, por serem limitadas do ponto de vista da quantidade de elementos de cada conjunto, perdem a eficiência, quando o objetivo é o pensamento multiplicativo.

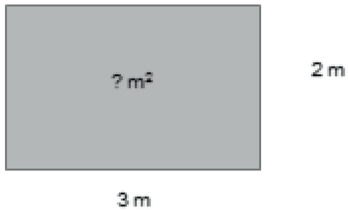
3. 2.4. As situações de Configuração Retangular

As situações presentes na classe Configuração Retangular também são ternárias e tratam das medidas referentes às formas retangulares, tanto na horizontal como na vertical, conforme ilustrado no Capítulo I. Vejamos alguns exemplos de situações elaboradas com essa classe e que podem ser trabalhadas com os estudantes do 1º ao 3º ano.

> **Exemplo 10**. O chão da rampa de nossa escola mede 2 metros de largura e 3 metros de comprimento. Qual é o total de metros quadrados dessa área?

O Exemplo 10 envolve uma relação ternária, do eixo Produto de Medidas, da classe Configuração Retangular, sendo dadas as medidas do comprimento e da largura e se deseja encontrar a medida da área do chão da rampa. A operação mais indicada para resolução é a multiplicação das medidas fornecidas (comprimento × largura). Nesse caso, 3m x 2m = 6m². Assim, é importante observar as questões referentes às unidades de medidas presentes na situação e trabalhar com os estudantes para a compreensão das relações existentes (metro – m – é uma unidade de medida empregada em medidas de uma grandeza linear: comprimento e largura; metro quadrado – m2 – é uma unidade de medida de grandeza para a área).

Figura 3.10. – Ideia presente na resolução do Exemplo 10



Área = Comprimento x Largura

Área = 3m x 2m

Área = $6m^2$

Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Comentários feitos pelo professor do 1º ano que aplicou o Exemplo 10 em sala de aula

No total, 16 estudantes do 1º. ano responderam a essas situações e sete deles acertaram.

Os estudantes responderam utilizando desenhos do retângulo, representando a área, e operações aritméticas (adição e subtração).

O tipo de erro mais encontrado foi utilizar o metro (m), medida linear, ao invés do metro quadrado (m2) para representar a área, e alguns utilizaram operações de adição e subtração para realizar o algoritmo.

Para trabalhar os erros, os professores fizeram uma autocorreção coletiva da resolução da situação, numa linguagem adequada às crianças dessa faixa etária, evidenciando cada etapa do raciocínio a ser empregado.

Os professores classificaram essa atividade como razoável, porque os alunos tiveram muita dificuldade em diferenciar metro e metro quadrado para representar a área. Para os professores, isso indica que é preciso intensificar o trabalho com a malha quadriculada, apesar de esse tipo de erro ser comum aos pensamentos dos estudantes, nesse nível de escolaridade, uma vez que ainda não foram formalmente trabalhadas todas as grandezas e medidas no âmbito da Matemática escolar.

A situação envolve uma relação ternária, do eixo Produto de Medida, da classe Configuração Retangular, sendo dada a área (todo), a largura (uma das partes) e busca-se encontrar a medida do comprimento (a outra parte). É possível resolver a situação por meio de uma operação de divisão, da seguinte maneira, $C/A=B$, em que C é a área, A representa a largura e B o comprimento. Ou seja, $2 \div 2 = 1$.

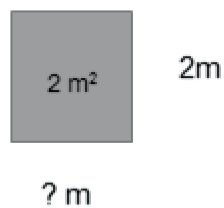
Exemplo 11: Um campo tem 2 metros de largura e sua área mede 2 metros quadrados. Qual é o comprimento desse campo?

Figura 3.11. – Ideia presente na resolução do Exemplo 11

Comprimento = Área/Largura

Comprimento = $2m^2/2m$

Comprimento = 1m



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Comentários feitos pelos professores do 2º ano que aplicaram o Exemplo 11 em sala de aula:

Oitenta e cinco estudantes do 2º ano responderam à situação e apenas cinco acertaram. Os esquemas identificados pelos professores foram representações pictóricas, esquemas de conjuntos e contagens.

Os professores encontram os seguintes erros nos esquemas dos estudantes: somavam as medidas fornecidas pela situação e trocavam a largura pelo comprimento, além da dificuldade de interpretação. Não conseguiram fazer o desenho corretamente e confundiram área com comprimento.

Para trabalhar os erros dos estudantes, duas das professoras fizeram intervenções orais sobre os conceitos explorados no problema e alguns alunos resolveram a situação no quadro. Eles também utilizaram a malha quadriculada para explicar as dimensões da área. Outra professora chamou os alunos que haviam acertado para responderem, no quadro, e explicarem para os outros como haviam resolvido.

Uma professora classificou essa atividade como razoável, pois seus alunos não atingiram 50% de acertos. As outras duas consideraram ruim, devido ao seu grau de dificuldade, e os alunos não fizeram porque não sabiam

A reflexão dos professores sobre a análise dos erros dos estudantes, em suas tentativas de resolução, evidencia que essa atividade não deve ser pautada apenas na reprodução da resposta correta do quadro, a qual deverá ser copiada pelo estudante que tenha cometido um erro. Eles compreenderam, a partir do processo formativo, a necessidade de problematizar com os estudantes sobre a situação e as possibilidades de resolvê-la, discutindo sobre os erros e as estratégias utilizadas por eles para resolver uma determinada situação, buscando a reestruturação do pensamento e, consequentemente, a aprendizagem matemática. Isso evidencia para o professor a necessidade de repensar sobre os tipos de situações a serem desenvolvidas e trabalhadas com os estudantes e as metodologias a serem utilizadas, a fim de contribuírem com o desenvolvimento do conhecimento no Campo Conceitual Multiplicativo.

Diante dos exemplos de situações elaboradas pelos professores e das estratégias didáticas empregadas nos momentos de replanejamento da ação, após reflexão coletiva sobre o desempenho dos estudantes, na resolução dessas situações, fica evidente a necessidade de o professor refletir junto com seus estudantes sobre as diferentes formas de registros e os esquemas. Dessa forma, eles poderão ser mobilizados na busca da resolução para as situações envolvendo o Campo Conceitual Multiplicativo, independentemente se ela evoca uma resolução por multiplicação, por divisão ou a combinação de ambas as operações. O fato de o estudante encontrar a resposta correta para a solução não significa que ele está usando um raciocínio multiplicativo. Por isso, convidá-lo para explicitar as bases de seu raciocínio, tornando-as passíveis de serem compartilhadas e discutidas, comparadas com os outros, quer seja em pequenos grupos ou no grande grupo (no quadro), poderá possibilitar a tomada de consciência dos processos que ele adota e da origem das suas formas de pensar.

No próximo tópico, vamos discutir as narrativas acerca da experiência do professor e o processo formativo; a ideia é compreender como elas se entrelaçam, de forma a elucidar sobre a aquisição do conhecimento por parte dos estudantes e dos professores, na experiência vivenciada durante o E-Mult.

3.3. Narrativas dos professores sobre o processo formativo: memórias compartilhadas e rebatimentos para sua ação docente

Com o objetivo de trazer informações mais claras sobre o processo formativo realizado e o seu impacto na prática pedagógica dos participantes, foi realizada uma entrevista semiestruturada com as professoras, após o período formativo, abarcando os seguintes tópicos:

- **(I) Identificação**: turmas que lecionam e se foi ou não participante da primeira fase da pesquisa, aplicando o instrumento diagnóstico com seus estudantes;
- **(II) Escolha profissional**: graduação e pós-graduação realizadas; tempo de atuação em sala de aula como professor;
- **(III) Experiência com a Matemática enquanto docente**: a importância do Campo Conceitual Multiplicativo no currículo dos anos iniciais; desempenho dos estudantes nesse componente curricular;
- **(IV) Formação Continuada:** inovação e contribuição para sua ação docente no Campo Conceitual Multiplicativo; a experiência da formação como geradora de impactos e mudanças em sua prática pedagógica.

Dessa forma, foram selecionadas duas entrevistas de cada ano escolar, de forma aleatória, realizadas com as professoras de cada um dos três estados participantes da Rede E-Mult, contemplando narrativas dos três primeiros anos do ensino fundamental, totalizando seis participantes.

3.3.1. 1º ano – Maria[3] e Branca: conhecimentos novos provocando mudanças no planejamento diário e na ação docente

Maria atuava como professora de uma turma do 1º ano do ensino fundamental. Ela é pedagoga e tem especialização em Psicopedagogia, tendo uma ampla experiência docente com o ensino de Matemática. Já atuou também na educação infantil.

Para ela, o Campo Conceitual Multiplicativo é um conhecimento de grande relevância para as crianças, porque colabora na estruturação do pensamento, instigando as crianças sobre a necessidade de aprender cada vez mais. Avalia como maravilhoso o conhecimento atual dos seus estudantes, nesse componente curricular, apesar de ter duvidado que, inicialmente, eles conseguissem realizar alguma das atividades propostas na formação. Depois que observou o desempenho de alguns dos estudantes, surpreendeu-se com suas respostas, ficou entusiasmada com suas produções e com o raciocínio apresentado por eles.

Em sua análise, acredita que muitas das dificuldades apresentadas pelos estudantes, na aprendizagem do Campo Conceitual Multiplicativo, vêm da ação docente na sala de aula. Ela conta que, muitas vezes, *bloqueou* os estudantes para novas aprendizagens quando, ao ser questionada, por eles, acerca de uma situação para a qual não sabia como lhe ensinar, apresentava a seguinte resposta: *quando você estiver no 2º ano ou no 3º ano, você vai conhecer isso.* Atrela esse tipo de resposta à educação que recebeu, na escola, enquanto estudante: *nós somos frutos de uma educação que não acreditava muito no aluno, o professor era o detentor do saber e nós somos frutos dessa educação; e acabamos transferindo um pouco para os nossos alunos, na nossa prática*.

3 Por questões éticas, os nomes utilizados para os professores são fictícios.

Portanto, Maria acredita que a Formação Continuada do *E-Mult* trouxe um enorme diferencial para a sua prática. Aprendeu que não adianta o professor pensar que os conhecimentos vêm prontos, que o que parece ser errado para um, está certo, de acordo com o pensamento que a criança traz. Ou seja, que possibilitar a esse estudante apresentar seu modo de pensar, sua estratégia de resolução, é muito importante para a sua aprendizagem: *quando os meus alunos resolviam um problema, e, aparentemente, era errado, eu perguntava como eles haviam pensado, como eles tinham estruturado o pensamento para chegar naquela resposta e,* aí, *eu entendia que estava realmente certa. A principal contribuição foi essa, de a gente compreender mais o pensamento do nosso aluno e parar para ouvir, pois, mais importante que a resposta é o processo, como ele pensa!*

A formação, assim, foi o 'divisor de águas' para Maria em sua trajetória. Na sua prática, partiu para a reestruturação do seu planejamento de aula e vem implantando uma nova dinâmica dentro de sala de aula. Refletir sobre o conceito aprendido por ela acerca da multiplicação era bem simplista – a multiplicação é a soma de parcelas iguais – com as atividades propostas para as diferentes estruturas multiplicativas, ampliou seu aprendizado e deseja também proporcionar aos seus alunos uma aprendizagem mais abrangente: *estruturar o meu planejamento dá mais espaço, porque a Matemática é uma coisa gostosa, não precisa ser só aquele conteúdo que a gente tem nos livros; a gente pode ir muito além, fazer com que as crianças participem muito mais, pois, quando elas têm oportunidade de falar, de dizer o que estão pensando, elas ficam mais seguras, com mais interesse em participar; elas perdem aquele medo de errar. Então,* vão estruturando*, cada vez mais, o pensamento e apresentando coisas maravilhosas.*

Assim, a formação propôs a Maria outras possibilidades de compreensão desse componente curricular, permitindo-lhe compreender os tipos de pensamento multiplicativo, o que fomentou espaço para trabalhar essas estruturas com seus estudantes, de forma bastante tranquila, independentemente da idade ou ano escolar.

Branca, licenciada em Letras após cursar o Magistério e o ensino médio, especialista em Arte Educação, atua há 18 anos como professora do 1º ano do ensino fundamental.

Defende que a importância do Campo Conceitual Multiplicativo como componente curricular está relacionada ao fato da sua compreensão atual no contexto do dia a dia. Relembra que, quando estudante, era bem mais difícil. A percepção que tinha da Matemática era de muitos mitos. E que nunca tinha tido nenhuma formação que trabalhasse desmitificando isso, como, por exemplo, no caso de a multiplicação ser mais difícil e complexa porque primeiro vinha a adição para chegar à multiplicação...agora, com a formação, percebe que esse não é o caminho. A partir do momento que o estudante interpreta, ele compreende, seja com números ou desenhos. A questão principal para Branca reside no fato de que a Matemática torna-se difícil pela compreensão indevida de que se deve ensinar e aprender tudo no formato linear: primeiro as continhas – pois envolve já os números; e só depois aplicar nas situações. Então, não se valoriza a contextualização, ou seja, colocar o significado nas contas que nada mais é do que mostrar que a Matemática está na vida.

Branca conta que a formação desfez esse mito da Matemática para ela: não há trabalho linear, não há idade definida para aprender isto ou aquilo... A construção do conhecimento matemático ocorre por meio das diferentes representações, o que traz significado e que, muito disso, ela aprendeu na Formação, o que a desperta para a mudança na sua prática docente, sendo mais crítica e entendendo que a prática pode ser transformada, que a escolha de uma situação ser vivenciada, na sala de aula e até a do livro didático, pode ser realizada de forma mais criteriosa. Ainda deixa o recado de que seu desejo era que essa Formação pudesse atingir um número bem maior de professores participantes.

Da interlocução das narrativas das professoras do 1º ano, acima apresentadas, é perceptível o impacto que essa formação continuada colaborativa do *E-Mult* trouxe para a prática docente delas. Desmistificar a Matemática da escola como um conhecimento linear, desprovido de contextos e significados, em que se aprende apenas procedimentos, certamente, foi a maior contribuição. Aprender como fazer a Matemática que cada um realiza no seu dia a dia. Ainda mais, estender isso a outras situações, produzindo, então, uma mudança substancial no seu planejamento diário das aulas, assim como em sua ação docente no ensino da Matemática.

3.3.2. 2º ano – Aurora e Tiana: a interface entre conhecimentos prévios e histórias de vida

Aurora é professora do 2º ano do ensino fundamental. Ela é pedagoga, especialista em Psicopedagogia e atua em sala de aula há 28 anos. Afirma que a importância do Campo Conceitual Multiplicativo está elencado no currículo e relaciona-se ao fato de que há vivências com multiplicação desde sempre, mesmo que os estudantes não compreendam ou não relacionem isso: *se a gente observar a vida de hoje, é tanta multiplicação como a divisão. Então, constantemente, eles estão multiplicando o tanto que vão gastar de tempo, o tanto que vão gastar em casa, o tanto que vão precisar para alguma coisa e dividindo esses valores também para se organizarem*.

Os alunos de Aurora, segundo ela, aprendem de uma maneira mais informal, através de brincadeiras, ou seja, quando há um contexto na situação, há facilidade para resolver a 'Matemática', diferentemente de quando isso é transformado em atividade. Para ela, as dificuldades apresentadas para aprender o Campo Conceitual Multiplicativo estão sedimentadas já no discurso familiar – *A gente já cresce escutando que a multiplicação é a coisa mais difícil, que o menino é capaz de aprender a somar e subtrair, mas, multiplicar,* não. *Então, os pais em casa, usam isso, porque, multiplicar, eles nunca aprendiam*. Um fato relevante aconteceu na vida de Aurora, provocado por uma professora em relação à multiplicação e que ela traz até hoje como um 'trauma', uma 'barreira' em seu dia a dia: havia sabatinas diárias com a tabuada e não se permitia nem a professora repetir a pergunta nem a aluna Aurora colocar a mão para trás (estratégia para facilitar a contagem nos dedos). O resultado é que, até os dias atuais, qualquer pergunta que se faça a ela de forma 'súbita', sobre qualquer assunto, ela trava e não consegue responder de imediato e ela sabe que essa foi uma consequência da prática da sua professora.

Aurora relata que a Formação trouxe uma contribuição imensa a sua vida, pois mudou o 'seu olhar' sobre a multiplicação, desfez o que a traumatizou: não é mais sabatina, é possível compreender de uma forma divertida e por vários caminhos; que não tem problema usar os dedos para contar, é possível somar o mesmo número várias vezes e chegar ao resultado e afirma: *e quando eu perder esse medo, eu vou acabar chegando num caminho mais curto sem sentir dor nenhuma no caminho*.

Já as informações novas trazidas, na Formação, já estão incrementando seu trabalho na sala de aula, como, certamente, o "saber de fato" que 'a multiplicação não é apenas adição de parcelas repetidas': aspectos que podia até conhecer, mas que não eram sedimentados em sua prática na sala de aula. Tanto que a ideia dos termos da multiplicação, embora conhecida, não tinha sentido em sua ação docente porque não utilizava no ensino: *o referente, o referido e a relação. Assim, tem feito grande diferença na hora que eu fui programar essa última atividade que planejei para os meninos. Eu percebi que, eu tendo consciência desses três termos, ficou bem mais fácil de elaborar o problema, do problema se tornar mais fácil ou mais difícil.*

Tiana é professora do 2º ano do ensino fundamental em uma escola da rede pública municipal. Atua há 16 anos em sala de aula – já que havia realizado o magistério – mas se formou em Pedagogia há apenas três anos.

No ano passado, atuou, também, com turma do 1º ano. Considera, então, importante o trabalho com o Campo Conceitual Multiplicativo, desde o início, pois provoca uma adaptação à Matemática com maior facilidade e compreensão. Relata que tudo que é novidade para os estudantes, que causa uma vontade de aprender e se isso acontece desde o 1º ano, ao chegar no 2º ano, eles já apresentam um certo domínio e seguem com mais firmeza: *ano passado mesmo, eu trabalhei com a turma do 1º ano e eles deram um show, principalmente na feira de Matemática. Eu pensei em trabalhar o Campo Aditivo, por serem alunos do 1º ano, mas eu vi que eles foram mais além, eles conseguiram. Tinha aluno que já sabia. É, eu trabalhei com os números de um a 50 e, na Feira de Matemática, ele contou de um a 100. Ele [o aluno] foi mais além do que eu já tinha ensinado. Então, eles mostraram para as pessoas que vieram assistir* à *apresentação deles, que eles podiam e iam mais além".*

Tiana acredita que a maior dificuldade de seu alunado com relação à Matemática é a falta de acompanhamento da família nos estudos e quem termina ajudando é apenas o professor. Se houvesse um estímulo e atenção da família, o ciclo de aprendizagem – estudante, professor, família – completava-se.

Quanto à passagem entre as quatro operações, apesar de considerar uma tarefa difícil, ela afirma que, como vem sempre trabalhando da adição para a multiplicação, os seus alunos têm mais facilidade para compreender a questão da tabuada

– multiplicação como adição de parcelas repetidas – exemplificada, inicialmente, com material concreto simples e, depois, passando para a escrita convencional da Matemática.

A Formação trouxe novas experiências para Tiana que já fazia parte de um grupo de formação. As atividades, inicialmente, pareciam difíceis e ela imaginava como poderia trabalhá-las com seus alunos, nos anos iniciais. Mas a experiência formativa ampliou seu repertório de atividades a serem levadas para a sala de aula. E, com isso, pôde desmistificar, muitas vezes, o 'bicho de sete cabeças' que fazem da Matemática, a partir do momento que instigou, nos estudantes, um olhar para as várias possibilidades que um problema pode criar de estratégias de resolução.

A contribuição mais nova para ela foi a da ideia do 'muitos para muitos', no Campo Conceitual Multiplicativo: *porque aí foi onde eu fiz um projeto. No primeiro momento, eu ia trabalhar com o projeto o Campo Aditivo, mas quando eu vi que os alunos estavam bem além, eu parti para multiplicação. Então, fui criando um projeto junto com os alunos e depois levei para a Feira de Matemática, aí fui pra feira na cidade (...) onde lá, o projeto foi escolhido em primeiro lugar e aí fomos apresentar em outra cidade*[4]. *Então, isso foi muito gratificante, porque foi um trabalho que foi feito dentro da sala de aula juntamente com os alunos e, depois, a gente foi mais além e a gente vê que teve um retorno, um retorno gratificante, com parceria do GPEMEC, juntamente com o professor, até a aprovação do projeto*.

Assim, o salto entre o trabalho mais tradicional que já desenvolvia e o trabalho mais contextualizado, do material concreto para as situações, foi o que de mais especial Tiana aprendeu com a Formação. E isso, ela acredita, foi o mote para mudar e facilitar a aprendizagem de seus estudantes. A observação era clara de que, dessa forma, o interesse em aprender a Matemática mudou mesmo, passando do medo em tempos anteriores – *quando a gente era estudante, quando se falava em Matemática a gente tinha muito medo* – para a vontade de aprender com compreensão.

Refletindo sobre as observações construídas por Aurora e Tiana, vemos aqui histórias de vida pessoal que se intercruzam com relação à aprendizagem de Matemática enquanto estudantes, carregada de afetividade. Do trauma instigado

4 O nome da cidade foi substituído por "outra cidade".

pela professora de Aurora para a “sabatina” da multiplicação (decorar a tabuada) ao medo da Matemática de Tiana, produzem experiências dolorosas acerca dessa aprendizagem. Assim, afirmam, algumas vezes, que somente após a vida adulta, enquanto professoras, puderam ressignificá-la e que a Formação teve, também, um impacto forte nessa construção de um outro olhar para a Matemática, da importância que a família deve ter nessa aprendizagem, do uso do material concreto para construir significado real, até a sua contextualização em situações.

Tais narrativas demonstram o quanto aprender Matemática é fortemente ancorado na afetividade e que as vivências na vida de estudante marcam, muitas vezes, tanto a escolha quanto a ação docente enquanto profissional professor, imprimindo, nessa via, um olhar dotado do significado dado pelo sujeito às situações vividas. É uma prova real de que cognição e afetividade são processos imbricados e que se constituem mutuamente na subjetividade humana (ARAÚJO-GOMES, 2005; ARAÚJO-GOMES; DA ROCHA FALCÃO, 2012).

3.3.3. 3º ano – Beatriz e Yanca: problematizando os conhecimentos dos estudantes e suas possibilidades

Beatriz é professora do 3º ano dos anos iniciais do ensino fundamental em uma escola da rede pública municipal. Ela cursou Magistério e, Pedagogia, concluído há apenas três anos. Atualmente, cursa especialização em Psicopedagogia. Atua há 14 anos na sala de aula.

Para ela, a importância de o Campo Conceitual Multiplicativo ser contemplado no currículo deve-se a perpassar para além da questão da operação (algoritmo), do cálculo em si. A ênfase está, sobretudo, na construção da aprendizagem: como o estudante pensa, aprende, erra, acerta etc. No entanto, quando questionada acerca de como avalia os conhecimentos pertinentes ao Campo Conceitual Multiplicativo que os seus alunos tinham e têm, antes e depois da Formação, Beatriz afirma, inicialmente, que foi uma surpresa que eles fossem começando a resolver as situações propostas, pois ela tinha certo de que eles não conseguiriam: *no primeiro momento, eu logo disse – os meninos não vão conseguir fazer isso, isso é difícil pra mim, eu não vou conseguir, os meninos não vão conseguir. Mas, aos poucos, eles foram percebendo que, mais do que certo e errado, o que era importante era o processo, como cada um pensava e as estratégias que usavam para resolver, muitos dos quais usando os dedos das mãos e dos pés, ou qualquer outro procedimento que pudesse explicitar como tinha desenvolvido.* (...) *No início, era complicado, até para motivar os alunos, eles diziam: ah, eu não sei, eu não vou fazer. Para encorajá-los, eu dizia:* é do seu jeito, agora é o seu momento. Tinha o momento também de relatar, eles iam à frente relatar como foi *a construção. Olha, eu fiz assim – eles iam no quadro – ah, tia, eu fiz assim, ah, eu pensei assim e eu não dizia se estava certo ou errado.*

A experiência rica do pós-teste[5], segundo a professora, demonstrou o quanto eles haviam aprendido a refletir sobre seu pensamento, numa atividade *metacognitiva*[6], antes mesmo de responder, pois já esperavam que houvesse questionamentos sobre suas anotações e resoluções. Isso é importante por já enfatizar que há muito pensar envolvido na resolução dos problemas matemáticos e isso é essencial para a aprendizagem e, também, o resultante do que as narrativas produzidas na formação imprimiram em suas práticas.

Essa mudança de postura dos estudantes, nessa sala de aula, foi um marco interessante do processo formativo. Muitos deles que ainda tentavam 'olhar para o trabalho do colega' antes de responder, na tentativa de confirmar suas estratégias, foram deixando de lado esse procedimento e buscando melhor explicitar seu modo próprio de pensar e as diferentes estratégias escolhidas.

Com relação às dificuldades atreladas ao Campo Conceitual Multiplicativo apresentadas pelos estudantes, Beatriz argumenta que podemos pensar em alguns aspectos: (I) o limite de partir sempre da adição de parcelas repetidas para chegar à multiplicação; (II) a falta de vivências práticas das situações multiplicativas, sobretudo nos terceiros anos, em detrimento do campo aditivo, que é bem trabalhado;

5 Uma parte dos professores da rede, no fim do processo formativo, aplicaram novamente com seus alunos o instrumento diagnóstico apresentado no Capítulo II.

6 Metacognitiva no sentido de que os estudantes são chamados a explicitar sua forma de pensar através da sua fala, relatando ao professor. Com base nos estudos acerca da Metacognição, essa atividade organiza e orienta o pensamento 'na ação', o que constitui um bom prognóstico de aprendizagem.

(III) a escassez de processos de formação continuada para os professores dos anos iniciais em Matemática, o que rebate na organização e no seu planejamento pedagógico, que terminam por propor sempre a multiplicação 'apenas' quando o estudante domina as operações de adição e subtração.

Tais aspectos limitam o processo de reflexão e aprendizagem acerca das estruturas multiplicativas. Os estudantes terminam por usar apenas a estratégia da adição de parcelas repetidas para a operação da multiplicação acreditando que o caminho é apenas e sempre esse. Muitos deles iniciam por resolver a multiplicação usando o quadro valor lugar através das sucessivas adições. E esse fato pode ser promovido, também, devido a outro aspecto afirmado por Beatriz: *...as dificuldades que os alunos apresentam em estruturas multiplicativas podem ser desencadeadas devido* à *ansiedade que o professor tem de ver o menino fazendo a conta, de ver o menino escrevendo, de ver o menino lendo... supervalorizar essas áreas em detrimento de outras e de outras atividades, como: os jogos, o relato dos alunos após terem respondido uma situação-problema, o desafio, deixar o menino pensar. Mas aquela ânsia de ver fazendo, de ver produzindo, então, eu acho que sai atropelando etapas importantes. Eu tenho me contido,* à*s vezes, eu chego no fim de semana e fico: meu Deus, eu não dei conta do planejamento dessa semana, vou ter que repetir tudo! O planejamento de segunda, ainda estou no planejamento de segunda.*

Para a professora, permitir que o estudante explicite seu caminho de raciocínio para uma determinada situação é um grande facilitador e orientador do processo de aprendizagem. E a sua experiência, em especial com essa turma, foi de grandes mudanças, sobretudo no comportamento deles, que saíram de uma indisciplina completa, no 2º ano (*possivelmente porque não compreendiam nada do que faziam em sala de aula*), para um comportamento de interesse na descoberta da Matemática: *e, assim, terminei o terceiro ano muito feliz. Quando eu cheguei na escola, ainda no segundo ano, a turma era muito indisciplinada e as dificuldades eram grandes, acredito que, por conta das dificuldades, cheguei a solicitar a mudança de turma, o que não foi aceito pela direção da escola. Já no terceiro ano, e com a turma mudada quanto ao comportamento e, agora, com um bom relacionamento entre nós, eles chegaram a fazer um abaixo-assinado para que eu continuasse sendo a professora deles, no ano seguinte, quarto ano.*

A principal contribuição trazida pela Formação para a sua prática docente, segundo Beatriz, relaciona-se com a segurança em compreender o porquê e como realizar as atividades, assim como que não há obrigação, na Matemática, de um único caminho para se chegar à resposta 'certa'. O erro deve ser reconhecido como uma outra estratégia e, analisá-lo, permite ao estudante compreender, no confronto com outras soluções, o que aconteceu no caminho. Outra contribuição relatada é a valorização pessoal: *...o que o outro tem para mim no momento que compartilhamos nossos saberes. Eu não sei mais nem menos. Estou aqui para aprender. A desmistificação que Matemática é só cálculo, é só número, que multiplicação é só tabuada.*

Na sua ação docente, Beatriz afirma que já vem ousando fazer mudanças em sua prática docente após a Formação, pois estabelece consigo um processo contínuo de autorreflexão de sua ação em sala de aula. Com isso, vai aos poucos estabelecendo situações desafiadoras e contextualizadas, envolvendo, inclusive, os outros componentes curriculares, para onde tem transferido o que aprendeu nos momentos dessa e de outras formações continuadas em que já participou. Outro ponto positivo considerado por ela, de grande relevância para sua ação pedagógica, resgata a importância imprescindível das relações humanas e interpessoais, no contexto da aprendizagem: *tem o cuidado que você tem de falar com o outro; que a gente percebeu isso claramente nas formações. O cuidado de levar esse conhecimento ao outro, sem que o outro ache que o que ele sabe não serve pra nada. A gente tem total consciência de que vocês, por terem estudado mais, sabem mais. Eu trago isso no meu relato, que vocês chegaram tão abertos a ensinar, mas assim, que existia, realmente, a questão do estranhamento e o medo e, esse medo, a gente escondia. O menino levado, o menino que não sabe na sala de aula, ele aparece como? Com a indisciplina. E o professor faz o quê? Se fecha. Para não mostrar o que não sabe.*

Yanca é professora do 3º ano do ensino fundamental em uma escola da rede pública municipal. Formada em Administração Pública, decidiu, posteriormente, pelo caminho da educação, tendo feito Magistério e Pedagogia, além de duas especializações: Psicopedagogia e Educação Especial, que concluiu há cerca de 10 anos. Atua em sala de aula, há 27 anos, já informando que se aposenta no próximo ano.

Durante a Formação, e retomou aqui, na entrevista, relatando sua experiência específica como participante em um projeto de doutorado que trabalhava Matemática, e que foi desenvolvido durante três anos numa parceria entre a universidade e a escola privada em que lecionava. Afirma que foi muito importante para sua prática.

Defende que o Campo Conceitual Multiplicativo está inserido no programa dessa etapa de ensino, pois aprofunda, nos estudantes, aquilo que tão bem sabem intuitivamente, como multiplicar*: a gente precisa transpor da escola, da vida comum para a escola com outra linguagem, para que eles compreendam a diversidade que a Matemática fornece, que ela produz, ela tem essa amplidão de conhecimento.*

Yanca avalia que os seus alunos têm uma lacuna na reflexão sobre as estruturas multiplicativas. Isso porque, ela própria, apesar de ter participado do projeto, acima relatado, há alguns 'bons anos' atrás, não conhecia a abordagem dos Campos Conceituais do Gérard Vergnaud. Ela considera de suma importância a apropriação desse novo conhecimento para despertar em seus alunos a compreensão de forma ampliada sobre multiplicação e divisão e ir desenvolvendo isso ao longo da trajetória escolar. Assim, as dificuldades que os estudantes apresentam no Campo Conceitual Multiplicativo estão atreladas *...justamente por eles não terem esse trabalho, como o professor não trabalha, acredito que, por falta de conhecimento mesmo, eles não sabem. A dificuldade é do professor,* não é do aluno não, porque*, se o aluno vir um trabalho sistemático, ele vai vencendo essas etapas, uns com mais, outros com menos dificuldades, mas vai vencendo essas etapas, então, a dificuldade é do professor porque, se o professor não acreditar e não entender o que está fazendo, como é que ele vai? Eu aprendo uma coisa lá, mas eu tenho que pegar isso que eu aprendi lá no curso, as estruturas multiplicativas e ver qual metodologia vou aplicar. Como eu vou aplicar isso? Eu não posso passar para a criança da forma que eu recebi.*

Para Yanca, é necessário, ainda, que se discuta mais sobre a forma como se pode transpor a metodologia da construção do Campos Conceitual Multiplicativo a ser levada diretamente para a sala de aula dessa etapa de ensino. Ou seja, o professor deve ter um determinado conhecimento e saber transitar entre esse e o que ele pode desenvolver com seu alunado.

O aprendizado que essa Formação trouxe foi de grande impacto já para a prática de Yanca, na sala de aula, e na visão crítica de outras instituições: *eu tenho dois netos,* *sobrinhos que me chama de avó, que estudam numa escola muito conceituada de Recife e quando eu pego as avaliações que eles chagam felizes da vida porque tiraram nove e dez, quando eu pego as avaliações de Matemática, é só aquele estruturinha multiplicativa – quantas caixas tem tantos e quantas vezes são* – não fala nada de outra estrutura como a gente viu. *Então,* não sou só eu que não estou sabendo. Acho que muita gent*e por aí também não sabe*...

Assim, a clareza acerca da abordagem dos Campos Conceituais foi a principal aprendizagem nessa Formação. Apesar da ação-reflexão fazer parte do cotidiano dessas construções, ela defende que replanejar, após o desenvolvimento das ações, provoca a necessidade de se construir o conhecimento junto com a criança e que isso é o motor do aprender: *n*ão tem nada que você não passe*, que não lhe acrescente, eu procuro sempre retirar o melhor, eu sempre aprendo alguma coisa, não é porque eu quero ser melhor que ninguém não, mas é que sempre tem alguma coisa que você não se ligou e aquela pessoa vai falar e você pensar: ah, não tinha pensado nisso. A gente tem que estar sempre aprendendo, a vida é isso*!

Tecendo inter-relações entre as questões fomentadas por Beatriz e Yanca, vemos o quão importante é a construção com significado das situações-problemas para a compreensão matemática dos estudantes. Dar sentido ao Campo Conceitual Multiplicativo está 'para além' de apenas aprender a multiplicar – como adições sucessivas – e dividir – em partes ou em quotas. Mas, sobretudo, está imbricada, completamente, desde a formação continuada do professor para refletir sobre diferentes estratégias e seus confrontos, sua ansiedade em ensinar de várias formas diferentes, até a produção de atividades carregadas de sentidos, na sala de aula, fazendo com que o estudante transponha para as suas aprendizagens matemáticas e para outros componentes curriculares e alcance sua compreensão provocando-lhe um desempenho favorável.

Ação-reflexão-planejamento-ação: um contínuo processo

Concluindo, consideramos que a formação docente é uma discussão muito presente na educação matemática e que formações colaborativas que contemplem ação-reflexão-planejamento-ação, em um processo contínuo, precisam ser organizadas considerando os profissionais que vão atuar nos anos iniciais, pois é, nesse nível, que se faz necessário um olhar mais cuidadoso, já que esse profissional é o responsável por construir as bases para a introdução das crianças no processo formal de aprendizagem.

Diante da complexidade curricular exigida no curso de Licenciatura em Pedagogia, lócus de formação do professor dos anos iniciais, torna-se importante pensar nas instituições de ensino superior que oferecem essa modalidade e da consequente necessidade de repensar o currículo no aspecto da formação, de forma a garantir um processo que contemple ação-reflexão-planejamento-ação. Isso porque, se a formação inicial não for bem estruturada, prejudicará, de forma direta, a sua atuação docente, devido ao pouco preparo no que diz respeito aos processos de ensino-aprendizagem.

Portanto, enquanto essa mudança não se efetiva na formação inicial, o incremento de práticas continuadas formativas como essa, aqui discutida e proposta nesta coleção, torna-se especialmente necessária.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO GOMES, Claudia Roberta. **O professor de matemática no espaço dialógico das díades: uma abordagem psicológica da subjetividade na ação docente.** (Tese de Doutorado não publicada) Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva. Universidade Federal de Pernambuco, 2005.

ARAÚJO GOMES, Claudia Roberta; DA ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio. Abordagem dialógica como quadro teórico de referência para descrever mudança nas perspectivas e nas praticas do professor de matemática. **Zetetike** (UNICAMP), v. 20, p. 55-69, 2012.

MAGINA, Sandra. **(Re)significar as estruturas multiplicativas a partir da formação 'reflexão-planejamento-ação-reflexão' do professor**. Projeto de pesquisa. CNPq, 2008.

VERGNAUD, Gérard A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEEMPA**, Porto Alegre, nº 4, 9-19 ,1996.

VERGNAUD, Gérard A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, Esther (Org.) **Por que ainda há quem não aprende? A teoria.** Petrópolis: Vozes, 21-60, 2003.

VERGNAUD, Gérard O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, nº especial,15-27, 2011.

VERGNAUD, Gérard O que é aprender? In BITTAR, Marilena.; MUNIZ, Cristiano Alberto (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: CRV, p. 13-35, 2009

APÊNDICE

Apêndice: Outras situações elaboradas e aplicadas pelos professores do 1º ao 3º ano, durante o processo formativo.

Proporção Simples: um para muitos

1. Numa rua há 4 casas e, em cada casa, moram 3 crianças. Quantas crianças têm nessas 4 casas?
2. Paulo precisa montar 4 bicicletas. Se cada bicicleta tem 2 rodas, quantas rodas ele precisa para montar as 4 bicicletas?
3. Um professor leva para a sala de aula 3 pacotes de biscoito para dividir igualmente a quantidade de biscoitos entre seus 15 alunos. Sabendo que, em cada pacote, há 10 biscoitos, quantos biscoitos cada aluno receberá?
4. Tenho 12 ovos para repartir igualmente em 3 pratos. Quantos ovos eu colocarei em cada prato?
5. Num pacote de balas, há 12 unidades. Se Joana comprar 2 pacotes iguais a esse, quantas balas ela terá?
6. Faremos uma festa em sala de aula para 10 alunos. Comprei um saco com 30 balas. Quantas balas cada aluno receberá se eu dividi-las igualmente entre eles?
7. Em uma caixa de lápis de cor, há 6 lápis. Quantos lápis de cor tem em 5 caixas iguais a essa?
8. Pedro comprou uma caixa de bombons com 18 unidades. Se ele fosse comprar 2 caixas iguais a essa, quantos bombons ele teria?

9. A mãe de Gildevan vende jujubas num pacotinho. Em cada pacote, ela põe 8 jujubas. Quantas jujubas ela usará para encher 10 pacotes de jujubas?
10. Silvana comprou uma pizza com 24 pedaços para 8 pessoas. Quantas fatias cada uma recebeu, se todas receberam a mesma quantidade de fatias?
11. Maria tem 30 bombons para distribuir igualmente com 6 amigos. Quantos bombons cada amigo receberá?
12. Na festa de João, foram distribuídos 12 convites. Cada convite permite a entrada de 4 pessoas. Quantas pessoas foram convidadas?
13. Ana tem 20 figurinhas. Ela quer distribuir igualmente as figurinhas em 4 álbuns. Quantas figurinhas ela colocará em cada álbum?
14. Marcelo ficou feliz porque comprou uma cartela com 10 carrinhos. Se ele comprasse 2 cartelas iguais a essa, com quantos carrinhos ele ficaria?
15. Ana comprou 1 pacote de pirulitos por R$ 5,00 reais. Se ela fosse comprar 2 pacotes iguais a esse, quanto ela pagaria?
16. Pedrinho tem um álbum que tem 5 páginas. Em cada página cabem 10 figurinhas. Quantas figurinhas Pedrinho precisa ter para completar o álbum?
17. Mariana recebeu, no recreio, um pacote com 8 biscoitos. Se ela ganhasse 2 pacotes, quantos biscoitos ela ganharia?
18. Roberta tem 24 bolinhas de gude e quer colocar 6 bolinhas em cada saquinho. Quantos saquinhos ela vai precisar?
19. José fez uma pipa com 4 papéis. Quantas pipas iguais a essa ele fará com 12 papéis?
20. Joana viu no mercado um pacote com 20 pirulitos. Se ela comprar 2 pacotes desses, quantos pirulitos ela terá?
21. Um padeiro entrega 250 pães por dia. Em 5 dias, quantos pães ele irá entregar?
22. Uma livraria vende um kit com 6 canetas coloridas. Maria comprou 4 kits. Com quantas canetas coloridas Maria ficou?

23. Seu Pedro tem 28 reais. Ele vai presentear seus 2 netos repartindo essa quantia em partes iguais. Quanto seu Pedro dará a cada neto?
24. Carlos tem 24 bolinhas para dividir igualmente entre os seus irmãos. Cada um receberá 3 bolinhas. Quantos irmãos tem Carlos?
25. Luiza comprou uma caixa com 12 brigadeiros para doar a uma colega que gosta muito. Se ela comprar três caixas iguais a essa, quantos brigadeiros irá comprar?
26. Para a festa de Carlos, mamãe fez 30 salgadinhos. Ela quer colocar 5 salgadinhos em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar?

Proporção Simples: muitos para muitos

1. Na sorveteria Federal, comprando 5 sorvetes, você ganha 3 brinquedos. Quantos brinquedos você ganhará, se comprar 20 sorvetes?
2. Janete comprou 11 laranjas por R$ 7,00. Quantos reais ela gastará para comprar 20 laranjas?
3. Uma família gasta 12 reais de pães em 7 dias. Quanto essa família gastará em 30 dias comprando pães?

Comparação Multiplicativa

1. Paulo comprou um jogo por 6 reais e um quebra-cabeça que custa 3 vezes mais que o jogo. Quanto custa o quebra-cabeça que Paulo comprou?
2. A escola tem uma distância de 2Km até o Bairro Novo e a fazenda Ipanema fica 8 Km distante da escola. Quantas vezes a distância da Fazenda Ipanema à escola é maior que a distância da escola para o Bairro Novo?

3. Ana tem que andar 7 quarteirões para chegar ao posto médico e Paulo tem que andar 5 vezes mais quarteirões do que Ana. Quantos quarteirões Paulo tem que andar?
4. Mariana tem 21 anos. Pedro tem três vezes menos a idade de Mariana. Qual é a idade de Pedro?
5. Kauan tem 8 bolas de gude e Marcos tem 40. Quantas vezes a quantidade de bolas de gude de Marcos é maior que a de Kauan?
6. Júlia tem 2 bonecas e sua amiga Raiara tem o dobro. Qual a quantidade de bonecas de Raiara?
7. Marcos tem 3 carrinhos. João tem 2 vezes mais carrinhos que Marcos. Quantos carrinhos João tem?
8. Uma bola na loja de Zé custa R$ 5,00. Na loja de Maria a mesma bola custa 3 vezes mais. Quanto custa essa bola na loja de Maria?
9. João tem 8 bolas de gude. Marcos tem 3 vezes mais. Quantas bolas de gude Marcos tem?
10. Num jogo de basquete, na escola Alegria, os meninos fizeram 5 pontos e as meninas 15. Quantas vezes mais pontos as meninas fizeram no jogo de basquete?
11. João tem 8 bolas de gude. Pedro tem 5 vezes mais bolas de gude que João. Quantas bolas de gude tem Pedro?
12. Maria tem 8 reais em seu cofrinho e sua irmã Ana conseguiu juntar 3 vezes mais do que Maria em seu cofrinho. Quanto Ana conseguiu juntar em seu cofrinho?
13. José tem 20 anos e Maria, sua irmã, tem 4 vezes menos. Qual a idade de Maria?
14. João tem 15 figurinhas e Davi tem 5. Quantas vezes a quantidade de figurinhas do Davi é menor do que a do João?
15. Bia não sabe quanto tem na carteira. Beth diz que tem 21 reais e que Bia tem 3 vezes menos que ela. Quantos reais, então, Bia tem?

16. Carlos tem 8 chaveiros em sua coleção. Ana tem 3 vezes a quantidade de chaveiros de Carlos. Qual a quantidade de chaveiros que Ana tem?
17. Tadeu tem 5 pirulitos. Já seu primo Paulo tem 20. Quantas vezes a quantidade de pirulitos de Paulo é maior que a de Tadeu?

Produto de Medidas: Combinatória

1. Maria foi na sorveteria com seu pai e, no cardápio, tinha os seguintes sabores: morango, coco e chocolate e dois sabores de calda: manga e menta. Quantas combinações possíveis de sorvetes com caldas podem ser usados para uma bola de sorvete com uma calda?
2. Kellve vai passar uns dias de suas férias na casa de sua tia. Kellve vai levar 4 camisas (azul, verde, amarelo e vermelho) e 3 bermudas (preta, branca e marrom). Quantos conjuntos diferentes Kellve pode formar, se vestir todas camisas e bermudas em dias diferentes?
3. Ana consegue combinar de 8 maneiras diferentes suas 4 bolsas com os sapatos que tem. Qual é a quantidade de sapatos de Ana?
4. Ana comprou 4 blusas de cores diferentes (verde, amarela, vermelha e marrom), para combinar com suas 3 calças (azul, preta e branca). Quantos conjuntos de roupas diferentes Ana poderá vestir, se usar todas as blusas e calças?
5. Em uma sorveteria, há 12 tipos de combinações de sorvete. Para cada combinação, é usado apenas um sabor de sorvete e um sabor de calda. Há 4 tipos de sorvete (chocolate, creme, morango, baunilha). Quantos tipos de calda são necessários para fazer todos os tipos de combinação de sorvete?
6. Alice gosta muito de 4 tipos de frutas (maçã, banana, melão e melancia) e 3 diferentes tipos de suco (uva, laranja e morango). De quantas maneiras diferentes ela pode combinar as frutas e os sucos para levar sempre lanchinhos saudáveis para a escola?

7. Bia tem 5 blusas coloridas (azul, verde, amarela, vermelha e rosa) e 3 saias (pretas, branca e cinza). Quantas combinações diferentes de saia e blusa Bia pode formar?

Produto de Medidas: Configuração Retangular

1. O pai de Ana Luiza vai colocar o piso na área da frente de sua casa. A área tem 6 metros de largura e 2 metros de comprimento. Quantos metros quadrados de piso o pai de Ana Luiza precisa comprar?
2. O quarto de Cirilo mede 5 metros de comprimento por 2 metros de largura. Quantos metros quadrados de tapete são necessários para forrar o piso do quarto?
3. Um campo tem 4 metros de comprimento e 3 metros de largura. Qual é a área desse campo?
4. Um campo tem 6 metros de largura e sua área mede 12 metros quadrados. Qual é o comprimento desse campo?
5. O jardim da casa de Fabiana é retangular, tem 5 metros de largura e 6 metros de comprimento. Qual é a área do jardim da casa de Fabiana?
6. Como presente de aniversário, a mãe de Rafael vai reformar o quarto dele. O pedreiro informou que a largura do quarto é de 3 metros e o comprimento é de 9 metros. Qual a área do piso desse quarto?
7. Paula comprou um imóvel retangular com $20m^2$ de área e 4 metros de largura. Qual o comprimento em metros desse imóvel?
8. A nossa sala de aula tem 6 metros de largura e 8 metros de comprimento. Qual a área total da nossa sala de aula?
9. Uma folha de papel de ofício tem 21 centímetros de largura e 30 centímetros de comprimento. Qual a área total da folha de papel de ofício?

AUTORES

CLAUDIA ROBERTA DE ARAÚJO GOMES

Doutora em Psicologia Cognitiva pela UFPE. Professora Adjunta do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Atua na Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências e Matemática e na formação de professores dos anos iniciais e das diversas licenciaturas. Pesquisa nas áreas de formação de educadores, alfabetização, psicopedagogia e psicologia educacional, notadamente na reflexão acerca da construção do conhecimento matemático pelas crianças e no trabalho do professor que ensina matemática.

E-mail: claudia.araujogomes@gmail.com

DÉBORA CABRAL LIMA

Mestre em Educação Matemática pela UESC/BA. Professora da Escola Centro Integrado Cristo Redentor, São José da Vitória-BA. Atua na área de Educação Matemática.

E-mail: cabraldebora@yahoo.com.br

ERNANI MARTINS DOS SANTOS

Doutor em Psicologia Cognitiva pela UFPE. Professor Adjunto da Universidade de Pernambuco (UPE - Campus Mata Norte). Atua no curso de Licenciatura em Matemática e na Coordenação de Concursos Acadêmicos da mesma instituição. Suas pesquisas têm foco em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Psicologia da Educação Matemática, Ensino-Aprendizagem de Matemática e Etnomatemática.

E-mail: ermasantos@gmail.com

EURIVALDA RIBEIRO DOS SANTOS SANTANA

Doutora em Educação Matemática pela PUC/SP, Pós-doutorado pela Universidade de Lisboa. Professora Titular da Universidade Estadual de Santa Cruz. Atua na área de Educação Matemática com ênfase em processo de ensino, em processos de aprendizagem e produção de material didático.

E-mail: eurivalda@uesc.br

JULIANA FERREIRA GOMES DA SILVA

Doutora em Psicologia Cognitiva pela UFPE. Professora Adjunta da Universidade Federal de Alagoas (UFAL). Atua no Instituto de Psicologia e tem como áreas de pesquisa a Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e a Psicologia da Aprendizagem. Suas investigações versam sobre a Psicologia da Educação Matemática, com ênfase no desenvolvimento de conceitos matemáticos.

E-mail: julianafgs@yahoo.com.br

JOSÉ AIRES DE CASTRO FILHO

Ph.D em Mathematics Education pela University Of Texas At Austin. Professor Titular da Universidade Federal do Ceará (UFC). Atua principalmente nos seguintes temas: Educação a Distância, Informática Educativa e Psicologia da Educação Matemática.

E-mail: aires@virtual.ufc.br

SÍNTRIA LABRES LAUTERT.

Doutora em Psicologia Cognitiva pela UFPE, com Pós-Doutorado no Poincaré Institute for Mathematics Education – Tutfs University. Professora Associada do Departamento de Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Atua na Pós-Graduação Stricto Sensu em Psicologia Cognitiva e na Graduação em Psicologia. É coordenadora do grupo de trabalho Psicologia da Educação Matemática da Associação Nacional de Pós-graduação em Psicologia (ANPEPP) e vice-coordenadora do grupo de trabalho Processos cognitivos e linguísticos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

E-mail: sintrialautert@gmail.com

PARTICIPANTES DA REDE E-MULT

O E-Mult foi idealizado inicialmente pela Dra Sandra Magina, a ela todo nosso agradecimento. E, várias foram as mãos que construíram e desenvolveram essa Rede. Gratidão é palavra para todos que se dedicaram no planejamento e implementação da pesquisa, para simbolizar essa gratidão deixamos o nome de cada um gravado neste livro.

Professores da Educação Básica

Alda Nara Ferreira de Alencar – Centro Integrado Cristo Redentor

Alexis Martins Teixeira – IFBA

Ana Carla Amâncio Machado Dias - Escola Pública da Cidade de Fortaleza

Antonia Neta Torres Costa - Escola Pública da Cidade de Fortaleza

Lucivânia da Silva Costa Ribeiro – Centro Integrado Cristo Redentor

Maria Benevides dos Santos – Escola Municipal Guilhermina Cabral

Maria Rita Lima Santos de Almeida – Centro Educativo Fé e Alegria

Silvana Lopes da Silva Santos – Escola Municipal Guilhermina Cabral

Simone Soares De Moraes - EMEIF Monteiro Lobato

Estudantes de Graduação

Alice Zenyanne Moreira dos Santos - UECE

Ariedja de Carvalho Silva – UFPE

Brena Rabelo dos Santos – UECE

Catarina Maria de Melo Linhares – UFPE

Claire Souza da Costa Marques – UESC

Clarissa Távora Tavares Cavalcante Viana – UFPE

Dacymere da Silva Gadelha – UFPE

Daniela Brayner de Farias Xavier – UFPE

Danielle Sobral Maciel – UFPE

Danilo do Carmo de Souza – UECE

Dara Catarina Santos da Silva – UFPE

Débora Silva dos Santos – UFPE

Deborah Monte Medeiros – UFC

Fabiane Santana da Silva – UESC

Farildes da Silva de Souza – UESC

Francisca Wellingda Leal da Silva – UECE

Gerlândia Santos Silva – UFC

Gleiciane Ferreira Farias – UECE

Hanna Gisellia Nogueira Antunes - UECE

Hosana de Fátima Melo da Silva – UECE

Jacilma Barata de Lima – UESC

Joyce Maria dos Santos – UFPE

Layane Carolinne de Lima Santos – UFPE

Maria Silvânia Marques Xavier de Souza - UFC

Maria Eduarda Chaves de Mendonça Galvão – UFPE

Maritza Maria Lima de Almeida Souza – UESC

Mônica de Moraes Oliveira – UFPE

Nássara Maia Cabral Cardoso Gomes – UECE

Nerivaldo Honorato da Cruz Santos – UESC

Paulo César da Silva Batista – UECE

Priscila Alves de Paula Belo – UECE

Sarah Rayssa Silva de Azevedo – UFPE

Thaynara Dias Martins – UECE

Taynan Vitória Lima de Castro – UECE

Valeria Conceição dos Santos – UESC

Estudantes de pós-graduação

Alexis Martins Teixeira – UESC

Ana Carla Amâncio Machado Dias – UFC

Anna Bárbara Barros Leite – UFPE

Antônio Cézar Teixeira – UESC

Caio Fábio dos Santos Oliveira – UESC

Camila Xavier Dias Souza Sena – UESC

Clara Raissa Fernandes de Melo – UFPE

Débora Cabral Lima – UESC

Dennys Leite Maia – UFC

Eliziane Rocha Castro – UECE

Elys Vânny Fernanda Rodrigues de Oliveira - UECE

Emanuella Figueira Pereira – UESC

Emília Isabel Rabelo Souza – UESC

Jaqueline Santana de Souza Santos – UESC

Joserlene Lima Pinheiro - UECE

Larissa Elfisia de Lima Santana – UFPE

Leidy Johana Peralta Marín – UFPE

Lemerton Matos Nogueira – UESC

Luana Cerqueira de Almeida – UESC

Mariana Oliveira Santos – UESC

Pedro Henrique Milagre – UESC

Taianá Silva Pinheiro – UESC

Jaqueline Santana de Souza Santos – UESC

Rayssa Melo de Oliveira – UECE

Rodrigo Lacerda de Carvalho – UFC

Silene Cerdeira Silvino da Silva - UECE

Silvana Holanda da Silva – UECE

Tamiles da Silva Oliveira – UESC

Pesquisadores

Alex Alexandre Alves – IFBA

Alina Galvão Spinillo – UFPE

Antônio Luiz de Oliveira Barreto – UECE

Aparecido dos Santos – UNINOVE

Claudia Roberta Araújo Gomes – UFRPE

Diná da Silva Correia – UESC

Ernani Martins dos Santos – UPE

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana – UESC

Irene Mauricío Cazorla – UESC

José Aires de Castro Filho – UFC

Juscileide Braga de Castro – UFC

Juliana Ferreira Gomes da Silva – UFAL

Marcilia Chagas Barreto - UECE

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba – UFPE

Sandra Maria Pinto Magina – UESC

Síntria Labres Lautert – UFPE

Vera Lúcia Merlini – UESC

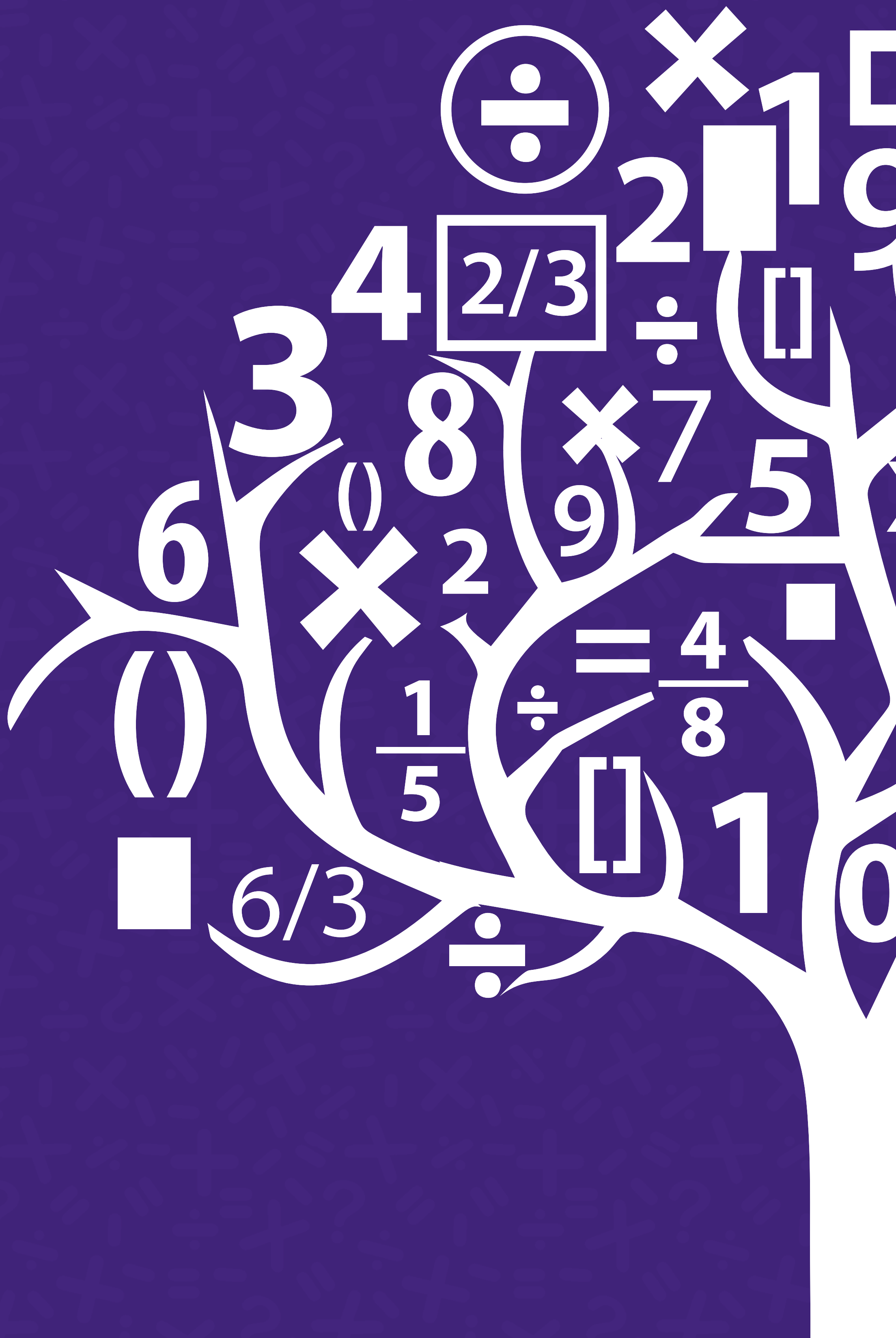
Coordenadores

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana – responsável pela coordenação Geral e pelo Núcleo Ilhéus

José Aires de Castro Filho – responsável pela coordenação do Núcleo Fortaleza

Síntria Labres Lautert – responsável pela coordenação do Núcleo Recife

Primeira edição impressa em 2017



ISBN: 978-85-8151-149-8