

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana
Síntria Labres Lautert
José Aires de Castro Filho

ENSINANDO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NO

4º e 5º anos

Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica
Coletânea Cadernos E-Mult

**ENSINANDO
MULTIPLICAÇÃO
E DIVISÃO NO**

4º e 5º anos

ORGANIZADORES

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana

José Aires de Castro Filho

Síntria Labres Lautert

ENSINANDO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NO

4º e 5º anos

AUTORES

Débora Cabral Lima

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana

Irene Mauricio Cazorla

Luana Cerqueira de Almeida

Pedro Henrique Milagre

Vera Lucia Merlini

**Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica
Coletânea Cadernos E-Mult**

Itabuna - Bahia, 2017



Via Litterarum

Copyright © 2017,
Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana
José Aires de Castro Filho
Síntria Labres Lautert

Todos os direitos desta edição reservados aos autores.

REVISÃO

MARIA LUIZA CASTRO ARAÚJO

EDITORACÃO ELETRÔNICA

VIA LITTERARUM EDITORA

PROJETO GRÁFICO, DIAGRAMAÇÃO E CAPA

MEL CAMPOS

APOIO FINANCEIRO



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Ficha Catalográfica: Elisabete dos Santos

E61 Ensinando multiplicação e divisão no 4º e 5º ano / Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana, José Aires de Castro Filho, Síntria Labres Lautert, , organizadores. – Itabuna : Via Litterarum,2017.

116p.: il. Alfabetização matemática, Estatística e Científica;

Coletânea de Cadernos E-mult.

Inclui referências e apêndice.

ISBN: 978-85-8151-150-4

1. Matemática (Ensino fundamental) – Estudo e ensino. 2. Multiplicação. 3. Divisão. I. Santana, Eurivalda Ribeiro dos. II. Castro Filho, José Aires. III. Lautert, Sintria Lautert. IV. Série.

CDD – 372.7

VIA LITTERARUM EDITORA

Rua Frederico Maron, 199, Centro, Ibicaraí, BA. CEP 45745-000

www.vleditora.com.br :: vialetras@gmail.com

A reprodução não autorizada desta publicação,
por qualquer meio, total ou parcial, constitui violação da Lei nº 9.610/98.

SUMÁRIO

PREFÁCIO	7
INTRODUÇÃO	11

CAPÍTULO I

1- TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	15
1.1 O CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO	19
1.2 SITUAÇÕES COM A RELAÇÃO QUATERNÁRIA	23
1.3 SITUAÇÕES COM A RELAÇÃO TERNÁRIA	33
REFERÊNCIAS	43

CAPÍTULO II

2- RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES MULTIPLICATIVAS	45
2.1 DESEMPENHO GERAL	45
2.2 COMO OS ESTUDANTES RESOLVEM AS SITUAÇÕES QUE TÊM MAIORES PERCENTUAIS DE ACERTO?	50
2.3 COMO OS ESTUDANTES RESOLVEM AS SITUAÇÕES QUE TÊM MENORES PERCENTUAIS DE ACERTO?	59
2.4 O QUE PODEMOS LEVAR PARA A PRÁTICA DA SALA DE AULA?	65
REFERÊNCIAS	67

CAPÍTULO III

3 - EXPERIÊNCIAS VIVENCIADAS POR PROFESSORES	69
3.1 TAREFAS ELABORADAS PELOS PROFESSORES DO 4º E 5º ANOS	71
3.2 MEMÓRIAS QUE SE CRUZAM	97
APÊNDICE A	105
MINI CURRÍCULO	107
PARTICIPANTES DA REDE E-MULT	111

PREFÁCIO

As operações aritméticas elementares são componentes essenciais do currículo de Matemática do ensino elementar, em qualquer país, sendo a sua compreensão um elemento fundamental para uma aprendizagem com sucesso em Matemática. Em particular, a aprendizagem com compreensão das diferentes situações multiplicativas constitui um objetivo primordial no ensino fundamental.

Vários autores¹ consideram que os alunos desenvolvem o conceito de multiplicação a partir de determinadas situações da vida de todos os dias. Por exemplo, a partir de situações como embalar ovos em caixas de seis, comprar 2 kg de bananas a três reais por quilo ou fazer diferentes sanduíches com três tipos de alimentos, os alunos vão construindo uma ideia do que significa multiplicar, das diferentes formas de multiplicar e das relações entre elas. Os mesmos autores referem que a ideia que os alunos têm de multiplicação determina a forma como multiplicam, o modelo que usam para organizar os dados e como calculam os resultados.

Assim, o trabalho em torno da multiplicação deve assentar na compreensão de conceitos e propriedades, feito ao longo de um período razoável de tempo. O conceito vai sendo aprofundado à medida que os alunos usam, de modo flexível, fatos e propriedades da multiplicação que conhecem. Os alunos têm um domínio do conceito de multiplicação quando conseguem relacionar essa operação com outras (a multiplicação como operação inversa da divisão, como uma adição sucessiva de parcelas iguais), percebem os seus diferentes sentidos e quando usam, de modo inteligente, fatos, relações e propriedades para resolver problemas multiplicativos.

Quando consideramos o raciocínio multiplicativo, de um modo mais amplo, encontramos situações que envolvem a multiplicação de um modo muito mais abran-

1 Ver, por exemplo, FOSNOT, C.; DOLK, M. *Young mathematicians at work*:

gente do que uma adição de parcelas iguais. Essas situações envolvem, muitas vezes, relações entre variáveis², tal como acontece naquelas situações que envolvem preços. Nesses casos, os números referem-se a valores contínuos que não podem ser encarados como cardinais de conjuntos.

A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, segundo a qual conceitos matemáticos organizam-se em estruturas complexas, como é o caso do campo multiplicativo, constitui um importante contributo para a compreensão da complexidade inerente à aprendizagem das operações de multiplicação e divisão.

Este livro, focado no campo multiplicativo e, tendo como suporte a teoria de Vergnaud, resulta de um trabalho desenvolvido ao longo de um período longo de tempo. O livro corresponde ao trabalho desenvolvido por uma grande equipe de pesquisadores e professores no âmbito do Programa Observatório da Educação (OBEDUC). Trata-se de um trabalho em rede desenvolvido em três estados da Região Nordeste (Bahia, Ceará e Pernambuco) abrangendo um largo número de pesquisadores de diferentes universidades, que trabalharam de modo colaborativo e desenvolveram um processo formativo com professores do 4º e 5º anos do ensino fundamental, trabalhando também, de modo colaborativo, com os professores do 1º ao 9º ano (envolvendo 84 professores de 12 escolas), num processo de experimentação e de reflexão, a partir da sala de aula.

Sabemos, hoje, que um fator primordial para o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos em processos formativos é a reflexão sobre a aprendizagem dos seus alunos quer seja realizada de modo individual, quer com os seus pares. Essa reflexão pode ser potencializada se se centrar em tarefas matemáticas e nas suas fases de utilização em sala de aula³. A análise das resoluções dos alunos, focando as diferentes estratégias utilizadas, os erros eventualmente cometidos e como os ultrapassar, constituem momentos fundamentais de aprendizagem para os professores.

A formação desenvolvida seguiu o modelo “reflexão-planejamento-ação-reflexão” que parte da reflexão sobre um diagnóstico do desempenho dos alunos, com

2 Ver ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A matemática na educação básica**. Lisboa: ME/DEB, 1999.

3 Ver STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão. Da investigação à prática. *Educação e Matemática*, 105, 2009. p. 26-28.

a análise das resoluções efetuadas, para o planeamento da ação, na sala de aula, a concretização da própria ação, seguida pela reflexão individual e, posteriormente, no coletivo do grupo de professores envolvidos no processo formativo, na mesma escola. Nesse caso, conforme já referido, o processo formativo teve como foco a teoria dos campos conceituais de Vergnaud no que se refere ao campo conceitual multiplicativo.

O livro parte desse processo formativo apresentando contributos importantes para processos futuros. Assim, no Capítulo I, é apresentada a teoria de Vergnaud sobre o campo multiplicativo numa linguagem simples, mas rigorosa, ilustrada com exemplos que ajudam a compreensão da teoria por não especialistas. No Capítulo 2, são apresentados desempenhos dos alunos no teste diagnóstico aplicado, analisando as suas resoluções à luz da teoria, conjeturando sobre sucessos e dificuldades nos diferentes desempenhos. São ainda analisadas as fragilidades que diferentes alunos parecem mostrar nos seus processos de construção dos conceitos de multiplicação e de divisão.

O Capítulo 3 apresenta situações desenvolvidas durante o processo formativo ao nível das salas de aula dos 4.º e 5.º anos, bem como reflexões das professoras sobre desempenhos concretos dos seus alunos. São ainda apresentadas tarefas desenvolvidas durante o processo formativo e que constituem contributos para formações futuras.

Para terminar, reafirmo a minha convicção de que este livro constitui um importante contributo para o ensino e a aprendizagem da Matemática com compreensão no ensino fundamental e, conseqüentemente, um instrumento muito útil para a formação de professores que ensinam Matemática.

Agradeço aos autores o honroso convite para prefaciar o livro, que fiz com todo o gosto.

Lisboa, outubro de 2017

Maria de Lurdes Serrazina

INTRODUÇÃO

Este livro apresenta os resultados de uma pesquisa desenvolvida no âmbito do Programa Observatório da Educação – OBEDUC, financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, Projeto N° 15.727, referente ao Edital 049/2012/CAPES/INEP. A pesquisa intitulada “Um estudo sobre o domínio das Estruturas Multiplicativas no Ensino Fundamental” teve suas fases realizadas pela rede que denominamos Rede E-Mult, composta por universidades de três estados da Região Nordeste: Bahia, Ceará e Pernambuco (apresentadas no Quadro 1) e, com a colaboração de um pesquisador da Universidade Nove de Julho do estado de São Paulo.

Quadro 1 – Universidades que compõem a Rede E-Mult por estado

Estado	Universidades Parceiras
Bahia	Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) – IES responsável pela coordenação geral (SEDE) e pelo Núcleo Ilhéus
Ceará	Universidade Federal do Ceará (UFC) – IES responsável pelo Núcleo Fortaleza Universidade Estadual do Ceará (UECE)
Pernambuco	Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) IES responsável pelo Núcleo Recife Universidade de Pernambuco – (UPE) Universidade Federal Rural de Pernambuco – (UFRPE)

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017)

A Rede E-Mult teve como finalidade principal investigar e intervir na prática de professores do ensino fundamental no que tange ao Campo Conceitual Multiplicativo, com base no modelo de formação “reflexão-planejamento-ação-reflexão”. Para alcançar o objetivo, a Rede E-Mult realizou a pesquisa durante quatro anos, de 2013 a 2016. Em 2013, foi conduzido um estudo dos modelos disponibilizados pela Prova Brasil e de seus descritores, dos currículos das escolas e da Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud, em específico, o Campo Conceitual Multiplicativo.

Tendo como base os estudos realizados em 2013, no ano seguinte, o projeto foi apresentado para 12 escolas de ensino fundamental dos três estados, sendo quatro escolas por estado, que foram denominadas escolas parceiras, visto que se buscou, desde o início, estabelecer, em cada uma delas, um grupo com características colaborativas composto por professores que ensinam matemática; gestores e coordenadores pedagógicos; pesquisadores¹; e, estudantes de graduação, mestrado e doutorado.

Paralelamente, foi elaborado, testado e aplicado um instrumento diagnóstico contendo 13 situações envolvendo o Campo Multiplicativo. O estudo diagnóstico foi feito com 3.890 estudantes do 1º ao 9º ano do ensino fundamental das 12 escolas parceiras. Ainda no ano 2014, foi dado início às análises referentes ao desempenho e aos esquemas usados pelos estudantes para resolver as situações apresentadas no instrumento diagnóstico.

Em 2015, realizou-se o processo formativo da Rede E-Mult com 84 professores das 12 escolas que estavam em sala de aula. O processo formativo colaborou para o desenvolvimento profissional dos professores, facilitando a reflexão de suas ações, seguida pelo planejamento reflexivo de suas novas ações num movimento espiralar crescente.

No ano 2016, a Rede E-Mult desenvolveu, de modo mais intenso, o processo de organização e de análise dos dados obtidos e a continuidade do processo formativo com professores de sete das doze escolas parceiras.

¹ No total, foram 15 pesquisadores envolvidos diretamente com a pesquisa.

Os principais resultados referentes ao estudo seguem apresentados em três livros da Coletânea Cadernos E-Mult, que fazem parte da Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica.

Cada um dos livros dessa coletânea tem um foco específico, mas se complementam. O primeiro livro é direcionado aos professores que atuam do 1º ao 3º ano do ensino fundamental, o segundo, aos professores que atuam no 4º e 5º anos do ensino fundamental e o terceiro aos professores que atuam do 6º ao 9º ano do ensino fundamental.

O livro “Ensinando multiplicação e divisão no 4º e 5º anos”, compõe o segundo livro da coletânea e foi estruturado em três capítulos. No Capítulo I, apresentamos, numa linguagem simples, as bases principais da Teoria dos Campos Conceituais no que se refere ao Campo Conceitual Multiplicativo da forma como foi abordada na Rede E-Mult. No Capítulo II, demonstramos resultados do desempenho dos estudantes no teste diagnóstico aplicado em 2013 e 2014 e os esquemas de suas resoluções em situações que tiveram os maiores e os menores percentuais de acerto. Tratamos, no Capítulo III, das situações elaboradas e aplicadas pelos professores durante o processo formativo em 2015, contemplando esquemas utilizados por estudantes, comentários e memórias dos professores. Para finalizar, acrescentamos situações elaboradas e aplicadas pelos professores que não foram contempladas na escrita do Capítulo III.

Desejamos a todos uma boa leitura e que os resultados aqui apresentados possam contribuir com o fazer do professor em sala de aula.

Os organizadores

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Programa Observatório da Educação, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES/Brasil.

Eurivalda Santana

Débora Cabral Lima

1- TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais fornece um quadro teórico para trabalhar com elementos que fazem parte do desenvolvimento cognitivo do indivíduo, tais como, a linguagem, o raciocínio, a percepção e a memória.

Essa teoria concebe o conhecimento em Campos Conceituais e define o Campo Conceitual como um conjunto variado de situações, conceitos, conteúdos, relações e operações de pensamento, que podem estar interconectados durante o processo de aquisição (VERGNAUD, 1983).

As situações¹ são o ponto de entrada para um dado Campo Conceitual e elas dão sentido ao conceito e, esse, necessita de uma variedade de situações para tornar-se significativo (SANTANA, 2012).

Com essas concepções, a teoria auxilia o professor a analisar os processos pelos quais os estudantes adquirem o conhecimento, permitindo que ele tenha mais clareza sobre os elementos conceituais, as propriedades, as operacionalizações que estão sendo ensinadas e, assim, possa mediar situações nas quais exista a intenção de ampliar o conhecimento deles.

¹ Usamos o termo situação como sinônimo de problema, situação-problema e tarefa.

Para que ocorra a aprendizagem de um conceito, o estudante precisa ser confrontado com diversas situações e essa aprendizagem pode ocorrer num longo período de tempo, por meio da experiência oportunizada ao longo dos anos, da maturação inerente ao desenvolvimento biológico e da aprendizagem possibilitada principalmente pela escola (VERGNAUD, 1996; SANTANA, 2012).

Ser confrontado com uma variedade de situações que deem sentido a um conceito e, com diferentes níveis de complexidade, é importante para que o estudante compreenda um determinado conceito, de modo que esse confronto propicie não apenas filiações, mas também rupturas, pois, às vezes, para a formação de uma competência, é preciso abandonar ideias assumidas anteriormente, para assumir outras ideias (VERGNAUD, 2011).

Referindo-se à multiplicação, a filiação, está ligada à adição por meio da soma de parcelas iguais, quando o estudante resolve as situações multiplicativas com o conhecimento do Campo Aditivo. A ideia de a multiplicação ser tratada apenas como soma de parcelas iguais, reduz o significado dessa operação. É necessário que o estudante compreenda que a adição de parcelas iguais não é suficiente para compreender e resolver algumas situações que envolvam a multiplicação, mas é essencial ter rupturas para que o estudante possa compreender o conceito de multiplicação e suas relações.

Um dos motivos para que a escola sustente essa ligação da adição com a multiplicação, relaciona-se

[...] com a própria concepção de currículo que norteia a ação pedagógica do professor, qual seja: a ideia de que o currículo apresenta uma sequência lógica de conteúdos: primeiro se aprende a adição, depois a subtração e, em seguida, a multiplicação e a divisão (SANTOS, 2015, p. 100).

O professor, enquanto mediador, pode elaborar um conjunto de situações que não leve em consideração essa ordem, pois as ideias de cada uma dessas operações podem ser trabalhadas desde o primeiro ano da educação básica, sem que precise trabalhar com o algoritmo. Entretanto, o momento para a aprendizagem do algoritmo de cada uma dessas operações é que precisa ser organizado numa certa ordem.

Para o entendimento das relações envolvidas nas situações multiplicativas, é importante a compreensão da grandeza e das suas medidas.

As grandezas são atributos de objetos², isto é, características ou qualidades de objetos, que não pertencem à essência do objeto, porém é determinada por essa essência. Escolhido um atributo, é possível comparar objetos conforme esse atributo (MORAIS; TELES, 2014). Por exemplo, comprimento, largura, altura são atributos de uma caixa.

Para comparar as grandezas é preciso que elas tenham a mesma natureza: comprimento com comprimento, temperatura com temperatura, unidades com unidades, etc. Ao observar dois terrenos podemos escolher o atributo área e comparar: quantas vezes a área de um terreno é maior que a outra, qual a maior área ou qual a menor área.

A medida de uma grandeza é determinada por meio da comparação com uma unidade de medida e o resultado de cada medição é expresso por um número indicando a unidade de medida (MORAIS; TELES, 2014).

Para a representação numérica de grandeza, podemos assumir que é um par formado pelo número (medida) e a unidade de medida escolhida. Mas, não apenas as medidas padronizadas compõem as unidades de medida de uma grandeza, vejamos a situação do Exemplo 1:

Exemplo 1: Na bandeja rosa cabem seis copos e, na bandeja verde, três copos.

A natureza da grandeza envolvida é a capacidade de cada bandeja que será determinada pela quantidade³ de copos que se pode colocar em cada bandeja. Nesse exemplo, predomina a contagem dos elementos e usamos a unidade como medida.

Considerando que elementos como números, pessoas, conjuntos, pacotes, entre outros, podem ser relacionados entre si, é possível observar relações: a ternária e a quaternária.

2 Objeto está colocado na perspectiva da Semiótica de Peirce (PEIRCE, C. S. Semiótica. Tradução de NETO, J.T.C. São Paulo: Perspectiva, 2012).

3 Quantidade como uma qualidade do que pode ser contado ou medido..

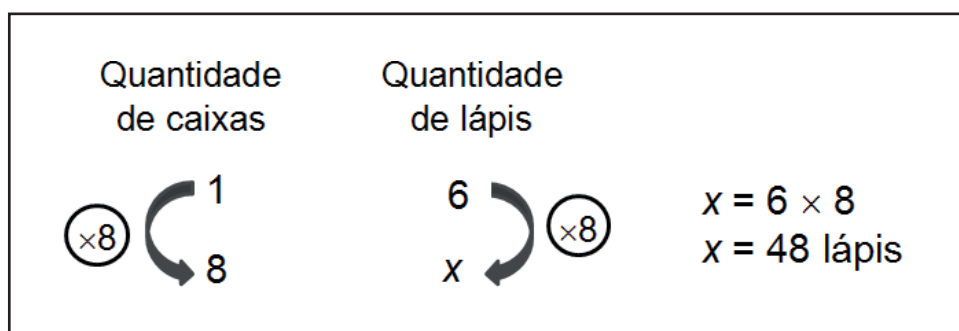
A relação ternária é definida como uma ligação de “três elementos entre si” e, a quaternária, de quatro elementos entre si. A relação quaternária tem frequentemente a forma “a está para b assim como c está para d” (VERGNAUD, 2014, p. 57-72).

Nas relações quaternárias em que as quantidades podem assumir a forma a está para b , assim como c está para d , a correspondência entre as quantidades pode ser determinada pelo operador escalar e pelo operador funcional e, esses operadores, podem ser usados como esquema de resolução de situações com essas relações.

O operador escalar permite a transformação entre as medidas de uma mesma grandeza e é representado por um número (operador escalar – porque não tem a unidade de medida). Um exemplo:

Exemplo 2: Se em uma caixa tem seis lápis, quantos lápis terão em oito caixas iguais a essa?

Figura 1.1 – Esquema de resolução com o uso do operador escalar

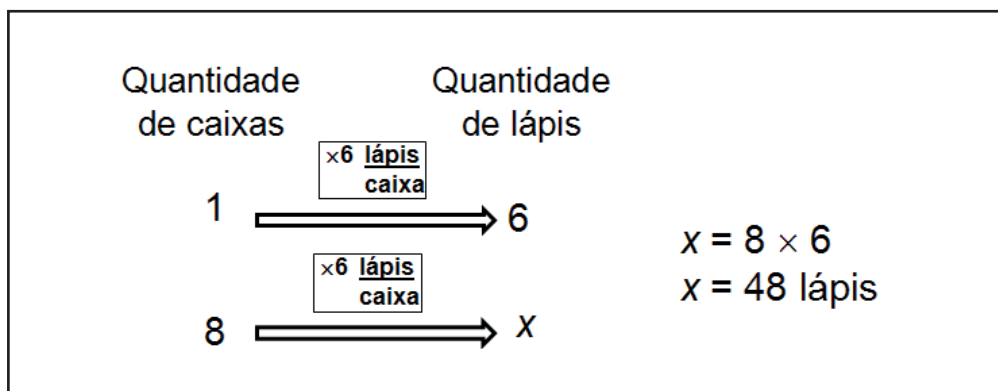


Fonte: Rede E-Mult (2013-2017)

A Figura 1.1 evidencia um esquema de resolução com o uso do operador escalar para a situação do Exemplo 2. Na grandeza quantidade de caixas, 1 e 8 representam as quantidades de caixas e são medidas, o operador escalar (X8) permite passar de uma para oito caixas de lápis. Como as grandezas são proporcionais, esse mesmo operador (X8), permite passar de seis para x . Assim, em oito caixas, têm-se 48 lápis.

O operador funcional expressa a passagem das medidas de uma grandeza para outra (grandezas distintas). Na relação de uma grandeza em função da outra, a Figura 1.2 apresenta o operador funcional para o Exemplo 2.

Figura 1.2 – Esquema de resolução com o uso do operador funcional



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

O operador funcional ($\times 6$) permite passar da grandeza quantidade de caixas para a grandeza quantidade de lápis. Têm-se uma caixa vezes seis lápis por caixa, o que resulta em 48 lápis. Esse operador expressa a passagem da medida da grandeza quantidade de caixas para a medida da grandeza quantidade de lápis à qual está relacionada. Visando discutir mais o Campo Conceitual Multiplicativo, colocamos, a seguir, a sua definição.

1.1 O Campo Conceitual Multiplicativo

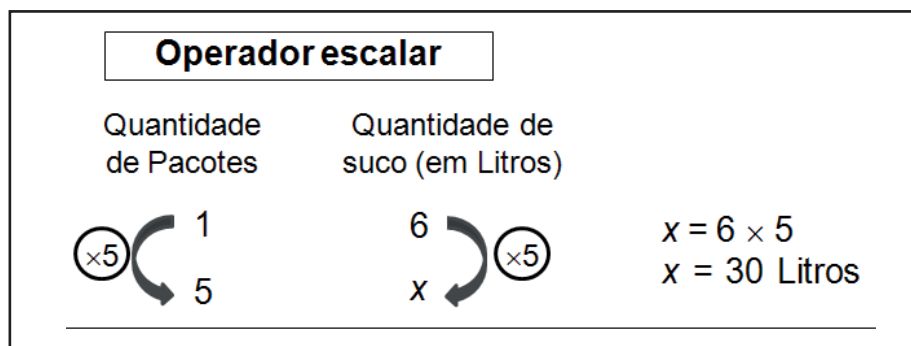
O Campo Conceitual Multiplicativo ou Estruturas Multiplicativas é o conjunto das situações que podem ser resolvidas com o uso de uma ou de várias multiplicações ou divisões e os conceitos e teoremas que permitem analisar e resolvê-las, como, por exemplo: proporção simples, proporção múltipla, fração, múltiplo, divisor, entre outros (VERGNAUD, 1996).

Vamos exemplificar aqui três formatos de situações em que se pode utilizar as operações de multiplicação ou de divisão para a sua resolução: Proporção Direta, Comparação Multiplicativa e Produto de Medidas. A primeira está associada à proporcionalidade entre as grandezas distintas (quantidade de pacotes, quantidade de biscoitos, quantidade em metros, valor em dinheiro, quantidade de pessoas, entre outras) e tem o foco na Proporção Direta⁴ (simples, dupla e múltipla). Quando temos duas grandezas, temos quatro medidas (quantidade) relacionando-se e caracterizando uma relação quaternária.

Exemplo 3: Um pacote de suco em pó rende seis litros. Se Marisa comprar cinco pacotes iguais a ele, quantos litros de suco ela poderá fazer?

No Exemplo 3, existem duas grandezas, a quantidade de pacotes e a quantidade de litros de suco:

Figura 1.3 – Esquema com as grandezas do Exemplo 3



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

4 Quando as grandezas de uma situação são diretamente proporcionais, ou seja, se a medida de uma das grandezas aumenta (ou diminui), a medida da outra grandeza aumenta (ou diminui) na mesma proporção. Neste livro abordamos apenas situações que são diretamente proporcionais.

A quantidade de pacotes aumentou significando que a quantidade de litros também vai aumentar. A essa relação de aumento que uma grandeza influencia na outra é chamada proporção e, no Exemplo 3, é direta porque as duas aumentam.

Será uma proporção direta entre as grandezas quando a medida de uma grandeza aumentar e a medida da outra grandeza também aumentar ou se a medida de uma grandeza diminuir a outra também diminuir.

A segunda forma de relação multiplicativa é o Produto de Medidas e relaciona três medidas, refere-se a uma Relação Ternária pois, relaciona uma medida ao produto de duas outras. Vejamos o Exemplo 4.

Exemplo 4: Alice quer comprar um tapete para a sala e, para ir à loja, ela mediu o comprimento de 2m e a largura de um metro e meio do espaço que será ocupado pelo tapete. Qual será a área da sala a ser coberta pelo tapete?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Área} = \text{comprimento} \times \text{largura} \\ \text{Área} = 2 \times 1,5 = 3 \\ \text{Área} = 3\text{m}^2 \end{array} \right.$$

A medida da área é o produto das duas outras medidas: o comprimento e a largura.

A terceira forma de relação multiplicativa é a Comparação Multiplicativa que relaciona três elementos, sendo que um dos elementos relaciona os outros dois.

Exemplo 5: Ana tem 12 lápis de cor e Pedro tem três vezes mais lápis de cor do que Ana. Quantos lápis de cor Pedro tem?

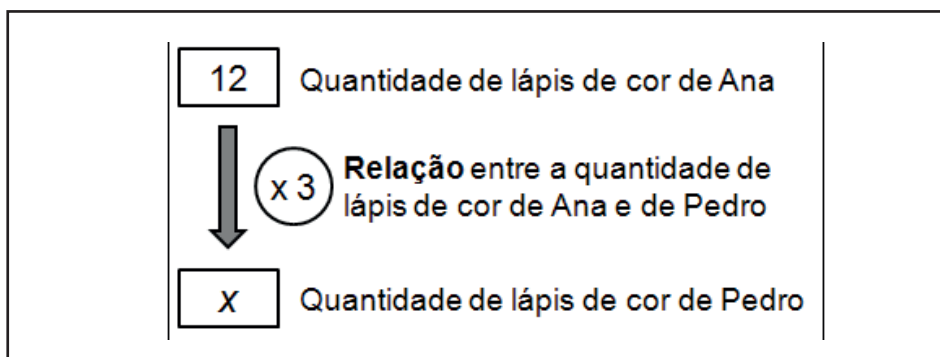
Quantidade de lápis de cor de Ana = 12

Relação entre a quantidade lápis de cor de Ana e de Pedro = 3 vezes mais

Quantidade de lápis de cor de Pedro = x

Para saber a quantidade de lápis de cor de Pedro, é preciso saber a quantidade de lápis de cor de Ana e a relação que existe entre elas (três vezes mais). Temos a Relação Ternária, pois estabelece a relação entre três elementos.

Figura 1.4 - Esquema com os elementos do Exemplo 5

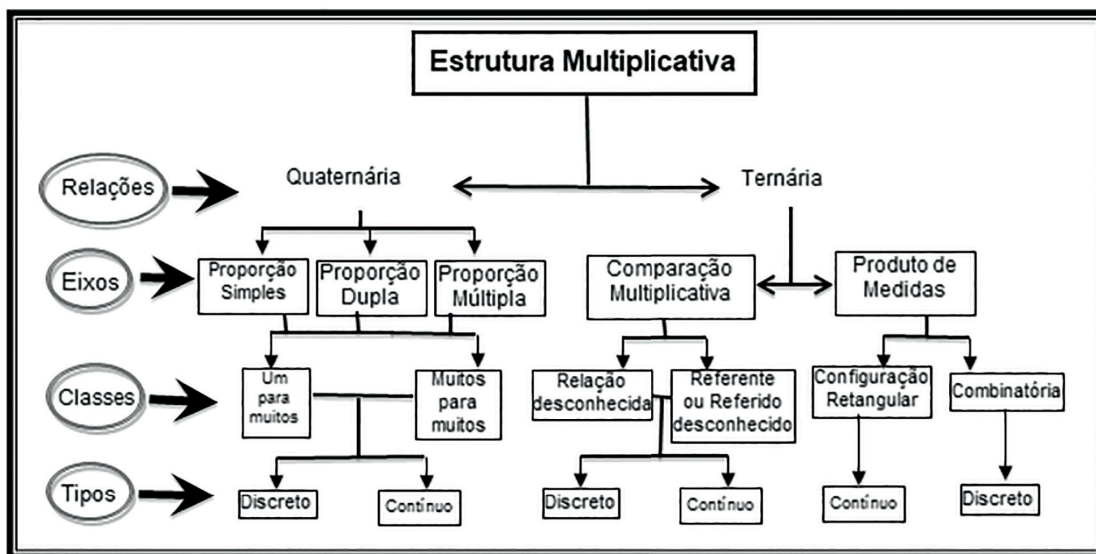


Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Para compreendermos essas três formas de relação multiplicativa (Proporção Direta, Comparação Multiplicativa e Produto de Medidas), tomamos como base a estrutura ternária e quaternária, que foi colocada inicialmente por Vergnaud (1983, 1996, 2014), sendo adaptada por Magina, Merlini e Santos (2014).

Consideramos o campo numérico dos números racionais para a classificação apresentada na Figura 1.5.

Figura 1.5 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Magina; Merlini; Santos, (2014).

O esquema mostra o Campo Multiplicativo (Estrutura Multiplicativa) dividido nas relações quaternária e ternária. A primeira subdivide-se em eixos de Proporções Diretas (Proporção Simples, Proporção Dupla e Proporção Múltipla) e, a segunda, no eixo da Comparação Multiplicativa e do Produto de Medidas. São do tipo discreto, se são passíveis de contagem e, do tipo contínuo, se são passíveis de mensuração, podendo assumir valores decimais (quantidade em metros, quantidade em quilogramas, valor em dinheiro...). A seguir, discutiremos situações com relação quaternária.

1.2 Situações com a relação quaternária

Para compreender a organização da Relação Quaternária no eixo Proporção Simples, conforme a classificação da Figura 1.5, descreveremos algumas situações que nos permitem analisá-las.

A **Proporção Simples** é uma relação proporcional entre duas grandezas, envolvendo quatro medidas. Elas podem ser classificadas na classe de um para muitos ou de muitos para muitos.

PROPORÇÃO SIMPLES UM PARA MUITOS

As situações classificadas na classe um para muitos associa uma unidade de uma grandeza com várias unidades da outra grandeza. Vejamos o Exemplo⁵ 6.

Exemplo 6: Joana sabe que em um pacote há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?

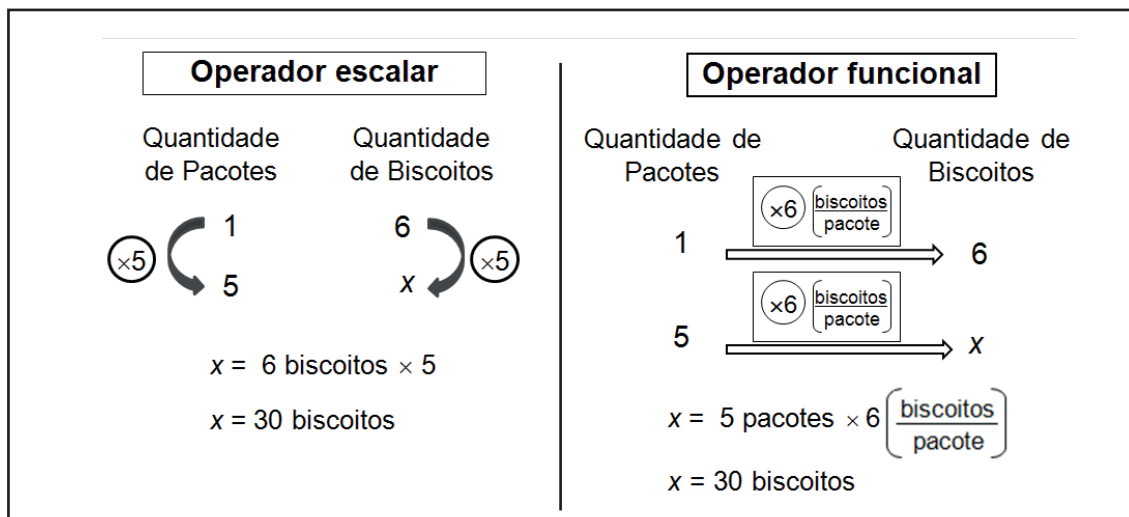
O Exemplo 6 pode ser resolvido com uma multiplicação e usando procedimentos diferentes – o operador escalar multiplicativo ou o operador funcional, ver a Figura 1.6.

Exemplo 6 - Relação quaternária, eixo da Proporção Simples, classe muitos para muitos.

Grandezas - Quantidade de pacotes e quantidade de biscoitos.

⁵ As situações dos exemplos de 6 a 17, com exceção das situações 9 e 13, são apresentadas aqui conforme elaboradas nas ações da Rede E-Mult, para compor o teste diagnóstico da pesquisa.

Figura 1.6 – Proposta de resolução do Exemplo 6 com operador escalar e operador funcional



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

A análise dessa situação possibilita perceber a existência dos dois operadores: a) o operador escalar que está descrito na transformação entre as medidas (quantidade de pacotes e quantidade de biscoitos) de uma mesma grandeza; b) o operador funcional que ocorre entre as medidas de grandezas distintas (de quantidade de pacotes para quantidade de biscoitos).

Ao analisar o operador existente entre as medidas da grandeza quantidade de pacotes, observamos que, de um para cinco, houve uma ampliação de cinco vezes, em relação ao estado inicial (de um para cinco, multiplicou por cinco). Esse operador escalar ($\times 5$) é que faz a correspondência de um pacote para cinco pacotes. E, pela proporcionalidade entre as grandezas, operador escalar ($\times 5$) é o mesmo que deve transformar a medida da grandeza quantidade de biscoitos.

Em um pacote de biscoitos, há seis biscoitos, ou seja, $6(\text{biscoitos}/(\text{pacote de biscoitos}))$, nas mesmas condições e queremos encontrar quantos biscoitos existem em cinco pacotes. Ao multiplicar um pacote pelo operador funcional $6(\text{biscoitos}/(\text{pacote de biscoitos}))$, temos a quantidade de seis biscoitos. A relação

entre as grandezas é proporcional e ampliada seis vezes, portanto, a quantidade de 30 biscoitos é encontrada multiplicando 5 pacotes por 6(biscoitos/(pacote de biscoitos)).

Essa situação do Exemplo 6 pode ser elaborada buscando a quantidade de pacotes de biscoito ou a quantidade de biscoitos por pacote, o que modifica a complexidade da situação, vejamos:

Exemplo 6(a) – Joana sabe que em um pacote há seis biscoitos. Ela tem 30 biscoitos. Quantos pacotes Joana tem?

Exemplo 6(b) – Joana sabe que 30 biscoitos foram embalados igualmente em cinco pacotes. Ela tem um pacote. Quantos biscoitos Joana tem?

A Figura 1.7 apresenta o esquema de resolução para as situações dos exemplos 6, 6(a) e 6(b).

Figura 1.7 – Esquemas de resolução observando diferentes níveis de complexidade

Exemplo 6		Exemplo 6(a)		Exemplo 6(b)	
Quantidade de Pacotes	Quantidade de Biscoitos	Quantidade de Pacotes	Quantidade de Biscoitos	Quantidade de Pacotes	Quantidade de Biscoitos
1	6	1	6	1	x
5	x	x	30	5	30

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Com os exemplos das situações 6, 6(a) e 6(b) queremos mostrar a importância de selecionar e confrontar o estudante com situações com diferentes níveis de complexidade. Podemos observar que, no Exemplo 6, a quantidade de pacotes aumenta cinco vezes, com a ideia de que o operador escalar multiplica a quantidade de biscoitos em cada pacote por cinco e determina a quantidade de biscoitos para cinco pacotes, utilizando uma multiplicação para resolver a situação.

No Exemplo 6(a), para determinar o operador escalar, divide-se a quantidade total de biscoitos pela quantidade de biscoitos por pacote. Esse tipo de divisão é chamado divisão

por quota (divisão entre as medidas de uma mesma grandeza). O resultado da divisão é o valor do escalar que, multiplicado por um, da grandeza quantidade de pacotes, vai determinar a resposta da situação.

No Exemplo 6(b), para determinar o operador escalar, divide-se a quantidade total de pacotes por um. O operador escalar 5 deve ser usado para determinar a quantidade de biscoitos por pacote, ou seja, divide-se a quantidade total de biscoitos (30) pelo escalar (5). Outra forma de resolver sem pensar no operador escalar é utilizar o operador funcional, usar o que denominamos divisão por partição (divisão entre as medidas de grandezas distintas), dividir 30 (quantidade total de biscoitos) por 5 (quantidade total de pacotes).

Ao alterar o termo desconhecido nas situações, é possível observar que o nível de complexidade da situação varia, pelas relações a serem compreendidas em cada situação e pela operação a ser utilizada. Mas, é importante que o professor confronte os estudantes com situações que estimulem o raciocínio e favoreçam a constituição de novas aprendizagens.

PROPORÇÃO SIMPLES MUITOS PARA MUITOS

A segunda classe da relação quaternária do eixo da Proporção Simples é de muitos para muitos. Nessa classe, a medida de **uma unidade** não está expressa para nenhuma das grandezas da situação dada, ou seja, as medidas envolvidas na situação são diferentes de um. Vejamos um exemplo:

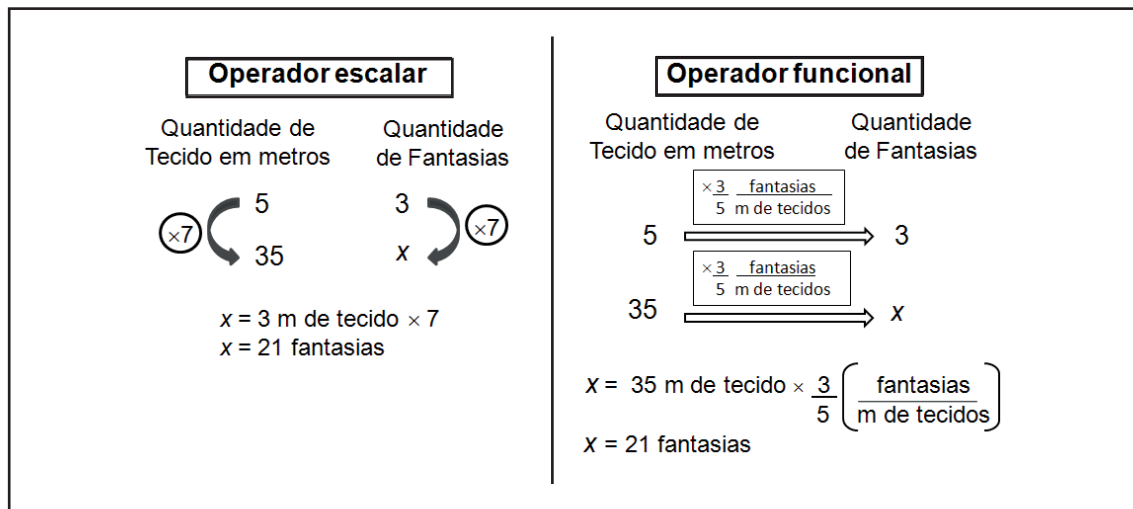
Exemplo 7: Para fazer 3 fantasias, são necessários 5 m de tecido. Ana tem 35 m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?

Vejamos, na Figura 1.8, dois esquemas para solucionar essa situação, um usando operador escalar e, outro, o operador funcional.

Exemplo 7 - Relação quaternária, eixo da Proporção Simples, classe muitos para muitos.

Grandezas - Quantidade de tecido em metros e quantidade de fantasias.

Figura 1.8 – Proposta de esquemas de resolução para o Exemplo 7



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Para encontrar o operador escalar na razão entre as medidas da metragem de tecido de 5 para 35 metros, ocorre uma ampliação de sete vezes, que pode ser encontrada dividindo 35 por 5 e resultando no operador escalar 7. A proporcionalidade permite que o operador seja mantido entre as medidas da quantidade de fantasias de forma a recorrer à multiplicação para encontrar o resultado: 21 fantasias feitas com 35 metros de tecido.

O operador funcional entre as medidas 5 metros de tecido e 3 fantasias é de $(3/5)$ fantasias por metro de tecido). Aqui, para resolver, recorreremos às operações: multiplicação (o produto do número natural 35 pelo número racional $3/5$) e também divisão (observada na razão entre 3 e 5 expressa em $3/5$).

Considerando o ano escolar em que estejam sendo abordados os conceitos do Campo Conceitual Multiplicativo, a resolução da situação com o operador funcional pode ficar mais complexa, pois ele expressa uma relação entre as medidas de duas grandezas, tornando-o mais difícil de compreensão.

No quarto e quinto ano do ensino fundamental, é importante que o operador funcional seja apresentado (mas não exigido como forma de resolver a situação) permitindo o reconhecimento da existência dos dois operadores: na vertical entre as medidas de uma mesma grandeza (operador escalar) e, na horizontal, entre as medidas de grandezas distintas (operador funcional).

PROPORÇÃO DUPLA

O segundo eixo da relação quaternária é a **Proporção Dupla**. Nas situações que envolvem esse eixo tem-se, no mínimo, três grandezas de diferentes naturezas. Quando se tem três grandezas, uma é proporcional às outras duas. Uma grandeza é diretamente proporcional a cada uma das outras. O Exemplo 8 apresenta uma situação de Proporção Dupla.

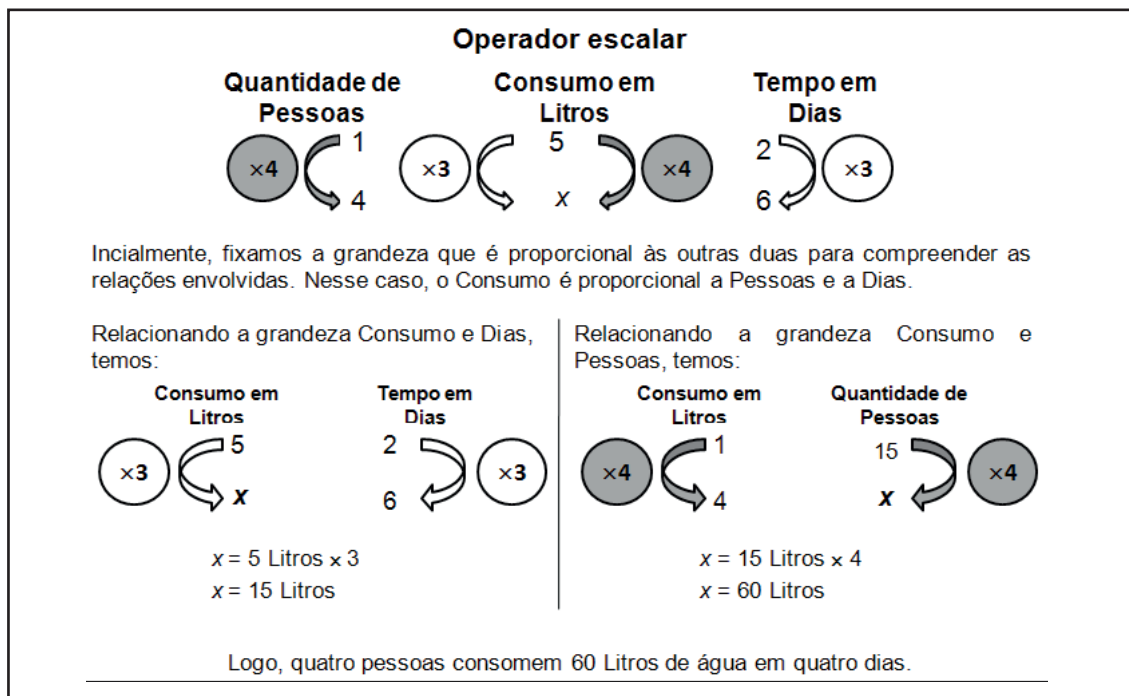
Exemplo 8: Uma pessoa consome, em média, 5 litros de água em 2 dias. Quantos litros de água consumirá uma família composta por 4 pessoas em 6 dias?

Nessa situação, a grandeza consumo em litros é proporcional à quantidade de pessoas e à quantidade de dias, mas essas duas últimas não são proporcionais entre si, pois, se variarmos a quantidade de dias, não altera a quantidade de pessoas. Apresentamos na Figura 1.9 um esquema de proposta de solução do Exemplo 8.

Figura 1.9 – Proposta de esquema para resolução do Exemplo 8 com o operador escalar

Exemplo 8 - Relação quaternária, eixo da Proporção Dupla, classe um para muitos e muitos para muitos.

Grandezas - Quantidade de pessoas, consumo em litros e tempo em dias.



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na Figura 1.9, são apresentadas as três grandezas (Quantidade de pessoas, Consumo em litros e Consumo em dias) e as suas medidas. Para resolver a situação (lado esquerdo), tomamos duas proporcionais (Consumo em litros e Tempo em dias) e, para encontrar o consumo de uma pessoa em seis dias, aplicamos o operador escalar ($\times 3$), ou seja, multiplicamos a quota de 5 litros pelo operador escalar ($\times 3$) e obtivemos 15 litros. Em seguida (lado direito), relacionamos as grandezas, Quantidade de Pessoas e Consumo em Litros, para saber quantos litros quatro pessoas consomem

em seis dias. Assim, aumentando a quantidade de pessoas (de uma para quatro), alterou-se o consumo, mas não houve interferência nos dias. Do mesmo modo, aumentando o número de dias (de dois para seis) em nada influenciou no número de pessoas. Por esses motivos, dizemos que, na Proporção Dupla, as grandezas não são todas proporcionais entre si, assumem duplas de proporcionalidades.

PROPORÇÃO MÚLTIPLA

Na relação quaternária, o eixo da **Proporção Múltipla** envolve mais de duas grandezas com Proporções Simples que são encadeadas, ou seja, ao aumentar ou diminuir a quantidade de uma das grandezas, conseqüentemente, aumenta ou diminui as demais na mesma proporção. A característica elementar é as quantidades possuírem uma relação de dependência. O Exemplo 9 retrata uma situação de Proporção Múltipla, classe um para muitos.

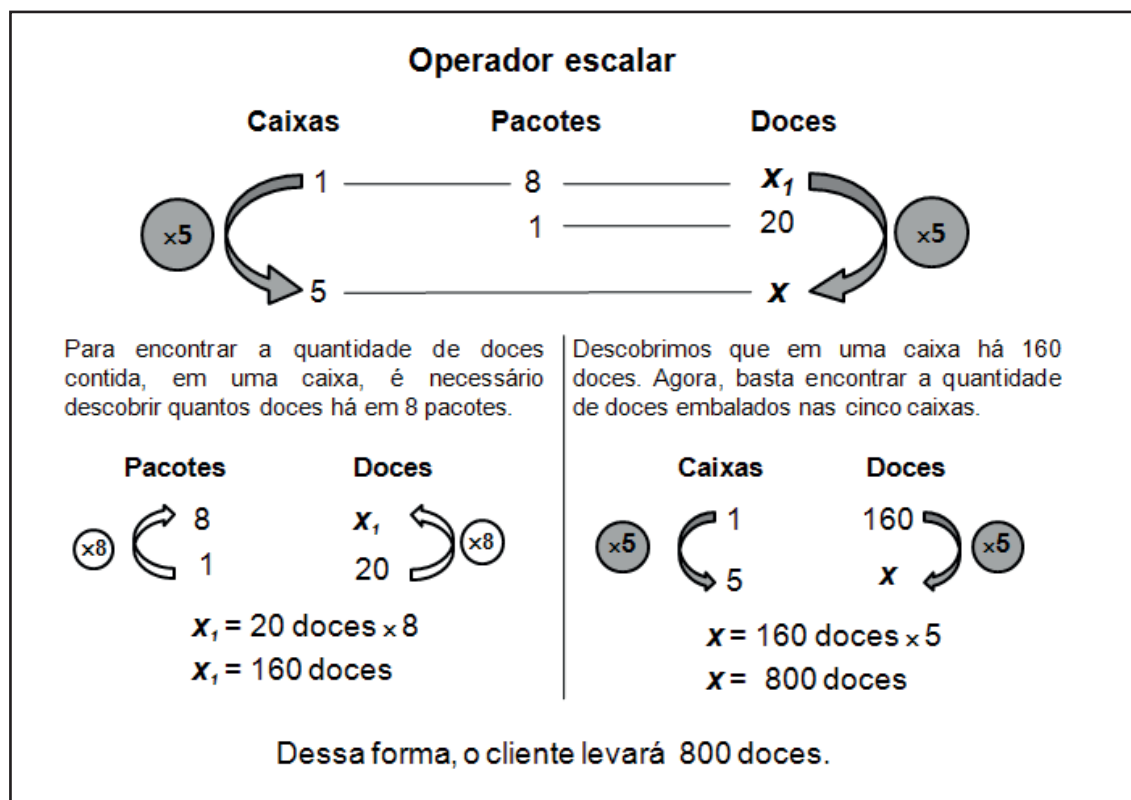
Exemplo 9: Dona Maria vende caixas com pacotes de doce. Em uma caixa, há oito pacotes. Cada pacote contém 20 doces. Se vender cinco caixas, quantos doces o cliente levará?

Apresentamos, na Figura 1.10, uma possível solução para essa situação utilizando o operador escalar.

Exemplo 9 - Relação quaternária, eixo da Proporção Múltipla, classe um para muitos.

Grandezas - Quantidade de caixas, quantidade de pacotes e quantidade de doces.

Figura 1.10 – Proposta de esquema para resolução do Exemplo 9 com o operador escalar



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na situação do Exemplo 9, podemos perceber que as grandezas envolvidas são proporcionais, o que nos permite encontrar os (160) doces contidos em oito pacotes realizando uma proporção simples entre as grandezas “pacotes” e “doces”. Tendo essa quantidade, determinamos o total de 800 doces obtidos na compra de cinco caixas. Observe que, ao aumentar a quantidade de pacotes, o mesmo acontece com os doces e, aumentando o número de caixas, aumentamos a quantidade de doces. Assim, utilizamos duas Proporções Simples encadeadas, o que caracteriza uma Proporção Múltipla. A seguir, discutiremos a respeito da relação ternária.

1.3 Situações com a relação ternária

No esquema da Figura 1.5, a relação ternária tem dois eixos: Comparação Multiplicativa e Produto de Medidas. A seguir, analisaremos esses eixos.

COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA

Para a Comparação Multiplicativa, vamos usar a separação das classes, feita por Lima (2016), identificando cada classe desse eixo separadamente, nomeadamente: relação, referente e referido. A situação, a seguir, é um exemplo.

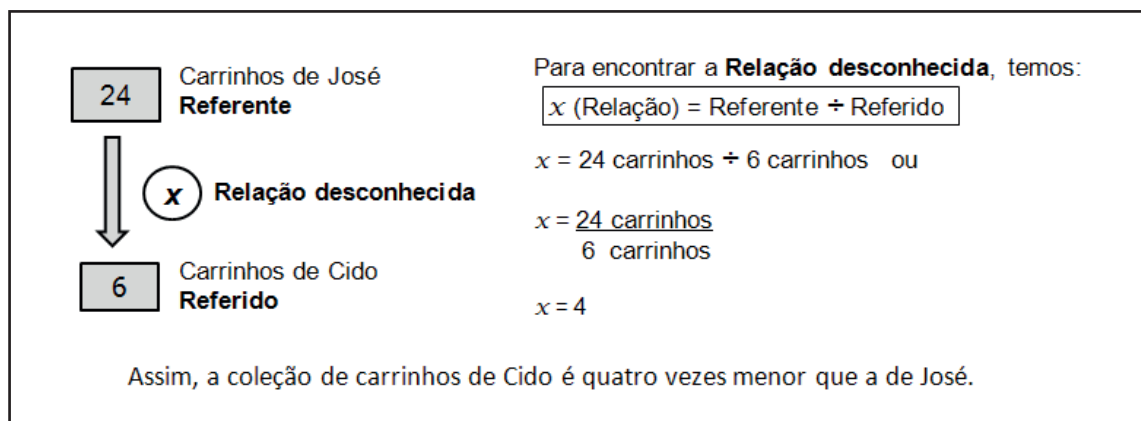
Exemplo 10: Cido tem uma coleção de 6 carrinhos e José tem uma de 24 carrinhos. Quantas vezes a coleção de Cido é menor do que a de José?

A relação desconhecida é o operador que transforma uma medida e trata-se de um escalar. O referente é a medida referencial para estabelecer a comparação entre os elementos. O referido é a medida que depende do referente.

Entre o referente e o referido, a relação exprime, por exemplo, a ideia de ‘vezes maior’, ‘vezes mais’, ‘vezes menor’ ou ‘vezes menos’. A Figura 1.11 apresenta um esquema de resolução para o Exemplo 10.

Exemplo 10 - Relação ternária, eixo da Comparação Multiplicativa, relação desconhecida.

Figura 1.11 – Proposta de esquema para resolução da situação do Exemplo 10



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Observe que a relação estabelecida parte da quantidade de carrinhos de José (referente) para a quantidade de carrinhos de Cido (referido). E, ao dividir essas quantidades, determinamos a relação entre elas, sendo que a coleção de carrinhos de Cido é quatro vezes menor que a de José.

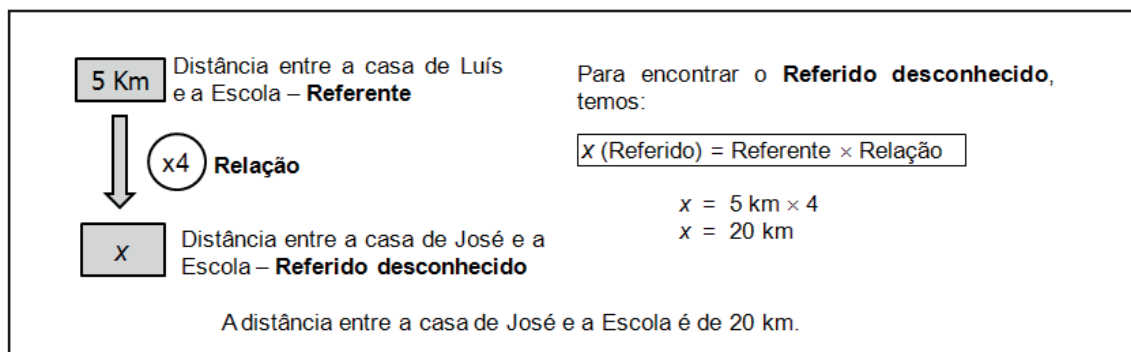
Vejamos outro exemplo de situação da Comparação Multiplicativa.

Exemplo 11: A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?

A Figura 1.12 mostra um esquema de resolução.

Exemplo 11 - Relação ternária, eixo da Comparação Multiplicativa, referido desconhecido.

Figura 1.12 – Proposta de esquema para resolução para a Situação 11



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Podemos observar (Figura 1.12) que o referente é a medida da distância entre a casa de Luís e a escola e constitui-se no ponto de partida para resolver a situação, ou seja, a referência. Busca-se o referido (medida da distância entre a casa de José e a Escola). Entre as medidas, existe uma relação (quatro vezes mais distante), dada por um escalar que amplia a medida do referente e, assim, o referido é o produto entre elas: $5\text{km} \times 4 = 20\text{km}$.

A solução dessa situação também é possível por meio da adição de parcelas iguais ($5 + 5 + 5 + 5 = 20$). No entanto, salientamos a necessidade de ampliar o significado da multiplicação não se reduzindo apenas a esse significado.

O Exemplo 12 é uma situação da Comparação Multiplicativa.

Exemplo 12: Ontem Tonho tinha 18 figurinhas e hoje ele tem 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele tem hoje?

Vejamos, na Figura 1.13, uma possível resolução para essa situação.

Exemplo 12 - Relação ternária, eixo da Comparação Multiplicativa, referido desconhecido.

Figura 1.13 – Proposta de resolução para a situação do Exemplo 12

18	Figurinhas Ontem Referente	Para encontrar a quantidade de figurinhas que Tonho tem hoje, Referido desconhecido , temos: $x = 18 \text{ Figurinhas} \div 3$ ou $x = \frac{18 \text{ Figurinhas}}{3}$ $x = 6 \text{ Figurinhas}$
↓	⊗ 3 Relação	
x	Figurinhas Hoje Referido desconhecido	

Podemos concluir que, hoje, Tonho tem 6 figurinhas.

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

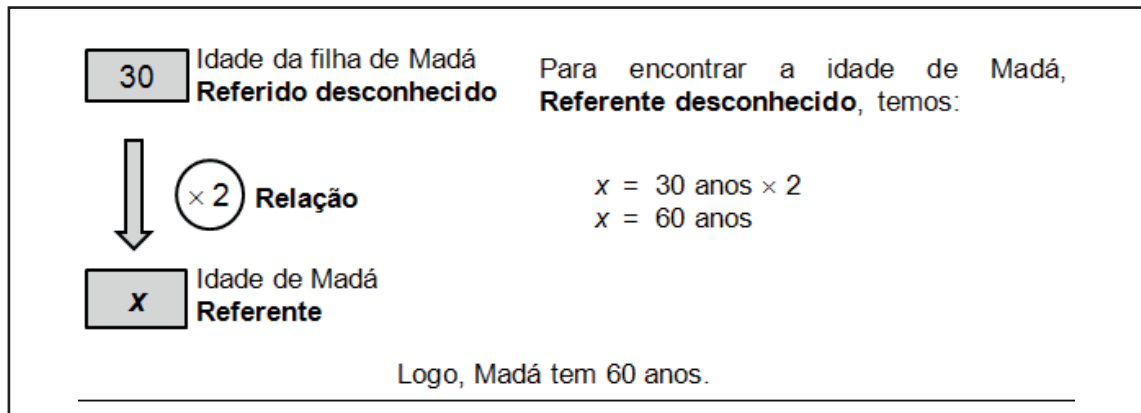
Na situação do Exemplo 12, busca-se a quantidade de figurinhas que Tonho tem hoje (referido desconhecido), a partir da quantidade de figurinhas que Tonho tinha ontem (referente). A relação entre o referente e o referido é de “três vezes menos”. Essa expressão remete-nos a uma redução de quantidades e está representada no quociente entre a medida do Referente e o escalar da Relação (18 figurinhas \div 3 = 6 figurinhas).

O Exemplo 13 é outra situação de Comparação Multiplicativa.

Exemplo 13: A filha de Madá tem 30 anos. Sabendo que a filha é duas vezes mais nova que a mãe, qual a idade de Madá?

Exemplo 13 - Relação ternária, eixo da Comparação Multiplicativa, referente desconhecido.

Figura 1.14 – Proposta de resolução para a situação do Exemplo 13



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Observe, na Figura 1.14, que a idade da filha de Madá é colocada como dependente da idade de Madá. Assim, a idade da mãe constitui-se numa referência (referente desconhecido) para se determinar a idade da filha (referido). A relação indica uma divisão, pois a expressão “duas vezes mais nova” representa que a idade da filha será a metade da idade da mãe. Em sala de aula, é essencial a discussão para a compreensão da relação envolvida na situação e, depois, efetivar a resolução em nível de cálculo numérico.

PRODUTO DE MEDIDAS

A relação ternária do eixo **Produto de Medidas** é composta por duas classes: a Configuração Retangular e a Combinatória. Vergnaud (2014, p. 264) afirma que elas podem envolver uma multiplicação, quando se quer “encontrar a medida-produto, conhecendo-se as medidas elementares” ou uma divisão, quando se procura “as medidas elementares”, conhecendo-se a outra e a medida-produto.

PRODUTO DE MEDIDAS – CONFIGURAÇÃO RETANGULAR

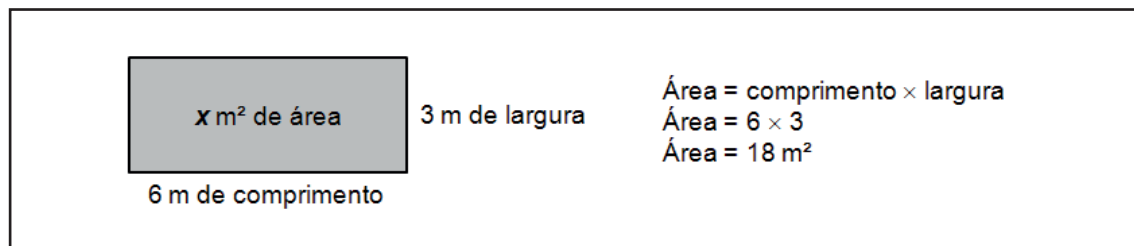
Assumimos que, na **Configuração Retangular**, as medidas referem-se às formas retangulares. A ideia de retangular baseia-se na tabela cartesiana, pois, para Vergnaud (2014, p. 254), “é a noção de produto cartesiano de conjuntos que explica a estrutura do produto de medidas”.

Quando no referimos a grandezas diferentes (comprimento, área, volume), as unidades de medida são distintas para cada uma delas. A unidade de medida de comprimento é o metro – comprimento de um segmento de reta. A unidade de área 1m^2 representa a área de um quadrado com 1 m de lado e não resulta de fazer $1\text{m} \times 1\text{m}$, pois não se podem multiplicar as unidades de grandezas. O mesmo para a unidade de volume – 1m^3 é o volume de um cubo com 1m de aresta. O Exemplo 14 apresenta uma situação da Configuração Retangular.

Exemplo 14: Rute quer mudar o piso do quarto dela. Este quarto tem 3m de largura e 6m de comprimento. Quantos metros quadrados Rute precisa comprar?

Exemplo 14 - Relação Ternária, eixo Produto de Medidas, configuração retangular.

Figura 1.15 – Proposta de resolução para a situação do Exemplo 14



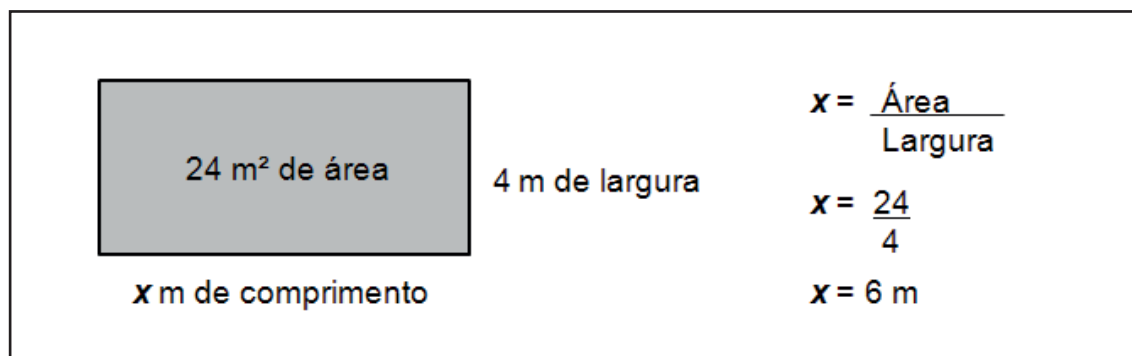
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Observe na Figura 1.15, que se dispõe de duas quantidades (comprimento e largura) e procura uma terceira medida de outra quantidade (área). Nesse caso, o produto entre as medidas lineares (comprimento e largura) resulta na medida da área da superfície. Assim, 6×3 tem como resultado 18, ou seja, a área é de 18m^2 . Vejamos outro exemplo de Configuração Retangular.

Exemplo 15: A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem 24m^2 . A largura é 4m. Qual é o comprimento em metros desse jardim?

Exemplo 15 - Relação ternária, eixo Produto de Medidas, configuração retangular.

Figura 1.16 – Proposta de resolução para a situação do Exemplo 15



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Observe na Figura 1.16 que as medidas apresentadas são: a medida da área, 24 em m^2 (o todo, a medida-produto), a medida da largura, 4 em m (uma das partes) e se deseja encontrar a medida do comprimento (a outra parte). Para isso é necessário recorrer a operação de divisão entre as medidas das grandezas - área e largura - ($24 \div 4 = 6$) para encontrar o resultado.

PRODUTO DE MEDIDAS – COMBINATÓRIA

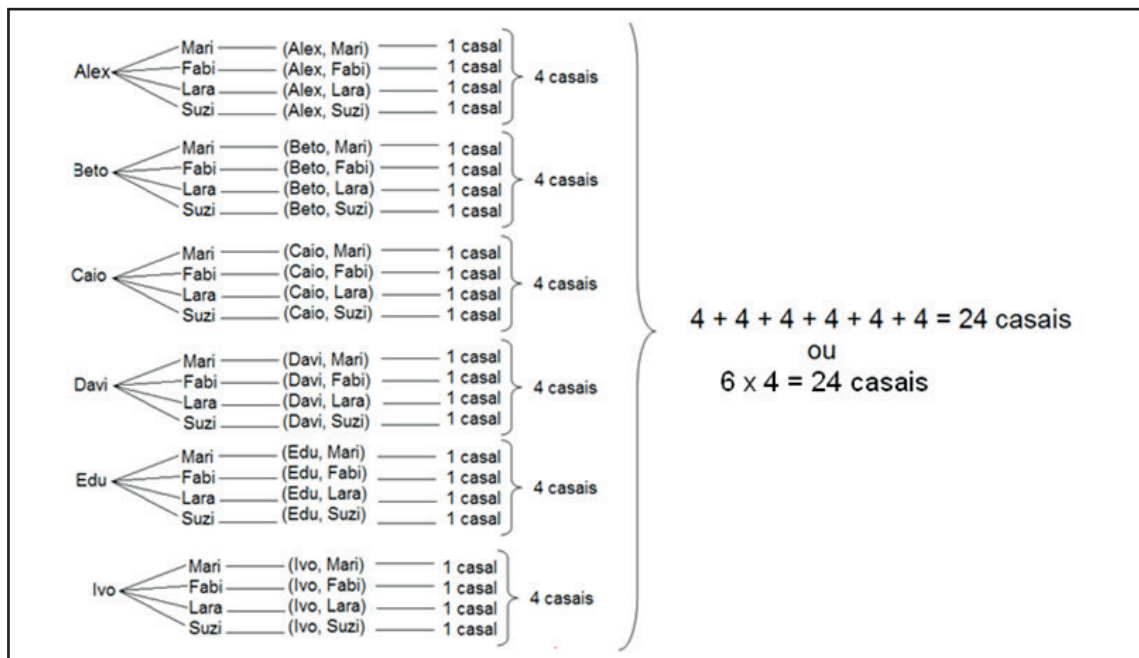
Nas situações de **Combinatória** que envolvem uma relação ternária, é possível fazer o produto entre as quantidades de elementos de dois conjuntos e se determinar a quantidade de elementos de um novo conjunto. Vejamos um exemplo.

Exemplo 16: Na aula de dança de forró tinham 6 rapazes (Alex, Beto, Caio, Davi, Edu, Ivo) e 4 moças (Mari, Fabi, Lara, Suzi). Todas as moças dançaram com todos os rapazes. Quantos casais diferentes foram formados?

A Figura 1.17 mostra uma resolução partindo do diagrama de árvore.

Exemplo 16 - Relação ternária, eixo Produto de Medidas, Combinatória.

Figura 1.17 – Proposta de resolução para a situação do Exemplo 16



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Nessa situação, são apresentadas as partes, o número de rapazes e de moças e busca-se o todo que é a quantidade de casais formados com as duas partes.

É possível que o estudante adicione as quantidades dos conjuntos obtidos pelas combinações entre os seis rapazes e as quatro moças ($4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24$), mas também, é possível que ele opte por efetuar o produto das quantidades correspondentes aos rapazes e às moças, isto é, $6 \text{ rapazes} \times 4 \text{ moças} = 24 \text{ casais}$ diferentes. Vejamos outro exemplo:

Exemplo 17: A lanchonete do Ernani vende 15 tipos de sanduíches. Para cada sanduíche, é usado apenas um tipo de pão e um tipo de recheio. Tem 3 tipos de pão (leite, integral, francês). Quantos tipos de recheio são necessários para fazer todos os tipos de sanduíche?

Exemplo 17 - Relação ternária, eixo Produto de Medidas, Combinatória.

Figura 1.18 – Proposta de resolução para a situação do Exemplo 17

	Pães			
	Leite	Integral	Francês	
R e c h e i o	R ₁	(Leite, R ₁)	(Integral, R ₁)	(Francês, R ₁)
	R ₂	(Leite, R ₂)	(Integral, R ₂)	(Francês, R ₂)
	R ₃	(Leite, R ₃)	(Integral, R ₃)	(Francês, R ₃)
	R ₄	(Leite, R ₄)	(Integral, R ₄)	(Francês, R ₄)
	R ₅	(Leite, R ₅)	(Integral, R ₅)	(Francês, R ₅)
				15 sanduíches

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na situação do Exemplo 17, são dadas as quantidades de tipos de sanduíches (o todo) e os tipos de pães (uma das partes) e, procura-se a quantidade de recheio (a outra parte). Para resolver, efetuamos a divisão entre as grandezas 15 tipos de sanduíches e 3 tipos de pães ($15 \div 3 = 5$). Podemos observar que essa situação é diferente da anterior, pois, para a sua resolução, é utilizado outro raciocínio.

Neste capítulo, abordamos pontos da Teoria dos Campos Conceituais com exemplos de situações do Campo Conceitual Multiplicativo que podem ser trabalhados em sala de aula com os estudantes, cabendo ao professor adaptar essas situações para a realidade de sua sala de aula conforme as compreensões apresentadas pelos estudantes e seus desempenhos de aprendizagem. No capítulo seguinte, apresentaremos o desempenho de estudantes ao resolverem situações do Campo Conceitual Multiplicativo, bem como esquemas de resolução utilizados por eles.

REFERÊNCIAS

LIMA, Débora Cabral. **A formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais e as estruturas multiplicativas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-Ba, 2016.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; MERLINI, Vera Lucia; SANTOS, Aparecido dos. O Raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e Educação** (UNESP. Impresso), v. 20, 2014. p. 517-533.

MORAIS, Maria das Dores de; TELES, Rosinalda Aurora de Melo. Texto 1: Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. In: **Cadernos da TV Escola: Um salto para o futuro**. Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. Ano XXIV-Boletim 8 – set, 2014.

SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos. **Adição e subtração: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante?** Ilhéus: Editus, 2012.

SANTOS, Aparecido dos. **Formação de professores e as estruturas multiplicativas: reflexões teóricas e práticas**. 1. Ed. Curitiba: Appris, 2015.

VERGNAUD, Gérard. Multiply structures. In: RESH, R.; LANDAU, M. (Orgs.). **Acquisitions of mathematics concepts and processes**. New York. Academic Press, 1983.

_____. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

_____. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. In: **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, Editora UFPR, 2011. p. 15-27.

_____. **A Criança, a Matemática e a Realidade**: Problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de: MORO, Maria Lúcia Faria. Edição revisada. Curitiba: Editora da UFPR, 2014.

Eurivalda Santana

Irene Cazorla

2- RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES MULTIPLICATIVAS

Neste capítulo, temos como objetivo apresentar resultados do desempenho dos estudantes do 4º e do 5º ano ao resolverem situações do Campo Conceitual Multiplicativo e discutir a respeito das soluções dadas, assim como as compreensões demonstradas nos seus registros.

2.1 Desempenho Geral

No ano 2014, foi aplicado um instrumento diagnóstico, contendo 13 situações do Campo Conceitual Multiplicativo, com 483 estudantes que estavam cursando o 4º ano e 569 cursando o 5º ano, em 12 escolas participantes da Rede E-Mult.

No Quadro 2.1, constam as 13 situações, nove delas (S1, S2, S3, S5, S7, S9, S10, S11 e S13) já apresentadas no Capítulo I.

Quadro 2.1 – Situações do instrumento diagnóstico

Relação	Eixo	Classe	Enunciado
Quaternária	Proporção Simples	Um para muitos	<p>S1. Joana sabe que em um pacote há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?</p> <p>S4. A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?</p> <p>S8. Um supermercado fez uma promoção: “Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais”. Quanto vai custar cada litro de suco?</p>
		Muitos para muitos	<p>S3. Para fazer 3 fantasias são necessários 5m de tecido. Ana tem 35m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?</p> <p>S6. Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar?</p> <p>S12. Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra o aluno marca 4 pontos. Alex deu 15 voltas correndo na quadra. Quantos pontos ele marcou?</p>
Ternária	Comparação Multiplicativa	Relação desconhecida	<p>S10. Cido tem uma coleção de 6 carrinhos e José tem uma coleção de 24 carrinhos. Quantas vezes a coleção de Cido é menor do que a de José?</p>
		Referido desconhecido	<p>S2. A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?</p> <p>S13. Ontem Tonho tinha 18 figurinhas. E hoje ele tem 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele tem hoje?</p>
	Produto de Medida	Configuração retangular	<p>S5. Rute quer mudar o piso do quarto dela. Este quarto tem 3m de largura e 6m de comprimento. Quantos metros quadrados, de piso, Rute precisa comprar?</p> <p>S7. A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem 24m². A largura é 4m. Qual é comprimento em metros desse jardim?</p>
Combinatória		<p>S11. Na aula de dança de forró tinha 6 rapazes (Alex, Beto, Caio, Davi, Edu, Ivo) e 4 moças (Mari, Fabi, Lara, Suzi). Todas as moças dançaram com todos os rapazes. Quantos casais diferentes foram formados?</p> <p>S9. A Lanchonete do Ernani vende 15 tipos de sanduíches. Para cada sanduíche é usado apenas um tipo de pão e um tipo de recheio. Tem 3 tipos de pão (leite, integral e francês). Quantos tipos de recheio são necessários para fazer todos os tipos de sanduíches?</p>	

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Para observar o desempenho dos estudantes, as respostas dadas foram classificadas como: certa, errada ou em branco. O percentual geral de acertos dos estudantes do 4º ano foi 16,16% e, do 5º ano, 24,48%. Considerando os anos escolares e as operações envolvidas nas situações, esses percentuais podem ser considerados baixos. Para uma visão geral do desempenho por ano escolar, a Tabela 2.1 apresenta os percentuais de acerto por situação do instrumento diagnóstico. Agrupamos as situações por eixo e classe e indicamos a operação esperada para a sua solução.

Tabela 2.1 – Percentual de acertos por situação e ano escolar

Ano	Relação quaternária						Relação Ternária						Total Geral	
	Proporção Simples						Comparação Multiplicativa			Produto de Medida				
	Um para muitos			Muitos para muitos			Relação desconhecida	Referido desconhecido		Configuração retangular	Combinatória			
	S1	S4	S8	S3	S6	S12	S10	S2	S13	S5	S7	S11		S9
4º	52,59	27,12	22,57	7,45	6,00	6,21	3,73	43,27	3,31	22,57	3,11	7,66	4,55	16,16
5º	68,19	40,77	39,89	7,56	11,25	10,90	13,36	60,11	5,45	28,82	6,33	14,76	10,90	24,48

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

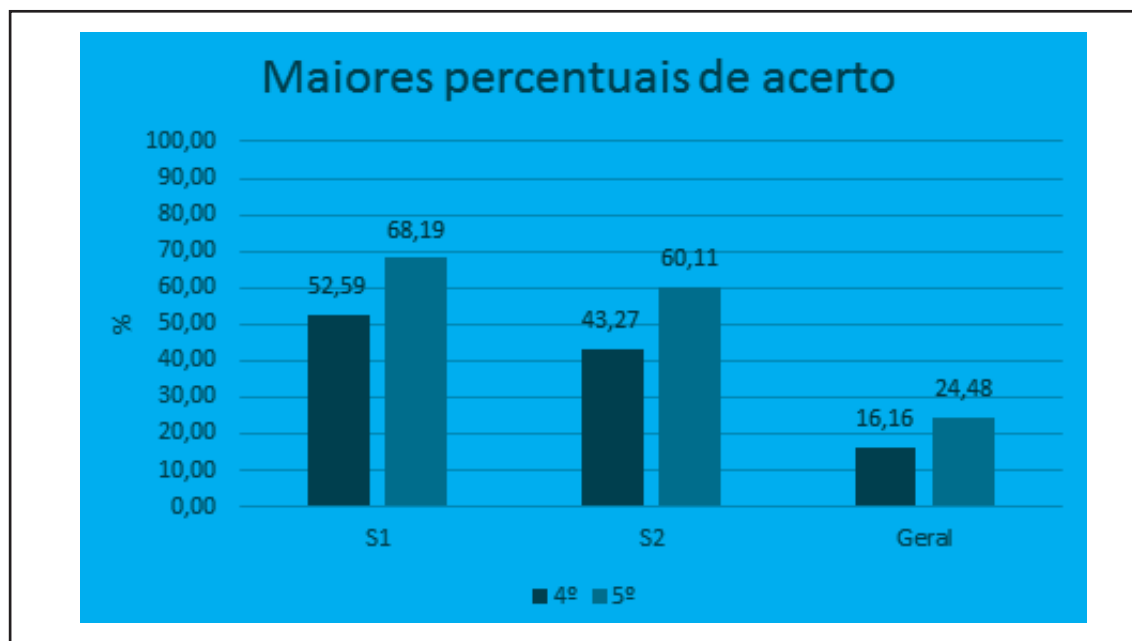
Visando compreender melhor os percentuais da Tabela 2.1, vamos observar o desempenho por ano, eixo e classe (definições apresentadas no Capítulo I), bem como os esquemas de resolução mais utilizados pelos estudantes, nas situações em que foram registrados os maiores e os menores percentuais de acerto. Essa escolha justifica-se para que o professor possa observar com mais detalhes a compreensão dos estudantes nesses dois extremos.

No cômputo geral, os mais altos percentuais de acerto concentraram-se na situação de Proporção Simples um para muitos (S1) e na situação de Comparação Multiplicativa referido desconhecido (S2). Os menores percentuais de acerto ocorreram nas situações de Configuração Retangular (S7) e de Comparação Multiplicativa referido desconhecido (S13). Mas, questionamo-nos: quais operações esperávamos que os estudantes usassem nessas situações?

As situações S1 e S2 poderiam ser resolvidas com a multiplicação e, S7 e S13, com a divisão. Esse mesmo comportamento em relação às operações pode ser observado em todos os eixos. Os estudantes obtiveram maiores percentuais de acerto nas situações em que a operação esperada para a solução era a multiplicação do que nas de divisão, o que nos conduz a inferir que os estudantes do 4º e do 5º ano podem não compreender as situações que envolvem a operação de divisão. Mas, o que não é compreendido pelo estudante? Por que os desempenhos nas situações de divisão não são maiores?

Vamos observar os desempenhos e esquemas utilizados pelos estudantes, para que possamos entender os processos utilizados por eles nas soluções. A Figura 2.1 apresenta os percentuais de acerto das situações com maior desempenho no instrumento em cada ano escolar que ocorreram nas situações S1 e S2.

Figura 2.1 – Percentual de acertos na situação de Proporção Simples um para muitos S1 e na situação de Comparação Multiplicativa referido desconhecido S2



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Os percentuais de acerto em S1 e em S2 são mais altos do que o percentual geral. Sendo que o 5.º ano acerta mais do que o 4.º ano, nas duas situações.

Para compreender melhor os percentuais de desempenho, buscamos observar os esquemas que os estudantes utilizam para resolver as situações. Esse é um ponto importante a ser considerado pelo professor, pois, a partir dessas observações, pode-se tomar decisões sobre como mediar para potencializar a aprendizagem. Por exemplo, o professor pode observar, na resolução, se o estudante:

- 1- consegue interpretar a situação dada;
- 2- usa os elementos que relacionam as quantidades (medida) corretamente;
- 3- usa a operação que era esperada ou usa a operação que é indicada por uma “palavra dica” do enunciado da situação;
- 4- monta corretamente o algoritmo, mas não efetua;
- 5- compreende as trocas e os agrupamentos necessários para resolver a operação;
- 6- compreende o campo numérico ao qual pertencem os números da situação;
- 7- resolve a situação e encontra o valor (medida) correto para responder à situação, mas não responde corretamente.

No terceiro item de observação, acima mencionado, o termo “palavra dica” é usado para fazer referência a palavras ou expressões que parecem indicar a operação a ser realizada. Contudo, nem sempre essa indicação é correta, pois essa palavra é utilizada no enunciado para indicar uma relação entre quantidades e não a operação a ser realizada.

Exemplo 1: Na semana passada, Pedro tinha 36 litros de água mineral. Hoje, ele tem quatro vezes menos. Quantos litros de água mineral Pedro tem hoje?

Nesse exemplo, a “palavra dica” é “vezes menos”. Quando o estudante não compreende que essa expressão indica uma relação, tende a usar a operação que a

palavra indica. No Exemplo 1, a relação entre a quantidade de litros de água mineral em dois momentos distintos é indicada pela expressão “vezes menos”. E, os estudantes, sem compreender essa relação, utilizam a operação de subtração em função do “menos” da expressão.

Uma questão que pode surgir é a seguinte: essas observações podem ser feitas apenas quando as respostas são erradas?

Acreditamos que não. Nas próximas seções, vamos dar exemplos de respostas corretas que nos apontam indicativos de que o estudante, mesmo encontrando a resposta correta, pode ainda não compreender relações e operações matemáticas pertinentes àquela situação. Apresentamos, também, outras situações que ilustram o uso da “palavra dica”.

Outras informações a respeito do desempenho dos estudantes nas 13 situações podem ser encontradas em Santana, Lautert e Castro Filho (2015) e em Santana, Lautert, Castro Filho e Santos (2016).

2.2 Como os estudantes resolvem as situações que têm maiores percentuais de acerto?

Cada pessoa escolhe uma forma de organizar a resolução de uma situação e essa forma tende a não variar quando as situações são de um mesmo tipo. Por exemplo, para contar o total de garrafas que estão em fileira numa caixa, uma pessoa pode contar em quantas linhas e em quantas colunas estão dispostas as garrafas e, em seguida, multiplica essas quantidades. Certamente, essa forma de observar a quantidade total será repetida quando essa pessoa estiver diante de objetos em fileiras. Essa organização da forma de resolver uma situação, que não varia quando nos referimos a situações semelhantes, denominamos esquema.

Vamos observar os esquemas dos estudantes, quando resolvem as situações que tiveram maior percentual de desempenho. Ao resolverem, fazem uso de diferentes representações. Prioritariamente, usam: sistema simbólico (números e operações),

desenhos e listas. A concepção de multiplicação como adição de parcelas iguais é utilizada com frequência pelos estudantes dos dois anos escolares.

A Figura 2.2 apresenta uma resolução da situação S1 feita pelo estudante João¹, de 10 anos de idade, de uma turma do 4.º ano.

Figura 2.2 – Resolução com adição de parcelas iguais, feita por João, do 4º ano, para S1

S1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ \hline 30 \end{array}$$

Resposta: 30

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

João apresenta uma resposta correta para a situação, mas é importante analisar o procedimento que ele utiliza na resolução. Observe que ele repete o seis (quantidade de biscoitos) cinco vezes (quantidade de pacotes) como parcelas de uma operação de adição, coloca o sinal da operação, escreve 30 como total e o repete como resposta. Nessa resolução, João parece compreender a situação, pois usa corretamente as quantidades envolvidas, mas usa a operação de adição ao invés da multiplicação.

Em outras situações do instrumento, João não demonstra compreensão das situações, pois usa a operação de multiplicação ao invés da divisão que era esperada por nós. Contudo, podemos observar, no esquema de João, evidências que parecem

1 Por questões éticas, os nomes utilizados para os estudantes são fictícios.

indicar que ele ainda não compreende com facilidade as ideias de trocas e agrupamentos com a operação de multiplicação. Para observar esse esquema, vejamos a Figura 2.3 com quatro resoluções feitas por João em outras situações do instrumento.

Figura 2.3 – Resoluções de João, do 4º ano, com evidências de não compreensão das trocas e agrupamentos

S3. Para fazer 3 fantasias, são necessários 5m de tecido. Ana tem 35m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 925 \end{array}$$

Resposta: 925

S4. A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

Resposta: 144

S6. Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 3 \\ \hline 45 \end{array}$$

Resposta: 45

S8. Um supermercado fez uma promoção: “Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais”. Quanto vai custar cada litro de suco?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 12 \\ \hline 48 \end{array}$$

Resposta: 48

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Certamente, João não compreende os procedimentos para efetuar a operação de multiplicação, pois arma a operação de multiplicação e não consegue efetuar-la corretamente, deixando, nessas resoluções, evidências de que ele precisa compreender melhor os procedimentos de trocas e agrupamentos. O uso do algoritmo da multiplicação parece ser o esquema mais utilizado por esse estudante quando está confrontado com situações que apresentam relações do Campo Multiplicativo.

Mas, o que o professor precisa fazer diante de esquemas desse tipo? Acreditamos que, quando os estudantes apresentam esse perfil de resolução, é necessária uma mediação do professor para avançar com a compreensão do que são os agrupamentos, as trocas e a técnica para multiplicar.

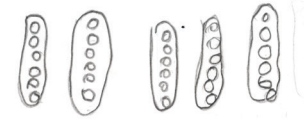
Nos dois anos escolares, os estudantes que determinaram o valor 30 como resposta para S1 usaram a adição repetida, contagem (com palitinhos, bolinhas ou desenhando os biscoitos) ou a multiplicação. Alguns dos estudantes usaram mais de um esquema para resolver a situação. A solução de Rosa, de nove anos, de uma turma do 4º ano e de Ane, de 10 anos, de uma turma do 5º ano (Figura 2.4) ilustram o uso de mais de um esquema.

Figura 2.4 – Resolução de Rosa, do 4º ano, com mais de um esquema para S1

S1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

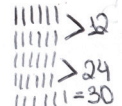
$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 5 \\ \hline 30 \end{array}$$



Resposta: Ela tem 30 Biscoitos

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

$$\begin{array}{l} 6 \times 5 = 30 \\ \text{ou} \\ 5 + 6 = 30 \end{array}$$



Resposta: Joana tem 30 biscoitos

4º ano: Rosa

5º ano: Ane

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Observe, na Figura 2.4, que as estudantes do 4º e do 5º ano usam desenhos e a operação de multiplicação como esquema de solução. Rosa, do 4º ano, arma a operação de multiplicação, na vertical, efetua, faz uso de cinco contornos (quantidade de pacote) para conjuntos de seis círculos (quantidade de biscoito) e responde “Ela tem 30 biscoitos”.

Ane, do 5º ano, arma a operação de multiplicação, na horizontal, faz uso da propriedade comutativa da multiplicação², usa palitinhos em dois agrupamentos de doze e um de seis, adiciona a quantidade anterior, a partir do segundo agrupamento, e responde “Joana tem 30 biscoitos”.

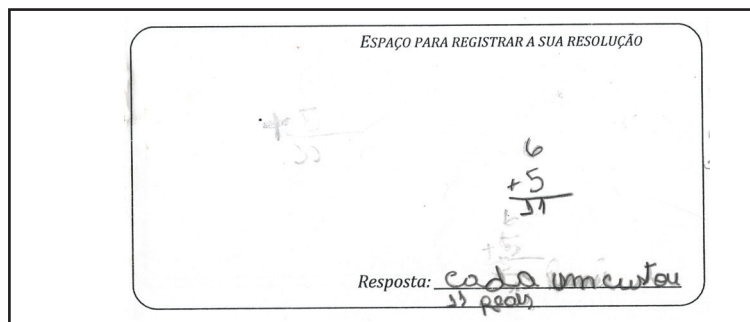
É importante refletir sobre esses procedimentos, pois as estudantes parecem buscar, nos desenhos, a certificação de que a operação feita está correta. Observe que, em ambos os esquemas, a operação é feita na esquerda e o desenho na direita, posição e direção que usamos na escrita convencional para iniciar e finalizar. O professor pode observar, nesse tipo de esquema, a necessidade de mediar as aulas de modo que os estudantes compreendam a operação, dando-lhes mais segurança para escolher a operação e efetuar.

Mesmo na situação em que os estudantes dos dois anos escolares tiveram o melhor desempenho, observamos que há alguns deles que usam a adição demonstrando que ainda não compreendem, com facilidade, as ideias da multiplicação. Vejam a resposta do estudante do 5º ano, Marcus que tinha 13 anos de idade (Figura 2.5).

Figura 2.5 – Resolução de Marcus, do 5º ano, com adição, para S1

S1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?

2 Propriedade comutativa da multiplicação: para dois números reais quaisquer, x e y , a seguinte propriedade é válida: $x \times y = y \times x$. Por exemplo, dados 2 e 3, a igualdade $2 \times 3 = 3 \times 2$ é verdadeira.



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

O estudante Marcus fez a adição da quantidade de biscoitos por pacote (6) com a quantidade de pacotes (5), determinou 11 como o total e formulou a resposta: “cada um custou 11 reais”. Esse esquema indica não compreensão das relações entre as quantidades apresentadas na situação e, conseqüentemente, na escolha da operação. Esse procedimento foi observado, também, na solução de outros estudantes do 4º e do 5º ano.

Ressaltamos que a situação não aborda o valor dos biscoitos, e o estudante, depois de adicionar a quantidade de pacotes com a quantidade de biscoitos (grandezas de naturezas diferentes) refere-se ao valor em reais.

Em resoluções com esse perfil, o professor não pode considerar apenas que estão erradas, mas buscar evidências daquilo que o estudante não compreende para que ele possa planejar atividades no sentido de melhorar sua compreensão.

O segundo melhor percentual de acertos foi na situação Comparação Multiplicativa S2 para os estudantes do 4º e do 5º ano. Essa situação tem, no enunciado, uma expressão que classificamos como “palavra dica”, no caso “vezes mais”. Acreditamos que essa expressão conduza os estudantes ao uso da adição, pois, nessa situação, os estudantes do 4º ano fizeram 171 esquemas explícitos³ e, desses, 22,81% fizeram uso da operação de adição e, no 5º ano, dos 235 esquemas explícitos, 11,06% fizeram uso da operação de adição. Vejamos a Figura 2.6 com exemplo do esquema de estudantes do 4º e do 5º ano.

3 Os esquemas são explícitos quando estão expressos na resolução por meio de registros.

Figura 2.6 – Resolução de Claire, do 4º ano e, de Ane, do 5º ano, para a situação S6

S6. Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

$$\begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ \hline 9 \end{array}$$

Resposta: 9 quilômetros

4º ano: Claire

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

$$5 + 4 = 9$$

Resposta: Adicional a 9 quilômetros

5º ano: Ane

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Claire, do 4º ano, que tinha 10 anos de idade, armou e efetuou a conta de adição na vertical. Ane, que estava cursando o 5º ano, também usou a operação de adição, mas armou na horizontal. Esse tipo de esquema traz indícios de que o estudante não compreende a relação envolvida na situação fazendo uso da palavra dica do enunciado, o que conduz ao erro.

É importante ressaltar que o professor precisa mediar de modo a incentivar a prática de interpretação da situação, antes de efetuar os cálculos, pois a falta de interpretação da situação pode conduzir o estudante à busca de “palavras dica” que deem indicação rápida de qual operação utilizar e, dessa forma, conduzir ao erro.

Ao acertar a situação S2, os estudantes usaram a operação de multiplicação ou desenho representando a distância entre a escola e as casas de Luís e José. Vejamos a resolução da estudante Fabi, do 5º ano, que tinha 11 anos de idade (Figura 2.7).

Figura 2.7 – Resolução de Fabi, do 5º ano, para a situação S2

S2. A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

The image shows a student's handwritten solution for problem S2. At the top, it says "ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO". Below this, there is a multiplication problem:
$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 4 \\ \hline 20 \end{array}$$
 To the right of the multiplication is a drawing of four boxes, each containing two dots, representing the distance of 4 times 5 kilometers. Below the drawing, the student has written "Resposta: distância de 20 quilômetros".

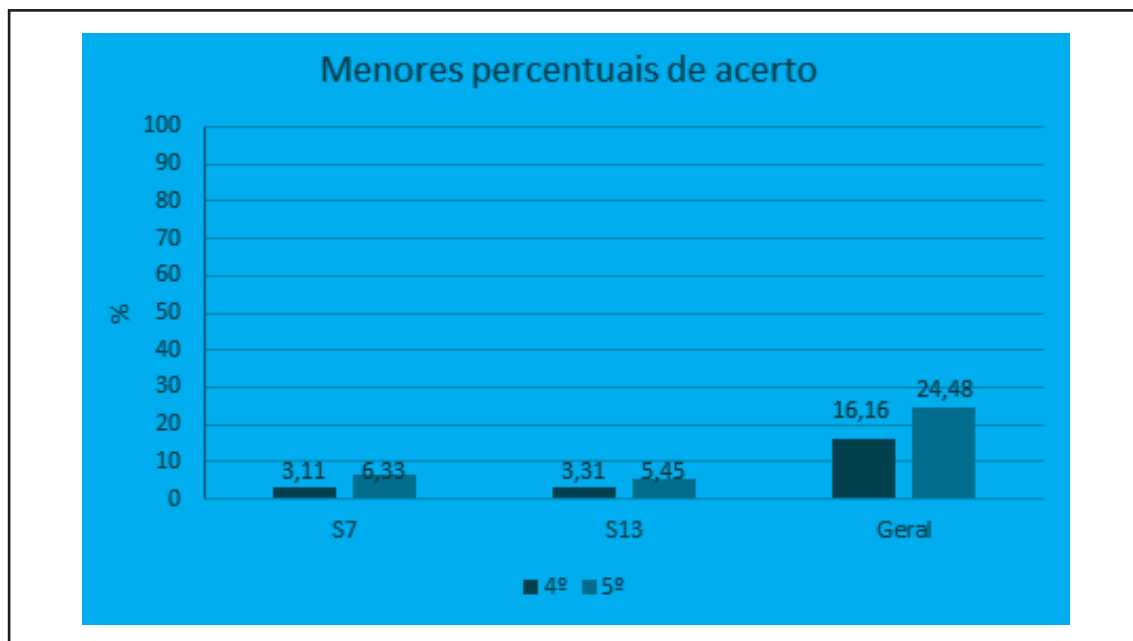
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Fabi arma e efetua corretamente a operação de multiplicação. Contudo, é preciso observar que ela usa bolinhas para representar os quilômetros e, um contorno, para a relação de quatro vezes mais. Diante de resoluções desse tipo, é importante o professor relacionar a solução com as medidas de comprimento e trabalhar em sala de aula as grandezas e medidas, pois, nesse caso, os quilômetros não são grandezas discretas e sim contínuas (ver Capítulo 1). A representação da distância, com bolinhas, também pode dar a ideia de grandeza discreta, representada como unidades inteiras e, isso, não é verdade, pois a distância é contínua.

2.3 Como os estudantes resolvem as situações que têm menores percentuais de acerto?

A Figura 2.8 apresenta os menores percentuais de acerto do instrumento em cada ano escolar, que ocorreram nas situações S7 e S13.

Figura 2.8 – Percentual de acertos na situação de Configuração Retangular S7 e na situação de Comparação Multiplicativa referente desconhecido S13



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Os percentuais de acerto dos dois anos escolares são resultados que podem indicar que os estudantes não conseguem resolver as situações.

E, fica um questionamento: nas situações em que os estudantes apresentaram os menores percentuais de acerto, como são os esquemas que eles utilizaram para resolver? O que esses esquemas podem nos revelar?

Vejamos, S7 é uma situação de Configuração Retangular na qual é dada a medida de uma das partes (largura) e do todo (área) e se pede a medida da outra parte (comprimento). Para a solução, espera-se que o estudante faça uso da operação de divisão. Ao resolvê-la de maneira não correta, eles usam a operação de adição, de multiplicação ou armam a divisão e não conseguem resolver corretamente.

Percebemos que alguns estudantes parecem não compreender a situação, e isso é evidenciado na escolha da operação. Mesmo cursando o 4º ano, não conseguem armar e efetuar uma operação de adição que está no Campo Numérico das dezenas. Observem a solução de Jadson que estava cursando o 4º ano e tinha 10 anos de idade (Figura 2.9).

Figura 2.9 – Resolução de Jadson, do 4º ano, com a operação de adição incorreta para a situação S7

S7. A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem 24m². A largura é 4m. Qual é comprimento em metros desse jardim?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

$$\begin{array}{r} 4 \\ + 24 \\ \hline 30 \end{array}$$

Resposta: 30

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Jadson escolheu a adição, armou colocando a unidade 4 entre a dezena e a unidade da quantidade 24, escreveu 30 como total e o repetiu como resposta para a situação. Para determinar 30 como total, inferimos uma possibilidade de que Jadson tenha adicionado 4+4+2, encontrou 10, colocou o zero como a unidade do total,

adicionou 1+2, colocou 3 na dezena do total e formou o resultado 30. Essa é apenas uma inferência, pois Jadson pode ter usado outro esquema para resolver.

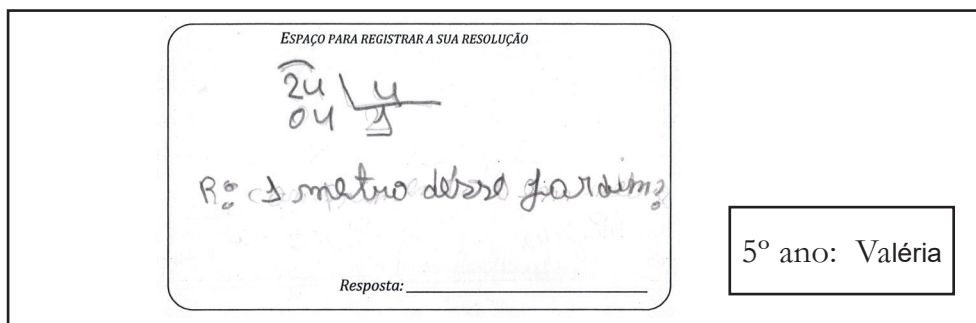
Sem dúvida, o esquema de Jadson nos conduz a afirmar que ele não compreende: a situação dada; como armar e efetuar a operação de adição; como fazer os agrupamentos de unidades e de dezenas necessários para efetuar a operação; o significado dos valores posicionais. Esse tipo de esquema não é esperado para um estudante do 4º ano. Mas, sendo identificado pelo professor, será preciso uma mediação paralela ao desenvolvimento das ações da sala de aula, para que o estudante compreenda as regras básicas do sistema de numeração decimal e como efetuar as operações.

No geral, as resoluções feitas pelos estudantes indicam que eles não compreendem como armar e efetuar as operações. A Figura 2.10 apresenta dois exemplos, o esquema de solução usado por duas estudantes do 5º ano, Keli que tinha 10 anos de idade e Valéria com 13 anos (Figura 2.10).

Figura 2.10 – Resolução de Keli e de Valéria, do 5º ano, para a situação S7

S7. A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem 24m². A largura é 4m. Qual é comprimento em metros desse jardim?

<small>ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO</small>	
$\begin{array}{r} 24 \\ 4 \times \\ \hline 96 \end{array}$ <p>Resposta: <u>96</u> R.96</p>	5º ano: Keli



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Observe, na Figura 2.10, que Keli, mesmo não fazendo uso da operação adequada e não chegando à solução correta, usa a operação de multiplicação e resolve a operação corretamente. Mas, ao armar a operação, coloca a unidade do multiplicador abaixo da dezena do multiplicando e o sinal de multiplicação do lado esquerdo.

A estudante Valéria, Figura 2.10, na sua resolução, escolhe a operação de divisão, monta a operação, mas não a efetua corretamente.

Apesar de Keli escolher a operação incorreta – multiplicação – e efetuar corretamente, outros estudantes não conseguem. Mas, o que eles não conseguem fazer para efetuar a multiplicação?

Pelo que está registrado nos esquemas dos estudantes, eles parecem não compreender as trocas e os agrupamentos necessários para resolver a operação de multiplicação. A Figura 2.11 apresenta a resolução de dois estudantes, do 4º ano, que estavam com 10 anos de idade.

Figura 2.11 – Resolução de Rana e Rosa, do 4º ano, para a situação S7

S7. A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem 24m². A largura é 4m. Qual é comprimento em metros desse jardim?

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

$$\begin{array}{r} 4 \\ 24 \\ \times 4 \\ \hline 86 \end{array}$$

Resposta: o comprimento é 86 largura

4º ano: Rana

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 4 \\ \hline 46 \end{array}$$

Resposta: 46 comprimento

4º ano: Rosa

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

O que queremos ressaltar aqui não é a resposta certa ou errada, mas sim como observar o que está expresso no esquema do estudante, de modo a identificar o que ele compreende e o que não compreende. É claro que esses estudantes parecem não interpretar a situação e as relações envolvidas nas quantidades dadas, pois escolhem a operação de multiplicação ou de adição ao invés da divisão.

Então, Rana (Figura 2.11) multiplica o quatro pela unidade quatro do multiplicando, escreve a unidade seis no produto e, o valor da dezena um, acima da dezena dois do multiplicando. Contudo, ao multiplicar o quatro do multiplicador pelo dois do multiplicando, escreve oito no produto e não agrupa a dezena um que estava anotada acima. Pode ser falta de atenção de Rana, mas também pode indicar que a estudante não compreende como fazer as trocas e os agrupamentos. A aproximação do professor, na sala de aula, para compreender o que realmente acontece, é muito importante. Muitas vezes, uma pergunta feita ao estudante, o faz expressar seu esquema e, uma breve mediação do professor, o auxilia na compreensão.

A estudante Rosa (Figura 2.11) parece ter o mesmo comportamento de Rana, mas, ao multiplicar pela dezena do multiplicando, ela operacionaliza com o valor um, da dezena, que escreveu acima da dezena dois e coloca quatro na dezena do produto. Outro ponto, que o professor pode ajudar o estudante a refletir, é a respeito do resultado encontrado. No exemplo do esquema de Rosa, mesmo o resultado estando incorreto, o professor pode aproveitar para motivá-la a refletir sobre a resposta dada. Observe que, ao multiplicar por quatro, o produto teria que quadruplicar e, o produto encontrado por Rosa, não chega ao dobro de 24.

O que percebemos nos esquemas dos estudantes ao resolverem a situação de Comparação Multiplicativa com referente desconhecido?

Em S7, também, é esperado que o estudante use uma divisão para resolver a situação, mas, tanto os do 4º ano como os do 5º, parecem não compreender a situação e escolhem a adição, a multiplicação e a subtração para solucionar a situação.

Aparentemente, os estudantes são motivados a escolher a subtração em função da “palavra dica” “vezes menos”. Observem que Vitor demonstrou uma não compreensão no agrupamento de uma multiplicação (S7), escolheu a operação de subtração e grifou, no enunciado, a palavra “menos”, dando evidência de que a escolha da operação pode ter sido motivada pela presença dessa palavra no enunciado. Vejamos, na Figura 2.12, a solução dada por Vitor.

Figura 2.12 – Resolução de Vitor, do 4º ano, com uso da “palavra dica” para a situação S13

ESPAÇO PARA REGISTRAR A SUA RESOLUÇÃO

$$\begin{array}{r} - 48 \\ \underline{33} \\ 15 \end{array}$$

Resposta: 15

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

A não compreensão de uma situação pode ser sanada quando o estudante é motivado a interpretá-la. Fazer a leitura da situação, pausadamente, sem necessariamente fazer entonações mais fortes nas “palavras dicas”, buscar a interpretação da situação para, em seguida, fazer a escolha da operação. Esse é um caminho que sugerimos e já utilizamos no ensino com estudantes dessa faixa etária, tendo bons resultados, pois os estudantes passam a ter mais preocupação e atenção para interpretar a situação e, depois, efetuar os cálculos.

Salientamos que é importante confrontar os estudantes com situações que usam as “palavras dica”, constituindo-se num momento oportuno para discussão e interpretação do significado dessas expressões na situação.

2.4 O que podemos levar para a prática da sala de aula?

O desempenho dos estudantes nos dois anos (4º e 5º anos) ficam aquém do que era esperado pelos pesquisadores e professores. Diante disso, resolvemos analisar os esquemas dos estudantes com o objetivo de identificá-los e compreendê-los.

Os esquemas utilizados por estudantes, dos dois anos, evidenciam que eles parecem ainda não compreender como: interpretar as situações; lidar com relações que envolvem as quantidades numéricas; armar e efetuar as operações fundamentais; fazer trocas e agrupamentos; operar com os valores posicionais dos números usando as regras do Sistema de Numeração Decimal.

Ao analisarmos o desempenho agrupando as situações pelas operações que as envolvem, podemos afirmar que, quando se espera o uso da operação de divisão, as compreensões são mais comprometidas do que com a operação de multiplicação. Isso não se refere apenas à escolha da operação, mas sobre como se utiliza as regras do algoritmo para efetuá-las. A escolha errada da operação nos remete à adição e à subtração, pois, ao fazer essa escolha, são essas as operações mais utilizadas. Estudantes desses dois anos armam essas operações de modo incorreto e fazem os agrupamentos e as trocas com erro, fato que demonstra a necessidade de se planejar

atividades a serem desenvolvidas em sala de aula de modo a desenvolver as compreensões dos estudantes e fundamentar esse trabalho, também, na compreensão das regras do Sistema de Numeração Decimal, pois aparecem lacunas conceituais a respeito de regras básicas, como, por exemplo, o valor posicional dos números.

Fazer esse trabalho em sala de aula, não significa parar com o desenvolvimento dos conteúdos para abordar apenas as operações de adição e de subtração.

Essas operações podem ser trabalhadas junto com os demais conteúdos dos eixos: Grandezas e Medidas, Tratamento da Informação, Geometria e Pensamento Algébrico. É preciso planejar as atividades de modo a contemplar a amplitude das possibilidades didático-pedagógicas.

No que se refere ao trabalho com os conceitos do Campo Multiplicativo, é preciso oportunizar o trabalho com as diferentes classes e eixos (definições dadas no Capítulo I) de modo que se amplie a compreensão das relações possíveis que envolvem a operação de multiplicação e de divisão.

Diante dos resultados obtidos, foi proposto e realizado, no ano letivo de 2015, um processo formativo nas escolas. No próximo capítulo, disponibilizaremos situações elaboradas pelos professores e as principais impressões dos professores sobre todo o processo.

REFERÊNCIAS

SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos; LAUTERT, Sintria Labres; CASTRO FILHO, José Aires de; SANTOS, Ernani Martins. Observatório da Educação em Rede: as Estruturas Multiplicativas e a Formação Continuada. **Revista Educação Matemática em Foco**. 5(01), 77-96, 2016.

SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos; LAUTERT, Sintria Labres; CASTRO FILHO, José Aires de. Observatório da Educação em rede e as estruturas multiplicativas a educação básica. In: Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4º, 2015, Ilhéus, **Anais...**, Ilhéus, Bahia, Brasil. p.3357-3368.

Eurivalda Santana

Vera Merlini

Luana Almeida

Pedro Milagre

3 - EXPERIÊNCIAS VIVENCIADAS POR PROFESSORES

Este capítulo objetiva apresentar as situações elaboradas e aplicadas pelos professores nas salas de aula do 4º e do 5º ano das 11 escolas que participaram do processo formativo, no ano 2015. O capítulo visa, também, elencar as memórias de professores a respeito do processo formativo que participaram.

Inicialmente, apresentamos e discutimos esquemas de resolução para situações que foram elaboradas no âmbito do grupo colaborativo, formado por professores, pesquisadores e estudantes de graduação e pós-graduação, durante o processo formativo. No Apêndice A, apresentamos situações elaboradas e aplicadas pelos professores e, que não foram discutidas ao longo do capítulo. Com esse apêndice, objetivamos apresentar outras situações não analisadas no capítulo e acreditamos que elas possam ser experimentadas em outras salas de aula.

No processo formativo ocorrido no ano letivo de 2015, os professores elaboraram e aplicaram situações do Campo Conceitual Multiplicativo. Esse processo

oportunizou que os professores pudessem compreender os conceitos envolvidos, discutir a elaboração de situações, compreender os esquemas dos estudantes e trocar experiências no grupo colaborativo.

No fim do capítulo, apresentamos memórias de professoras participantes de todo o processo formativo que demarcam suas experiências durante e após o processo formativo.

O Quadro 3.1 apresenta o nome dos professores que participaram ativamente do processo formativo e atuavam no 4º. ou no 5º. ano do ensino fundamental.

Quadro 3.1 – Professores do 4º. e 5º. anos que participaram do processo formativo da Rede E-Mult

ESTADO	MUNICÍPIO	ANO ESCOLAR	PROFESSORES
Bahia	Ilhéus	4º	Deusdete Luiz da Silva Filho
			Tatiane da Silva Santiago
		5º	Luzinete Silva de Carvalho
			Normajara O. Nascimento
	São José da Vitória	4º	Givaldo de Araujo
			Juliana Corrêa
			Luciana Santos de Souza Silva
			Rosilene de Jesus Leal
		5º	Alda Nara Ferreira de Alencar
			Rosineide Costa Macedo
			Silbene Avila da Costa

Ceará	Barreira	4º	Ana Sílvia Castro de Souza Bezerra
		5º	Israel de Oliveira Varelo
	São Gonçalo do Amarante	5º	Pedro Messias da Silva Neto
	Fortaleza	4º	Sandra Lúcia Oliveira Gomes
		5º	Simone Soares de Moraes
Pernambuco	Recife	4º	Carla Cristina de Moura Cabral
			Juliana Dias Sebastião
			Kelly Barbosa de Oliveira Miranda
			Silvana Barbosa Ferreira
			Taciana de Souza Couto
			Valdenice Leitão
	5º	Maria de Fátima Lira B. dos Santos	

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Esses 23 professores atuavam no 4º ou no 5º ano, distribuídos em seis escolas públicas distintas. Embora cada escola tivesse a sua especificidade, a vertente do planejamento, da realização das ações pautadas nesse planejamento, das reflexões feitas a partir dos resultados das ações em sala de aula e o do referencial teórico (Teoria dos Campos Conceituais) constituíram os pontos basilares para a realização de cada processo formativo. A seguir, discutiremos situações elaboradas e aplicadas pelos professores.

3.1 TAREFAS ELABORADAS PELOS PROFESSORES DO 4º E 5º ANOS

As situações, aqui apresentadas, referem-se ao Campo Conceitual Multiplicativo e foram elaboradas pelos professores que lecionavam no 4º ou 5º ano. As relações

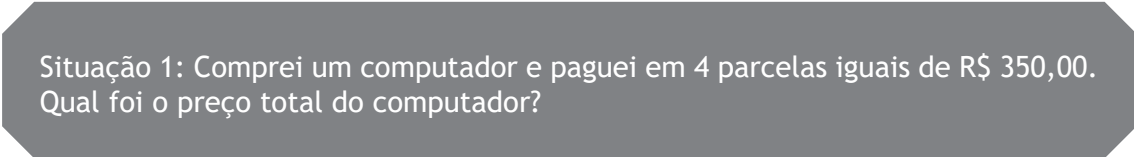
estudadas durante o processo formativo consistiram em quaternária do eixo Proporção Simples e ternária, nos eixos Comparação Multiplicativa e Produto de Medidas. Apresentamos considerações feitas pelos próprios professores após a aplicação na sua sala de aula e os esquemas utilizados pelos estudantes na resolução dessas situações.

3.1.1 Proporção Simples

Das três situações apresentadas, a seguir, as situações 1 e 3 foram elaboradas e aplicadas por professores que atuavam no 4º ano e, a situação 2, pelos que atuavam no 4º e no 5º ano.

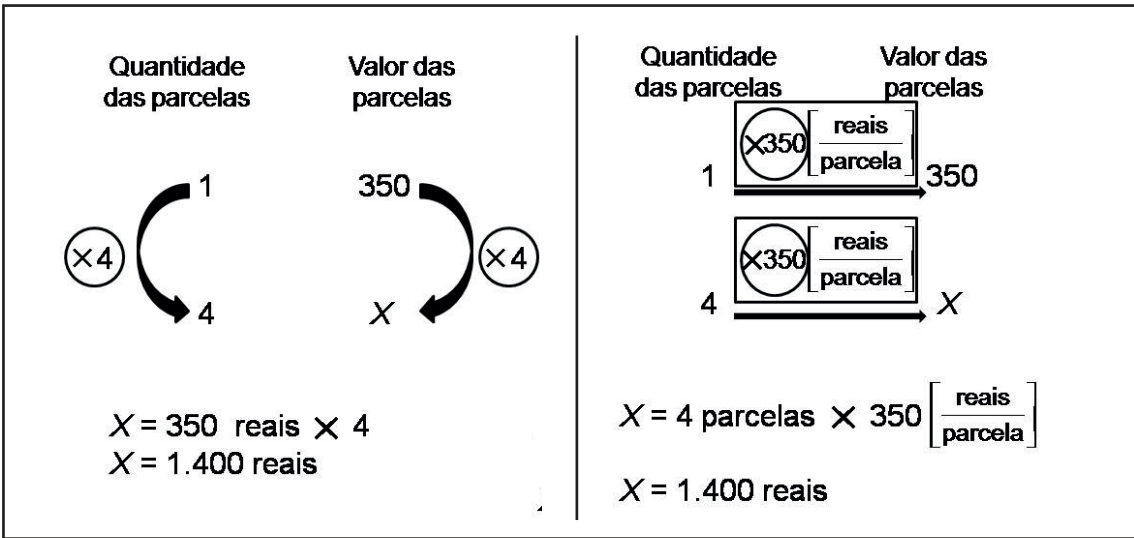
3.1.1.1 Proporção Simples um para muitos

A Situação 1 envolve uma relação quaternária, do eixo de Proporção Simples, classe um para muitos, sendo que a operação mais indicada para sua resolução é a multiplicação. Observe como ficam os esquemas de resolução com o operador escalar e com o operador funcional.



Situação 1: Comprei um computador e paguei em 4 parcelas iguais de R\$ 350,00. Qual foi o preço total do computador?

Figura 3.1 – Proposta de resolução da Situação 1 com o operador escalar e o operador funcional



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

De acordo com o esquema de resolução apresentado na Figura 3.1, a situação 1 pode ser resolvida por meio do operador escalar, que é determinado pela relação entre as quantidades de parcelas. Multiplicando a quantidade unitária da parcela pelo operador escalar (4) obtém-se a quantidade total de quatro parcelas. Para manter a proporcionalidade, aplica-se o mesmo operador escalar (4) na grandeza valor das parcelas, multiplica-se o operador escalar pelo valor de uma parcela (R\$350,00) e obtém-se o valor total do computador (R\$1.400,00). Quando, numa grandeza, as medidas são alteradas pela multiplicação (ou divisão) de um operador escalar, para manter a proporcionalidade, esse mesmo operador deve ser utilizado para alterar a medida da outra grandeza.

Ao utilizar o operador funcional, 350,00 reais por parcela, é o valor que permite passar da quantidade de uma parcela para o seu o valor (indicado na flecha superior horizontal) e, para manter a proporcionalidade, multiplica-se a quantidade total de quatro parcelas pelo operador funcional (350,00 reais por parcela), determinando o valor total do computador (R\$1.400,00).

Comentários sobre a aplicação da situação 1 em sala de aula:

A Situação 1 foi apresentada a 93 estudantes do 4º ano. Em algumas salas de aula, a situação foi escrita na lousa e, em outras, entregue numa folha impressa. Os professores solicitaram que os estudantes resolvessem a situação, sem dar nenhuma explicação prévia dela. No fim, verificou-se que 48 estudantes (51,7%) responderam corretamente, o que significa que 48,3% das respostas estavam erradas. Considerando o eixo, a classe e a operação envolvida nessa situação, o percentual de respostas erradas foi alto para os estudantes do 4º ano.

Os professores observaram os esquemas de resolução dos estudantes e verificaram que correspondiam ao uso do algoritmo da adição, multiplicação e divisão e, também, ao uso de desenhos.

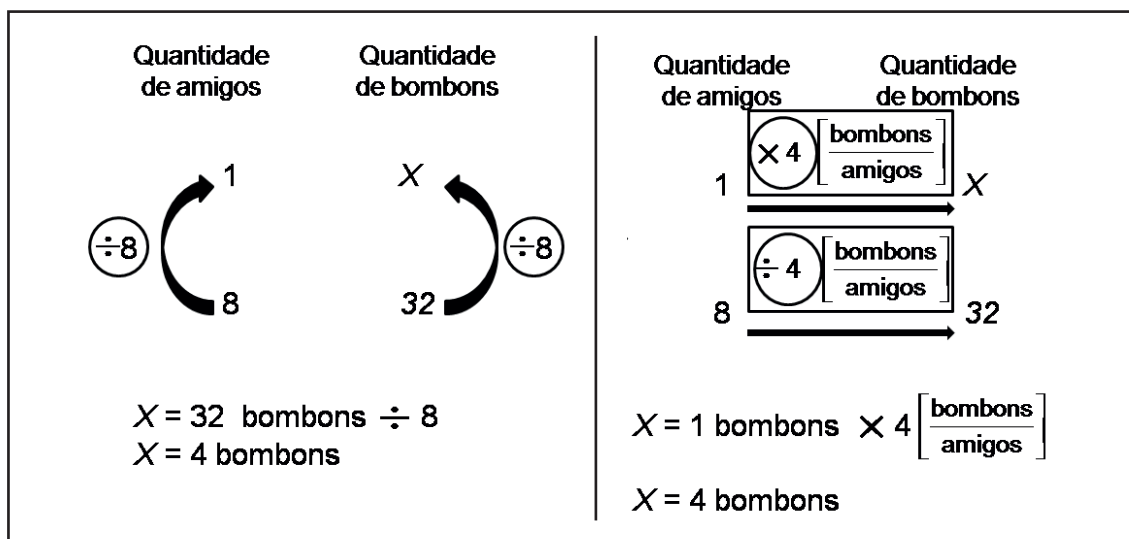
Os erros foram identificados na dificuldade de interpretação e em diferenciar os sinais das operações. Para trabalhar os erros e as dificuldades, os professores utilizaram a leitura com interpretação das relações estabelecidas na situação e trabalharam com a tabuada.

Os professores classificaram essa atividade como boa porque perceberam que os estudantes passaram a dar mais atenção à necessidade de interpretar a situação antes de fazer a operação.

A Situação 2 envolve uma relação quaternária, do eixo Proporção Simples, classe um para muitos. Como a situação requer uma distribuição equitativa de 32 bombons para oito amigos, a operação mais indicada é a divisão, denominada como divisão por partição. Observe como ficam os esquemas de resolução da Situação 2, ao utilizar os operadores.

Situação 2: Maria tem 32 bombons para distribuir igualmente entre 8 amigos. Quantos bombons cada amigo receberá?

Figura 3.2 – Proposta de resolução da Situação 2 com o operador escalar e o operador funcional



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Pelo esquema mostrado na Figura 3.2, a Situação 2 pode ser resolvida por meio do operador escalar, obtido na grandeza quantidade de amigos, dividindo-se a quantidade total de oito amigos pelo escalar oito, resultando em um. Para manter a proporcionalidade, esse mesmo escalar deve ser utilizado na grandeza quantidade de bombons, obtendo-se a quantidade de bombons por amigo.

O operador funcional é encontrado dividindo-se a quantidade de 32 bombons pela quantidade de oito amigos (ver a flecha inferior horizontal). O resultado dessa divisão é o valor do operador funcional (quatro bombons por amigo). Esse operador funcional deve ser utilizado com a operação inversa para relacionar um amigo com a quantidade de bombons. Assim, multiplica-se a quantidade de um amigo pelo operador funcional, determinando a quantidade de bombons para um amigo.

Comentários sobre a aplicação da Situação 2 em sala de aula:

A Situação 2 foi elaborada e aplicada por professores que atuavam no 4º e no 5º ano. No 4º ano, 28 estudantes responderam, sendo que 16 acertaram; no 5º ano, 16 estudantes responderam e 11 deles acertaram. O percentual de acertos do 5º ano foi maior que o do 4º ano, o que já era esperado pelos professores.

Em sala de aula, os professores proporcionaram a realização das seguintes ações: 1) entregar (impresa ou escrita na lousa) a situação para os estudantes; 2) aguardar os estudantes resolverem sem fazer intervenção; 3) observar as respostas e as resoluções dos estudantes; 4) dividir os estudantes em grupos para que eles socializassem as respostas e a professora iria passando em cada grupo fazendo questionamentos sobre os esquemas adotados por eles; 5) convidar cada grupo para apresentar a sua resolução na lousa; 6) discutir com toda a turma sobre as resoluções dadas.

Os professores observaram que os estudantes do 4º ano responderam utilizando a adição, multiplicação, divisão e os desenhos. Os estudantes do 5º ano responderam utilizando operações de adição, multiplicação e divisão e não fizeram uso de desenhos. Nos dois anos escolares, foi observada a dificuldade de interpretação, da escolha da operação correta e para efetuar as operações.

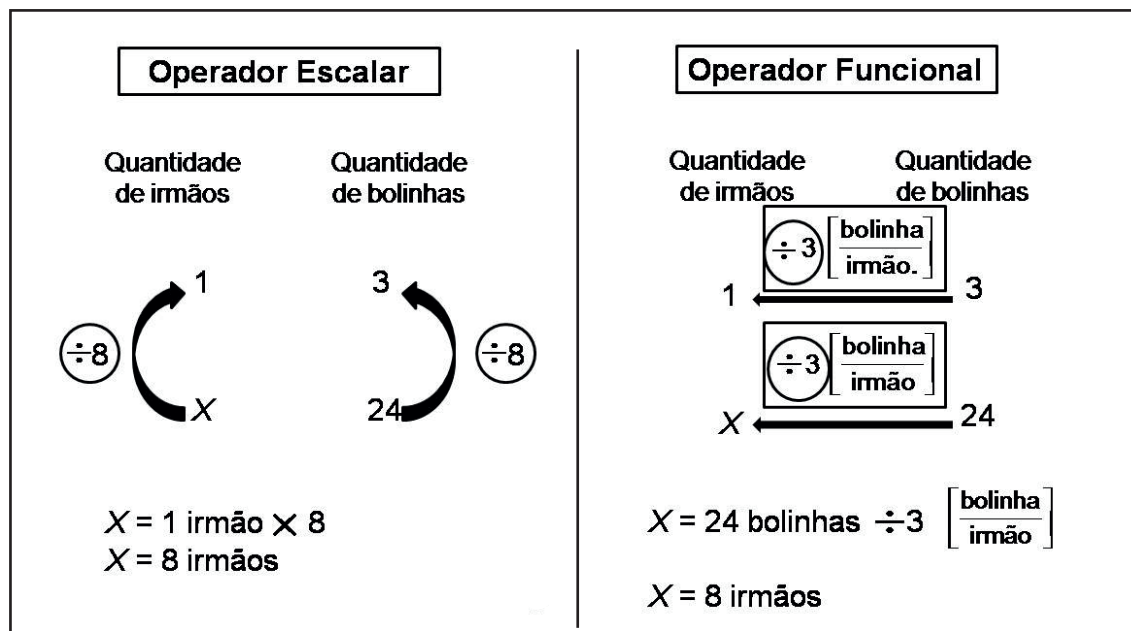
Durante a socialização em grupo, os professores colocaram questionamentos para que os estudantes observassem o operador escalar na grandeza quantidade de amigos e a forma como esse operador também influenciava a outra grandeza. Nos dois anos escolares, a estratégia de socialização em grupo e com a turma toda teve bons resultados.

Os professores classificaram essa atividade como boa, porque levou o estudante a fazer interpretação e socializar as resoluções.

A Situação 3 envolve uma relação quaternária, do eixo proporção simples, classe um para muitos, requer uma distribuição equitativa de 24 bolinhas, na qual, é dado que cada irmão vai receber três bolinhas e pergunta pela quantidade de irmãos. Portanto, é preciso realizar uma operação de divisão, denominada divisão por quota. Observe, na Figura 3.3, os esquemas de resolução com o uso dos operadores para essa situação:

Situação 3: Carlos tem 24 bolinhas para dividir entre os seus irmãos. Cada um receberá 3 bolinhas. Quantos irmãos Carlos têm?

Figura 3.3 – Proposta de resolução da Situação 3 com o operador escalar e o operador funcional



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Se analisarmos utilizando o operador escalar, na grandeza quantidade de bolinhas, dividindo a quantidade total de 24 bolinhas pelo operador escalar oito,

obtemos a quantidade de três bolinhas para um irmão. Para manter a proporcionalidade, aplicamos o mesmo operador escalar na grandeza quantidade de irmãos, contudo, de maneira inversa, multiplicando esse operador escalar pela quantidade unitária (um irmão) e determinando a quantidade total de oito irmãos. É possível, também, usar o operador para se definir o total de irmãos, questionando: qual quantidade devo dividir pelo escalar oito para obter um.

Com o operador escalar funcional, flechas horizontais (Figura 3.3), parte-se da quantidade de três bolinhas para a quantidade de um irmão; na flecha superior, é possível identificar que o operador funcional é de três bolinhas por irmão. Para manter a proporcionalidade, o mesmo operador funcional deve ser utilizado na flecha inferior, determinando a quantidade de irmãos de Carlos. Observe que as relações envolvidas na Situação 3 (divisão por quota) são mais complexas do que as relações envolvidas nas Situações 1 e 2.

Comentários sobre a aplicação da Situação 3 em sala de aula:

No total, 41 estudantes do 4º ano responderam à Situação 3, sendo que seis estudantes acertaram, o que corresponde a 14,6% de acertos.

Depois de disponibilizar a Situação 3 e aguardar a resolução pelos estudantes, os professores observaram que eles utilizaram os esquemas com adição, multiplicação, divisão e desenhos.

Nas respostas erradas, foi observada a dificuldade na interpretação e no efetuar das operações.

Para trabalhar com a dificuldade de interpretação, foi feito o uso do operador escalar, sendo elaboradas perguntas para que a resolução fosse construída na discussão por todos.

Os professores classificaram essa atividade como boa, porque levou os estudantes a usarem o raciocínio numa discussão socializada por todos.

Selecionamos essas três situações de proporção simples um para muitos, para serem discutidas aqui, pois, a partir delas, é possível observar que, mesmo estando no mesmo eixo e na mesma classe, as situações são diferentes, pois, referem-se a diferentes relações e operações a serem utilizadas. As demais situações desse eixo e dessa classe, que foram elaboradas e aplicadas pelos professores em sala de aula, estão disponibilizadas no Apêndice A.

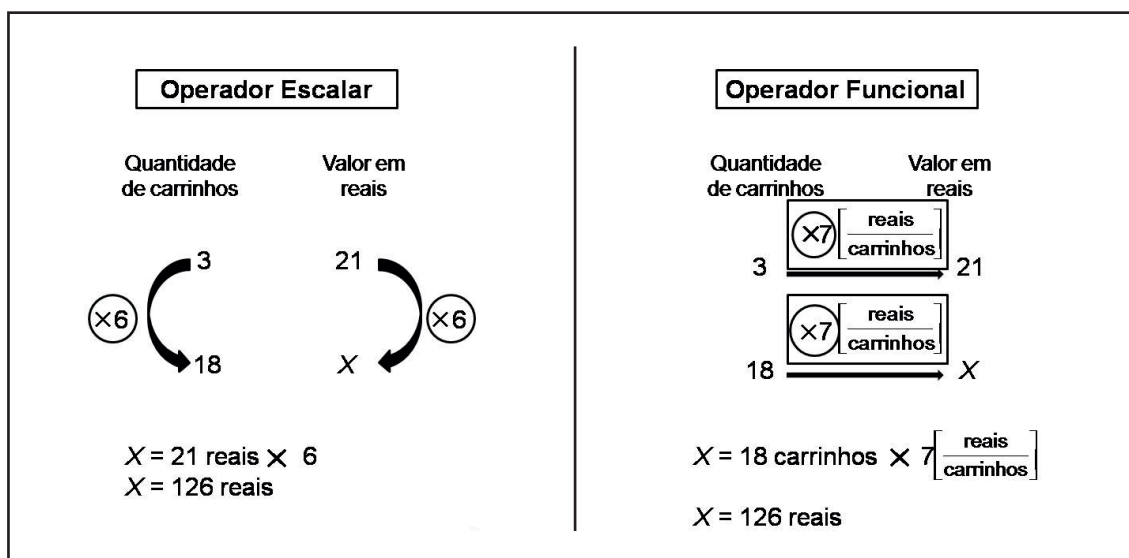
3.1.1.2 Proporção Simples muitos para muitos

As Situações 4 e 5 envolvem a relação quaternária, do eixo de Proporção Simples, classe muitos para muitos. Para sua resolução, espera-se o uso da multiplicação e da divisão. Essas situações foram elaboradas e aplicadas por professores que atuavam no 5º ano.

Situação 4: Alan comprou 3 carrinhos por 21 reais. Se ele comprasse 18 carrinhos, dos mesmos, quanto ele pagaria?

Observe, na Figura 3.4, como fica o esquema de resolução usando o operador escalar e o operador funcional:

Figura 3.4 – Proposta de resolução da Situação 4 com o operador escalar e o operador funcional



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Para saber o valor do operador escalar, a quantidade de dezoito carrinhos foi dividida pela quantidade de três carrinhos, encontrando-se seis. Se a quantidade aumentou em seis vezes e as grandezas são proporcionais, esse mesmo operador escalar é utilizado para determinar a quantidade em reais para comprar os 18 carrinhos.

Se analisarmos utilizando o operador funcional (flecha superior na Figura 3.4), partindo da quantidade de três carrinhos, é possível identificar que o operador funcional é 7,00 reais por carrinho. Para manter a proporcionalidade, o mesmo operador funcional deve ser utilizado para determinar o valor de 18 carrinhos em reais.

A Figura 3.5 apresenta a solução dada por uma estudante do 5º ano que utilizou a ideia do operador escalar.

Figura 3.5 – Esquema de resolução da estudante Cristina¹

Handwritten work by student Cristina. On the left, it says "carrinhos" with a vertical multiplication of 3 by 6, resulting in 18. On the right, it says "Reais" with a vertical multiplication of 21 by 6, resulting in 126. Below these calculations, it says "Resposta: ele pagaria 126 reais".

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Cristina usou o esquema com o operador escalar. Possivelmente, ela determinou com a operação de divisão $18 \div 3$, que está implícita, o valor do operador escalar (seis), depois armou e efetuou a operação de multiplicação para determinar o valor em reais que seria pago pela compra de 18 carrinhos. Ela parece compreender a situação, pois relaciona corretamente as quantidades dadas e o operador escalar. Acreditamos que o esquema de resolução auxiliou a estudante a compreender melhor as relações envolvidas na situação.

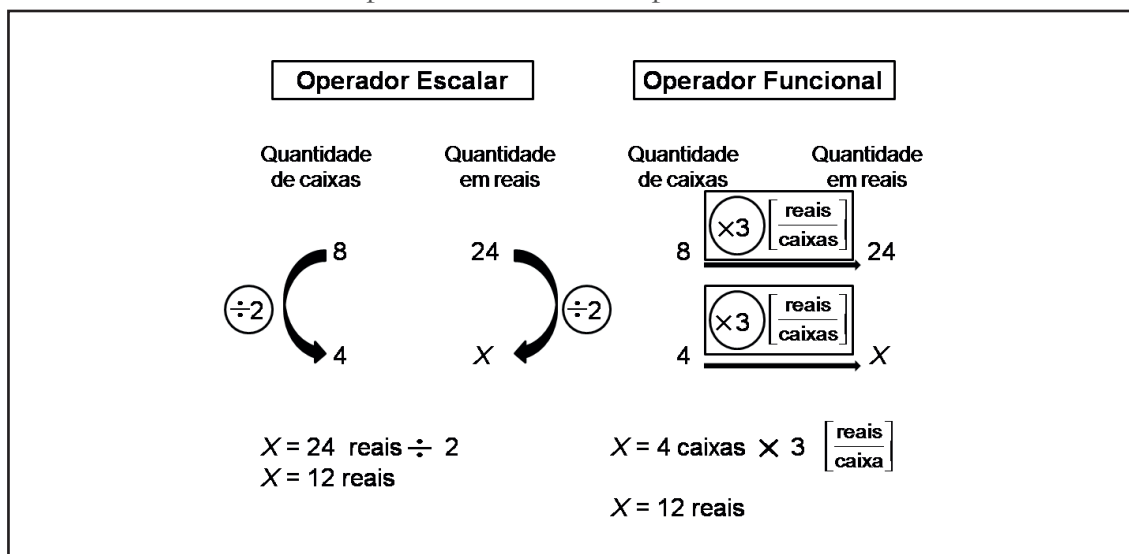
Na Situação 4, parte-se da quantidade em reais de três carrinhos e busca-se o valor em reais de 18 carrinhos. Na Situação 5, parte-se de uma quantidade maior e busca-se uma quantidade menor.

Situação 5: Paloma comprou 8 caixas de bombons por 24 reais, se ela comprasse 4 caixas de bombons, das mesmas, quanto ela pagaria?

Observe como fica o esquema de resolução para a Situação 5, usando o operador funcional e o operador escalar.

¹ Para preservar a identidade dos estudantes, utilizamos nomes fictícios.

Figura 3.6 – Proposta de resolução da Situação 5 com o operador escalar e o operador funcional



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na grandeza quantidade de caixas, obtêm-se o dois como operador escalar e aplica-se esse mesmo operador na grandeza quantidade em reais, ficando determinado que, para a compra de quatro caixas, seriam pagos R\$12,00.

Para saber o operador funcional entre a quantidade de reais e a quantidade de caixas, divide-se R\$ 24,00 pagos por oito caixas pela quantidade de oito caixas e encontra-se a relação R\$ 3,00 por caixa (flecha superior, Figura 3.6). Esse mesmo operador é utilizado para determinar a quantidade em reais para a compra das quatro caixas.

A Figura 3.7 apresenta a solução dada pela estudante Bia, do 5º ano, que utilizou a ideia do operador funcional.

Figura 3.7 – Esquema de resolução da estudante Bia

CAIXAS DE BOMBONS quanto ela pagaria:

<p>reais S.M \downarrow caixas de bombons $24 \div 8 = 3 \leftarrow$ reais $3 \times 4 = 12$</p>	<p>Calcula</p> $\begin{array}{r} 24 \overline{) 18} \\ 0 \\ \hline \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \times 3 \\ \hline 12 \end{array} \right.$ <p style="text-align: right;">✓</p>
--	--

Resposta: Minelle pagaria R\$ 12,00

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Bia determinou o valor de uma caixa de bombons e depois multiplicou esse valor pela quantidade de caixas que a situação pedia. Assim, ela recorreu à ideia do operador funcional, descobrindo o valor de uma caixa de bombons, para depois determinar o valor das quatro caixas. A solução dada por Bia mostra que as relações matemáticas que sustentam o operador funcional podem ser utilizadas por estudantes desse ano escolar, mesmo sem serem abordadas, formalmente, as definições matemáticas, mas explorando as ideias envolvidas nas relações.

Comentários sobre a aplicação das situações 4 e 5 em sala de aula:

As situações foram disponibilizadas para algumas turmas na forma impressa e, em outras, copiadas na lousa. Em ambas as formas de disponibilização, os professores aguardaram os estudantes resolverem, sem fazer interferência e observando as resoluções que estavam sendo feitas por eles. Assim, perceberam o uso de adição de parcelas iguais, multiplicação, divisão, desenhos, operador escalar e operador funcional.

Nas respostas erradas, foram observadas dificuldades de interpretação das relações estabelecidas nas situações, de utilização dos esquemas com o operador escalar e com o operador funcional, ao montar a operação de multiplicação e de divisão, bem como ao efetuar essas operações.

Ao trabalhar com as dificuldades, os erros foram socializados e discutidos pela turma focando na compreensão das possibilidades de resolução. Em outro momento, foi feita uma intervenção aplicando outras situações (disponíveis no Apêndice A).

Os professores classificaram essa atividade como boa, pois, apesar das dificuldades, percebeu-se a vontade e o empenho dos estudantes no momento da discussão sobre os erros.

Pontos de reflexão: as tarefas (situações) elaboradas pelos professores permitiram identificar que os estudantes apresentam mais dificuldades para responder às situações de Proporção Simples muito para muitos do que as de um para muitos. Um ponto que pode explicar essa dificuldade é que, para resolver essa situação, o estudante precisa fazer uma divisão e uma multiplicação. Os estudantes envolvidos na pesquisa não possuem o domínio dessas operações. Contudo, sugerimos que seja observada a necessidade de interpretação da situação e de se utilizar a relação entre as grandezas para facilitar a compreensão. Além disso, se a turma apresenta dificuldade para efetuar as operações de multiplicação e de divisão, é preciso elaborar tarefas que permitam um trabalho paralelo como os demais conteúdos propostos.

3.1.2 Comparação Multiplicativa

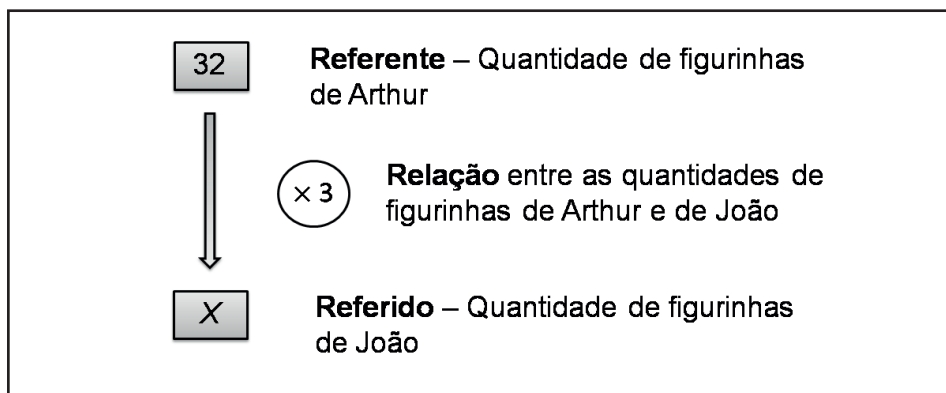
Nesse eixo, que pertence às Relações Ternárias, podemos ter situações que abordam as classes de referente ou referido desconhecido ou relação desconhecida. Nas situações de referente ou de referido desconhecido, pode-se fazer uso das operações de multiplicação ou de divisão, visto que a relação pode estabelecer uma relação que aumenta ou uma que diminui as quantidades envolvidas. Em situações de relação desconhecida, a operação utilizada é, necessariamente, a divisão. Apresentaremos, a seguir, situações de comparação multiplicativa elaboradas pelos professores.

3.1.2.1 Referido desconhecido

A Situação 6 foi elaborada e aplicada por professores que atuavam no 5º ano. Ela envolve uma relação ternária do eixo comparação multiplicativa, que apresenta o referente (quantidade de figurinhas de Arthur), a relação (três vezes mais) e é solicitado o referido (quantidade de figurinhas de João).

Situação 6: O álbum de Arthur tem 32 figurinhas. O de João tem 3 vezes mais. Quantas figurinhas o álbum de João tem?

Figura 3.8 – Diagrama para compreender as relações da Situação 6



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Ressaltamos que o uso dos termos (referido, referente e relação) não precisam ser ensinados aos estudantes. Usamos essa terminologia para os professores e não para os estudantes do 4º e 5º ano. A intenção do uso desse diagrama é facilitar a interpretação da situação (cálculo relacional). Assim, o diagrama pode ser utilizado com os estudantes para a compreensão das relações da situação sem, necessariamente, referir-se aos termos (referido, referente e relação).

O diagrama da Figura 3.8 evidencia que, se João tem três vezes mais figurinhas do que Arthur, para determinar a quantidade de suas figurinhas, é preciso, multiplicar a quantidade de figurinhas de Arthur (32), pela relação entre essas quantidades (3).

Comentários sobre a aplicação da Situação 6 em sala de aula:

No total, 75 estudantes do 5º ano responderam a essa situação, sendo que 51 acertaram (68%), obtendo o percentual de 32% de respostas erradas.

A situação foi disponibilizada para os estudantes, e o professor aguardou a resolução sem fazer interferência, mas observando as resoluções que estavam sendo feitas por eles. Foi observado o uso do diagrama, da operação de adição e de multiplicação.

Em seguida, foi solicitado que os estudantes socializassem as suas resoluções. Foi observado que, ao utilizar a operação de adição, o estudante considerava a expressão “vezes mais” como “a mais”. Assim, faziam a soma ($32 + 3$). Alguns estudantes efetuaram a multiplicação de maneira incorreta.

Foi discutido o significado da expressão “vezes mais” e “a mais”, e os professores disponibilizaram outras situações e fizeram uso do diagrama para auxiliar na compreensão das relações inerentes às situações dadas.

Os professores avaliaram a atividade como boa, pois, apesar das dificuldades na interpretação e execução (resolução) das situações-problema, os estudantes foram bem participativos e interessados.

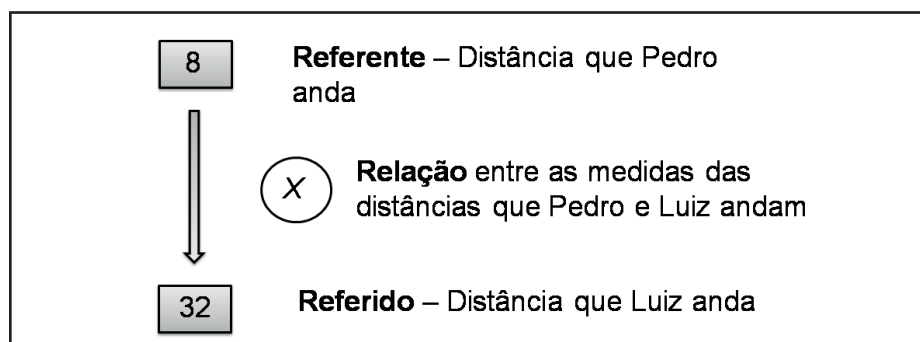
3.1.2.2 Relação desconhecida

As Situações 7 e 8 foram elaboradas e aplicadas por professores que atuavam no 4º ano.

A Situação 7 envolve uma relação ternária do eixo comparação multiplicativa, que apresenta o referente (distância que Pedro anda), o referido (distância que Luiz anda) e é solicitada a relação entre as duas distâncias (vezes mais).

Situação 7: Para chegar até a praia, Pedro anda 8 quilômetros e Luiz anda 32 quilômetros. Quem andou mais? Quantas vezes mais?

Figura 3.9 – Diagrama para compreender as relações da Situação 7



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

A partir da observação do diagrama da Figura 3.9, podemos afirmar que, para determinar a relação entre as distâncias que Pedro e Luiz andam, é preciso dividir a distância que Luiz anda pela distância que João anda.

Comentários sobre a aplicação da Situação 7 em sala de aula:

No total, 83 estudantes do 4º ano responderam à situação, sendo que apenas um acertou (1,2%), resultando 98,8% de respostas erradas.

A situação foi disponibilizada na lousa, e os estudantes resolveram sem intervenção da professora. Foi observado que eles fizeram uso de agrupamentos e da operação de multiplicação.

Alguns estudantes foram convidados a apresentar, na lousa, sua resolução e, ao utilizarem a multiplicação, eles justificaram que multiplicavam os termos devido à presença do termo “vezes mais”. O uso da operação de multiplicação indica a não compreensão das relações envolvidas na situação.

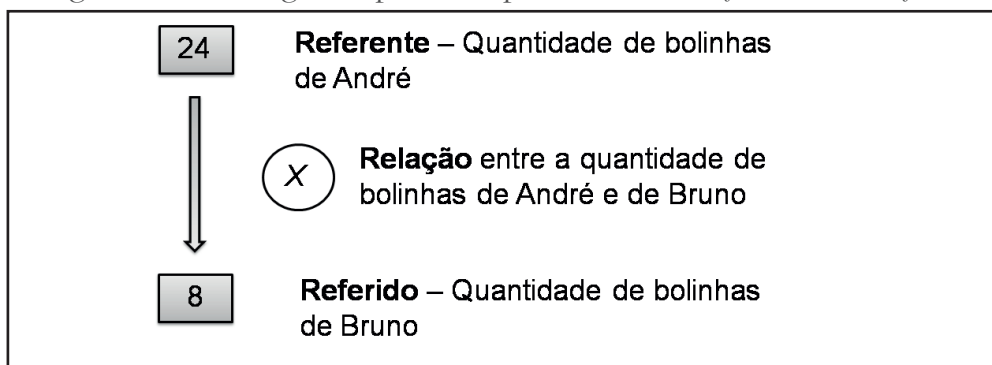
Foi discutido o sentido da expressão “vezes mais” e sobre o uso da operação de divisão para a resolução.

Os professores avaliaram a atividade como boa, pois conduziu a uma discussão que contou com a participação ativa dos estudantes.

A Situação 8 envolve uma relação ternária do eixo comparação multiplicativa, que apresenta o referente (quantidade de bolinhas de André), o referido (quantidade de bolinhas de Bruno) e é solicitada a relação entre as duas quantidades (quantas vezes é menor).

Situação 8: Bruno tem 8 bolinhas de gudes e André tem 24 bolinhas. Quantas vezes a quantidade de Bruno é menor que a de André?

Figura 3.10 – Diagrama para compreender as relações da Situação 8



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Observando o diagrama na Figura 3.10, fica evidenciado que a relação (quantas vezes é menor) aplicada ao referente faz diminuir a quantidade do referido e, como essa relação é uma comparação multiplicativa, a operação a ser utilizada para a resolução é a divisão da quantidade do referente pela quantidade do referido.

Comentários sobre a aplicação da Situação 8 em sala de aula:

No total, 83 estudantes do 4º ano responderam à situação, sendo que 29 acertaram (35%), e o percentual de respostas erradas foi de 65%.

A situação foi disponibilizada, na lousa, e os estudantes resolveram sem intervenção do professor. Foi observado que os estudantes fizeram uso de desenhos e das operações de adição, multiplicação e divisão.

Os estudantes socializaram suas resoluções, e os professores diagnosticaram que a maior dificuldade foi em decorrência do termo “menor que”.

Para a compreensão da situação e da relação estabelecida pelo termo “menor que”, foi discutida a ideia de dobro e de triplo numa situação, para que se analisasse as similaridades com a influência do termo.

Os professores avaliaram as tarefas como boa, pois ajudaram os estudantes a entenderem que o “menor que”, nesse caso, está relacionado a uma divisão.

Pontos de reflexão: as tarefas elaboradas pelos professores, participantes da formação, não contemplaram a elaboração de situações cujo referente é o elemento desconhecido, mesmo tendo sido trabalhado durante o processo formativo. Uma possível explicação para esse fato poderia ser a própria complexidade desse tipo de situação, visto que, não é apresentado o elemento de referência (referente). Por isso, para que fiquem como exemplos desse tipo de situação, elaboramos duas situações de comparação multiplicativa com referente desconhecido e acrescentamos no Apêndice A (comparação multiplicativa, situações 3 e 4).

Entre as situações de referido ou relação desconhecida, elaboradas e aplicadas pelos professores, os estudantes apresentaram mais dificuldades para responder às situações cujo elemento desconhecido é a relação. Um ponto que pode explicar essa dificuldade é que, qualquer que seja a expressão (vezes mais ou vezes menos), a operação a ser realizada será sempre a divisão, não havendo, necessariamente, uma congruência entre a “expressão” e a operação a ser realizada. Contudo, sugerimos que seja observada a necessidade de interpretação da situação e não apoiar a interpretação apenas nas “palavras dica”. Além disso, se a turma apresenta dificuldade com as operações, é preciso fazer um trabalho em paralelo com as regras para efetuar as operações e de compreensão do sistema de numeração decimal.

3.1.3 Configuração retangular

As Situações 9 e 10 foram elaboradas e aplicadas por professores que atuavam no 5º ano.

A Situação 9 envolve uma relação ternária, do eixo produto de medidas, da classe configuração retangular. São dadas as medidas da área e da largura e se deseja encontrar o comprimento da sala dos professores. A operação mais indicada para a resolução é a divisão da área pela largura, obtendo-se o comprimento da sala.

Comprimento = Área ÷ Largura

Situação 9: O piso da sala dos professores tem 30m^2 de área. Sabendo-se que a largura do piso da sala é de 3m , calcule o comprimento dessa sala.



$$\text{Comprimento} = \text{Área} \div \text{Largura}$$

$$\text{Comprimento} = 30 \div 3$$

$$\text{Comprimento} = 10\text{m}$$

Comentários sobre a aplicação da Situação 9 em sala de aula:

No total, 60 estudantes do 5º ano responderam a essa situação, sendo que 38 acertaram (63%) e as respostas erradas corresponderam a 37%.

Depois de disponibilizar e aguardar os estudantes resolverem, os professores observaram, nos esquemas de resolução, que foi utilizado o algoritmo e alguns fizeram desenhos antes de fazer os cálculos.

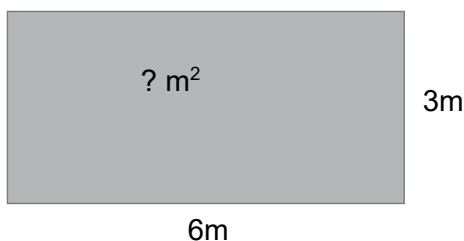
Os estudantes socializaram as resoluções e apresentaram dificuldades de interpretação da situação e do significado de metros quadrados.

Uma professora trabalhou, individualmente, com os dois alunos que tiveram mais dificuldades na interpretação. As demais professoras fizeram uma explanação, na lousa, explicando a situação.

Os professores classificaram essa atividade como boa, pois mobilizou o trabalho com o conceito de área.

A Situação 10 envolve uma relação ternária, do eixo produto de medidas, da classe configuração retangular. São dadas a largura e o comprimento e se deseja encontrar a medida da área de uma das paredes da sala de estar. A operação mais indicada para resolução é a de multiplicação da medida da largura pela medida do comprimento para se obter a medida da área.

Situação 10: Uma das paredes da sala de estar de Mariela tem 6 metros de largura e 3 metros de comprimento. Ela quer forrar essa parede com papel. Quantos metros quadrados de papel de parede ela irá precisar?



Área = Comprimento x Largura

Medida de Área = 3 x 6

Medida de Área = 18m²

Comentários sobre a aplicação da Situação 10 em sala de aula:

No total, 24 estudantes do 5º ano responderam a essa situação, sendo que 9 acertaram (38%) e o percentual de respostas erradas foi de 62%.

Foi observado, na resolução dos estudantes, a utilização das operações de adição e subtração.

Os estudantes que erraram mostraram não compreender a situação e consideraram que os metros quadrados referiam-se à medida da área da parede.

Diante das dificuldades, os professores explicaram, na lousa, os conceitos de metro e discutiram sobre as diferentes formas de medir com as mãos e com os pés (medidas não padronizadas), explicando que elas não davam sempre o mesmo um resultado. Os professores classificaram essa atividade como boa, pois despertou nos alunos a curiosidade e a vontade de aprender.

Pontos de reflexão: Entre as situações da classe configuração retangular, elaboradas pelos professores e desenvolvidas em suas salas de aula, os estudantes apresentaram mais dificuldades para responder às situações em que é dada a medida de área e a medida de um dos lados. Um ponto que pode explicar essa dificuldade é que, para saber a medida do outro lado, é necessário que se faça uma divisão, que é a operação aritmética de maior complexidade para os estudantes desse ano escolar. Portanto, sugerimos que situações que exijam a operação de divisão sejam elaboradas pelos professores para serem apresentadas aos estudantes em sala de aula.

3.1.4 Combinatória

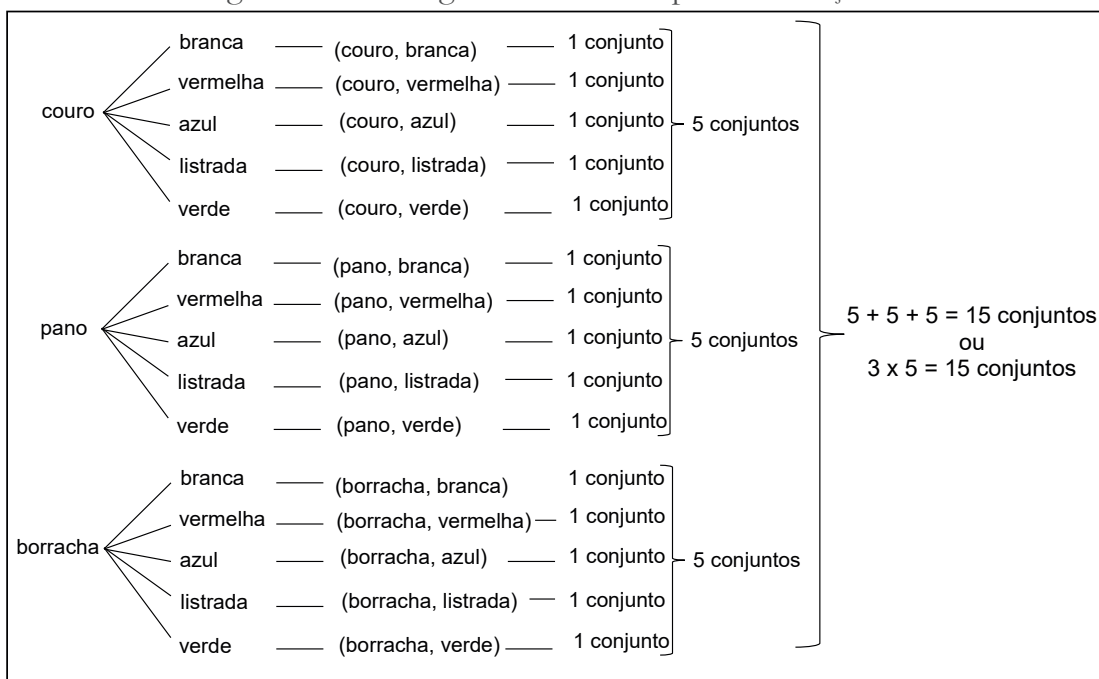
As Situações 11 e 12 foram elaboradas e aplicadas por professores que atuavam no 4º ano.

A Situação 11 envolve uma relação ternária, do eixo produto de medidas, da classe combinatória. São dados dois conjuntos disjuntos: o conjunto de tênis (três pares) e o conjunto de meias (cinco pares) e se deseja encontrar o terceiro conjunto que é o da combinação entre os tênis e as meias. A operação mais indicada para resolução é a multiplicação da quantidade de três pares de tênis pela quantidade de cinco pares de meias, obtendo-se 15 combinações de tênis com meia.

Situações da classe combinatória, que envolvem quantidades pequenas, podem ser resolvidas facilmente com o uso de listas ou do diagrama de árvore. A Figura 3.11 apresenta um diagrama de árvore para a Situação 11.

Situação 11: O professor tem 3 pares de tênis: um de couro, 1 de pano e 1 de borracha; e 5 pares de meias: branca, vermelha, azul, listrada e verde. Quantos conjuntos diferentes podem ser formados usando todos os tênis com todas as meias?

Figura 3.11 – Diagrama de árvore para a Situação 11



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Situação 12: O time de futebol tem 12 uniformes diferentes. Cada uniforme é composto por um tipo de camisa e um tipo de calção. Tem 2 tipos de calção (preto e branco). Quantos tipos de camisa são necessários para compor todos os uniformes?

A Situação 12 envolve uma relação ternária, do eixo produto de medidas, da classe combinatória. São dados dois conjuntos: o conjunto de uniformes (combinação entre camisa e calção) e o conjunto de calções (dois tipos de calção) e se deseja encontrar o conjunto de camisas. A operação mais indicada para a resolução é a de divisão, do conjunto de uniformes (12 uniformes) pelo conjunto de calções (dois tipos de calção), obtendo-se seis camisas.

Para esse tipo de situação e envolvendo quantidades pequenas, o uso da ideia da tabela de dupla entrada auxilia na interpretação da situação. A Figura 12 apresenta a ideia da tabela de dupla entrada para a Situação 12.

Figura 3.12 – Ideia da tabela de dupla entrada para a Situação 12

	Tipos de calção	
	Preto	Branco
C		
a	C_1 (Preto, C_1)	(Branco, C_1)
	C_2 (Preto, C_2)	(Branco, C_2)
m	C_3 (Preto, C_3)	(Branco, C_3)
i	C_4 (Preto, C_4)	(Branco, C_4)
	C_5 (Preto, C_5)	(Branco, C_5)
s	C_6 (Preto, C_6)	(Branco, C_6)
a		12 uniformes

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

A ideia da tabela de dupla entrada auxilia na interpretação da situação. Ressaltamos que esse esquema de resolução torna-se trabalhoso quando as quantidades são grandes e, sendo assim, é importante trabalhar com o uso da operação de divisão ou de multiplicação. Para resolver esses tipos de situações, embora esses esquemas também se apliquem, é preciso dar um salto qualitativo nas resoluções e não se limitar ao uso do diagrama de árvore ou da tabela de dupla entrada.

Comentários feitos pelos professores que aplicaram as situações 11 e 12 em sala de aula:

No total, 52 estudantes do 4º ano participaram da aplicação da Situação 11, sendo que oito acertaram (15%) a situação, tendo 85% de respostas erradas.

Dezesseis estudantes do 4º ano responderam à Situação 12, tendo quatro respostas corretas (25%), com 75% de respostas erradas.

As situações foram disponibilizadas na lousa. Alguns estudantes disseram que o assunto não tinha sido dado, mas foram orientados a tentar resolver.

Os estudantes utilizaram como esquema de resolução: desenho, contagem e uso de operações de multiplicação e de divisão. Os erros foram observados nos procedimentos de cálculo e na compreensão das situações. Alguns estudantes apresentaram suas resoluções, na lousa, e o professor foi fazendo intervenção para que compreendessem os procedimentos de resolução.

Pontos de reflexão: Entre as situações da classe combinatória, elaboradas pelos professores, os estudantes apresentam mais dificuldades para responder situações que envolvem uma divisão. Um ponto que pode explicar essa dificuldade é que, em geral, é utilizado o diagrama de árvore ou tabelas de dupla entrada para a resolução das situações em que são dados os dois conjuntos disjuntos e se pergunta pelo conjunto a ser formado com a combinação dos elementos dados. Essas estratégias estão relacionadas ao Campo Conceitual Aditivo, fazendo uso de contagem e perdem a sua eficácia ou praticidade por serem limitadas do ponto de vista da quantidade de elementos de cada conjunto. Além disso, quando temos o conjunto formado pela combinação e um dos conjuntos disjuntos e se busca a quantidade de elementos do outro conjunto disjunto, essas estratégias (com a contagem) não são muito eficazes. Portanto, o professor precisa se preocupar em dar um salto qualitativo, no sentido de oportunizar ao estudante recorrer às operações relativas ao Campo Conceitual Multiplicativo. Isso não quer dizer que somos contrários à introdução de situações de combinatória utilizando diagramas de árvore e tabelas, mas elas são limitadas e, necessariamente, tem que haver uma ruptura entre o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo.

As situações apresentadas e discutidas foram aplicadas em sala de aula de 4º ou de 5º ano, durante todo o ano letivo de 2015. Entre as dificuldades apresentadas pelos estudantes, observamos que as mais recorrentes, em qualquer um dos eixos ou classes, referem-se: a interpretação da situação; a compreensão das relações inerente à situação e a operacionalização do algoritmo (efetuar as operações). Ao planejar as tarefas a serem realizadas em sala de aula, é preciso considerar a incidência dessas dificuldades e como desenvolver a prática letiva no sentido de saná-las. O processo formativo oportunizou aos professores refletirem sobre as observações feitas na prática de sala de aula. Essas experiências deixaram marcas em suas memórias. Visando compartilhar um pouco essas memórias, apresentamos, a seguir, algumas delas narradas por professoras que participaram ativamente do processo formativo.

3.2 MEMÓRIAS QUE SE CRUZAM

Baseados em entrevistas, nessa seção, apresentamos memórias de três professoras que lecionavam em escolas parceiras do E-Mult, no ano 2015. Para nortear essas memórias, direcionamos às professoras três questionamentos, a saber: como você pode nos relatar o trabalho desenvolvido pelo E-Mult na relação das suas ações pedagógicas, nas aulas de Matemática; como você pode relatar a relação do trabalho do E-Mult com a aprendizagem de conceitos matemáticos dos estudantes e, como você relata o trabalho desenvolvido pelo E-Mult no grupo de professores de modo que todos participavam da elaboração e da discussão dos resultados da aplicação.

Memórias da professora Bruna²

Bruna lecionava numa turma de 5º ano, vejamos suas memórias.

Eu tenho o curso de Pedagogia, sendo a formação inicial no Magistério. Tenho mais de 17 anos em sala de aula, iniciei quando tinha apenas o Magistério.

2 Por questões éticas, os nomes utilizados para os professores são fictícios.

Em relação a minha experiência docente com a Matemática e com o ensino do Campo Conceitual Multiplicativo, nos anos iniciais, eu tenho uma percepção de antes e depois da formação. Antes, tinha ali um conteúdo programado que tinha que seguir, independentemente de o aluno compreender realmente o conteúdo, de ele se apropriar do conteúdo ou não. Tinha que cumprir um cronograma. Às vezes, eu não levava em consideração aquilo que o aluno trazia, os questionamentos, a forma como eles resolviam certas situações e acabava privando o aluno de um conhecimento maior. Então, com a formação, fui perceber que realmente é preciso partir dos conhecimentos dos alunos. Eu ficava tipo “em cima de um pedestal, a dona da verdade”, sendo que, muitas vezes, existem várias formas de o aluno chegar àquilo que se espera, mais de uma forma que seja no tempo dele, da forma dele.

Antes eu pegava o livro didático e via as situações de determinados conteúdos e, dizia não, essa eu vou pular porque essa é difícil. Porque, para mim era uma coisa que estava sendo complicado, então, eu dizia não, mas, o aluno chega a determinada conclusão por um caminho diferente do nosso e que é realmente válido. O meu olhar mudou nesse sentido.

Em relação ao conhecimento dos alunos, hoje eu consigo olhar a fundo através dos esquemas que eles utilizam para resolver, às vezes, eu não levava em consideração, se eles não fizessem exatamente o algoritmo, da forma que eu queria que fizessem, que montassem a continha para mim, eu já tinha como errada, não considerava os tracinhos, os rabiscos, os desenhos. Eu não considerava nada. Hoje, levo em consideração tudo que o aluno faz e que revele o seu raciocínio. Antes, ou era certo ou era errado.

Falando por mim, acredito que as principais causas das dificuldades que alguns alunos apresentam no Campo Conceitual Multiplicativo é a forma como o professor trabalha, a didática, a metodologia que ele utiliza e que, às vezes, pode facilitar para o aluno o entendimento e, às vezes não, podendo até acabar dificultando de certa forma.

Em minha opinião, a formação veio favorecer minha prática, porque eu passei a analisar não só os esquemas dos alunos, mas, também, as situações dos livros

didáticos. Antigamente, eu não sabia nem o que era, como era classificar, eu não sabia que existia uma classificação. Eu passei, depois da formação, a analisar criticamente as situações que estão no livro didático. Quando existe alguma que me inquieta, vou pedir ajuda às colegas. Aí eu falo, me diz aqui, essa daqui é de muitos para muitos? Essa daqui é configuração retangular? Eu já passo a analisar e não a folhear o livro para selecionar aquelas que me convêm trabalhar ou não.

Quando digo aquelas que me convêm, quero dizer aquelas que seriam mais fáceis para mim. Antes da formação, escolhia as que os alunos sabiam, isso para facilitar a minha aula, o que era melhor para mim. Então, hoje eu instigo mais onde eles não sabem, já me incomoda mais.

Hoje, vejo que é importante ir para sala com propriedade do que você está falando. Antes, se por algum motivo eu não preparasse a aula, chegava lá no quadro e colocava umas continhas, com tirar a prova real e dar nome aos termos. Depois da formação, fazer isso me incomoda. Hoje, se acontece de não preparar uma aula de Matemática, eu posso analisar com eles uma situação, interpretar, identificar as grandezas, os elementos da situação. Já não vou mais só para as continhas. Antes, nada disso eu fazia, nada, nada. Então, as contribuições foram as melhores possíveis.

Em minha opinião, das informações que foram trabalhadas na formação, a mais inovadora, foram os esquemas. Eu nunca pensei no mundo que existiam esquemas, que pudesse perceber o que o aluno está trabalhando ali. Eu via o aluno fazendo, eu via o aluno se esforçando, mas eu não sabia o que estava por trás daquilo. Eu não sabia que existia uma palavrinha chamada “esquema” e que valeria tanto a pena a gente analisar aquilo ali. Então, os esquemas, o olhar mesmo de ir a fundo, foi uma informação, assim, valiosíssima para mim como professora.

Eu, agora, não trabalho a multiplicação, simplesmente o algoritmo por si só ou apenas uma adição de parcelas iguais. Então, assim, existem outras formas de a multiplicação estar presente ali, os alunos vão ver mais à frente, mas tem que levar a informação certa. Então, antes eu só trabalhava assim, o que é adição? O que é multiplicação? É você pegar, repetir e somar. Então, assim, minha postura mudou muito, em muitos sentidos.

Memórias da professora Helena

Helena lecionava numa turma de 4º ano. Vejamos suas memórias.

Eu tenho Pedagogia e Especialização em gestão escolar. Atuo em sala de aula há 30 anos.

Acredito que a componente curricular sobre elementos do Campo Conceitual Multiplicativo se justifica nos anos iniciais, por fazer parte do dia a dia dos alunos. Na escola pública, eu acho que os meninos chegam com um conhecimento dessa questão da multiplicação e da adição, porque, em geral, seus pais têm comércio, vendem alguma coisa em casa, como água e bebida. Por isso, vejo a importância de se trabalhar com o Campo Multiplicativo.

Em geral, os alunos têm muita resistência com a Matemática. É uma disciplina que os alunos apresentam dificuldade e ficam com notas baixa. Mas, esse ano, eu acho que essa questão foi mais trabalhada, até por conta da formação. Tudo o que eu aprendia na formação, eu fazia com os meninos aqui na sala. Eu testava, apliquei vários testes, refiz com eles. As avaliações, eu baseei em várias questões que elaboramos na formação e tirei aquela questão do arme e efetue, que eu realmente usava, mas o arme e efetue, esse ano, praticamente eu não trabalhei. Ao trabalhar com as situações, eu achei que eles se saíram melhor, muito melhor, tiveram um aproveitamento bem melhor.

Eu acredito que a principal causa das dificuldades que os alunos apresentam no Campo Conceitual Multiplicativo estão relacionadas com a interpretação da situação. Eles têm que identificar qual é a operação e eles passam muitos anos trabalhando com a adição e a subtração. Sempre dizem: “é de mais ou é de menos?”. Passam muitos anos assim, trabalhando com adição, então, tudo para eles se resolve com uma adição e, normalmente, quando você trabalha com multiplicação, não é.

Os alunos não querem ler, acham que aquilo ali é uma adição. Então, eu acho que um dos problemas é esse. Outra coisa, às vezes tem mais de uma operação para você resolver o problema e eles não querem pensar nisso.

Eu acho que é mais uma questão da interpretação. Porque muitos alunos estudam mesmo a tabuada, em casa. Às vezes a própria mãe manda estudar a tabuada “é para estudar a tabuada, tia”. Então, eles sabem multiplicação. Por que, quando vão resolver uma situação, não conseguem identificar qual é a operação? Por isso, acho que é essa questão mesmo de achar que tudo é uma adição ou não querer ler e compreender o problema, isso envolve a questão da interpretação.

Com essa formação, mudei totalmente a visão sobre a prática pedagógica. Uma mudança total de atividade, de importância. Acho que foi uma mudança geral, que foi muito bom.

Trouxe muitas informações novas. A própria teoria, que às vezes a gente até conhece, pratica, faz aquele tipo de atividade na sala, aquele tipo de problema e não sabia classificar. Não sabia nomear e identificar os tipos de problema. Hoje, eu abro um livro e já sei identificar que tipo de operação é aquela.

Conhecer a classificação, entender a finalidade de cada situação, saber o que é que eu estou trabalhando. Antigamente, eu trabalhava com a multiplicação só para ver se os alunos sabiam multiplicar, só para ver se eles sabiam a operação, por exemplo, “ $2 \times 3 = 6$ ”. Hoje, não, hoje me preocupo se os alunos sabem que tipo de operação estão fazendo, se sabem nomear o que estão fazendo, quais são as dificuldades, qual é o tipo de situação em que têm mais dificuldade.

Esse ano, com a formação, alterei a prática docente quanto ao ensino do Campo Conceitual Multiplicativo.

Memórias da professora Marisa

Em 2014, Marisa lecionava numa turma de 5º ano e, em 2015, no 3º ano. Vejamos suas memórias.

Minha formação inicial é o Magistério, tenho formação em Ciências Sociais e agora que estou cursando Pedagogia. Estou em sala de aula há 19 anos.

Particpei da pesquisa, desde o início, quando foram elaborados materiais para o trabalho, elaboramos situações mesmo antes de a gente fazer a formação. Acredito que o objetivo era saber mais ou menos em que nível a gente estaria na elaboração das situações.

Em minha opinião, o Campo Conceitual Multiplicativo está incluído para ser ensinado nos anos iniciais, porque faz parte do dia a dia das crianças, para desmistificar a questão do medo com a multiplicação. Isso faz parte desde a educação infantil. Faz parte do dia a dia, multiplicar, adicionar, subtrair e dividir.

Meus alunos têm muito medo na questão da multiplicação. Avalio como eles usam as situações, como eles realizam as atividades no dia a dia, mesmo nas provas e nas avaliações.

Acho que os meus alunos não possuem propriedade do conteúdo da multiplicação. Justamente porque, desde o início, têm medo da Matemática, de que a continha é difícil, porque adição e subtração são mais fáceis e, na multiplicação e na divisão, começa a ficar mais complicado e, muitos deles, não têm propriedade por não ter sido trabalhado de forma natural, como deveria. Desde a educação infantil e a alfabetização, a questão de trabalhar os conceitos do Campo Multiplicativo de forma concreta não é feito e, por isso, não se apropriam tão facilmente desse conteúdo, nos anos iniciais.

Uma das maiores falhas, inclusive da nossa própria formação inicial, é justamente aquele medo da Matemática, medo de realizar as atividades. Por exemplo, as situações do Campo Conceitual Multiplicativo são colocadas com muito receio e, talvez, a gente, como professor, passe um pouco disso para as crianças, por conta da nossa formação inicial.

Vejo que as principais contribuições da formação para a nossa prática docente foram: desmistificar; trabalhar a Matemática de forma mais natural e concreta; apresentar novos termos que eu não usava; ver os problemas do Campo Conceitual Multiplicativo de uma forma diferenciada, mais simples e, ao mesmo tempo mais elaborada; sair do tradicionalismo e, principalmente, tirar o medo da Matemática. Enfim, o curso me fez desmistificar a Matemática e trabalhar com os alunos de forma natural sem muito preconceito.

Em relação ao conteúdo matemático trabalhado na formação, as informações mais inovadoras que tivemos foram os termos utilizados para as relações do Campo Conceitual Multiplicativo. A questão do compartilhar as informações que a gente tinha na formação e a troca de experiências foram enriquecedoras e uma das coisas principais foi tirar esse véu que ficava: “eu não gosto muito de Matemática”, mas foi uma coisa que foi prazerosa e é isso que estou tentando passar para os alunos. Apesar de os livros já trazerem uma nova visão, uma nova leitura da multiplicação e da divisão, eu não observava tantas mudanças que tinha. Estava centrada no que eu já tinha vivido, no que aprendi na formação inicial.

Esse processo formativo me fez ver que existem muitas mudanças na Matemática, existem novas formas de trabalhar Matemática e eu não estava percebendo, me fez despertar para as novas formas de trabalhar Matemática com as crianças, o compartilhar informações com os outros professores e o enriquecimento com a troca de experiências.

A partir da formação, eu fiz algumas mudanças na minha prática docente, não só agora, mas, desde quando estava na formação, eu já vi, quando voltava dos encontros formativos, no outro dia, no caso do planejamento, eu já tentava colocar algumas novidades que a gente viu lá e, desde os primeiros encontros, já comecei a mudar a minha prática, o meu planejamento desde então e, com essa nova turma do 4º ano que estou assumindo, já estou com o planejamento tentando, justamente, adaptar e utilizar o que eu aprendi nessa formação.

Posso exemplificar as mudanças na minha prática docente como: as formas de elaboração de situações do Campo Conceitual Multiplicativo; fazer com que as crianças pensem mais; utilizar mais material concreto, no caso, tampinhas e jogos.

Mesmo sem ter tanto material, é possível trabalhar com o concreto, com sucatas, não só para trabalhar a multiplicação, mas, também, outros conteúdos. Então, isso foi o que me fez assim, descobrir que a gente pode e, com pequenas coisas, com poucos recursos se consegue fazer mudanças e grandes mudanças.

As memórias das professoras e os resultados do processo formativo

As professoras expressam, em suas memórias, pontos que foram elencados durante todo o processo formativo a respeito das dificuldades dos estudantes e ressaltam, entre eles, a interpretação das situações.

Além disso, evidenciam aprendizado e mudança de práticas impulsionadas pelo que foi vivenciado no processo: mudança de perspectiva a respeito do ensino da multiplicação; não utilizar apenas o arame e efetue; oportunizar o trabalho com o conceito da multiplicação desde a educação infantil; compreender diferenças entre situações multiplicativas; nova visão sobre os esquemas de resolução dos estudantes. Essas são pontuações que nos remetem à reflexão do que podem perceber outros professores para a condução de seu trabalho em outras salas de aula.

Esperamos que essa experiência formativa, assim como seus resultados possam auxiliar outros professores no seu fazer em sala de aula.

APÊNDICE A

Situações elaboradas por professores e pesquisadores da Rede E-Mult

Proporção Simples – um para muitos

1- Silvana comprou uma pizza com 16 fatias que foi dividida entre 8 pessoas. Quantas fatias cada pessoa recebeu?

2- Roberta tem 24 bolinhas de gude e quer colocar 6 bolinhas em cada saquinho. Quantos saquinhos ela vai precisar?

3- A Escola Crescer tem 80 alunos do 5º ano. Sabendo-se que, na escola há apenas 4 salas do 5º ano e que elas têm a mesma quantidade de alunos, quantos alunos há em cada sala?

4- Na festa de aniversário de Ana tinha 40 convidados. Quantos carros foram precisos para transportar todos os convidados, se cada carro fez apenas uma viagem e levou 5 pessoas?

5- Um ônibus tem capacidade para transportar 45 passageiros sentados. Três ônibus com a mesma capacidade transportam quantos passageiros sentados?

Proporção Simples – muitos para muitos

1- Na sorveteria Sweet, comprando 5 sorvetes, você ganha 3 brinquedos. Quantos brinquedos você ganhará se comprar 20 sorvetes?

2- Em uma gincana na escola, a cada 3 garrafas recicláveis coletadas, a turma marcaria 5 pontos. A turma do 2º ano coletou 15 garrafas. Quantos pontos essa turma marcou?

3- Mariana prepara 3 marmitas em 5 minutos. Quanto tempo Mariana levará para preparar 18 marmitas?

4- Bidu vende salgados. A cada 6 salgados vendidos, ele come 2. No fim da tarde, ele esqueceu de quantos salgados tinha vendido, mas lembrou que comeu 8 salgados. Então, quantos salgados Bidu vendeu?

Comparação Multiplicativa

1- Maria tem 8 reais em seu cofrinho e sua irmã Ana conseguiu juntar 3 vezes mais do que Maria. Quanto Ana conseguiu juntar em seu cofrinho?

2- Bia não sabe quanto tem na carteira. Beth diz que tem 21 reais e que Bia tem 3 vezes menos que ela. Quantos reais, então, Bia tem?

3- Este mês, Marcos economizou quatro vezes mais dinheiro que a quantidade de dinheiro que ele havia economizado no mês passado. Este mês ele economizou R\$800,00. Quanto ele economizou no mês passado?

4- Laura e Milla são colecionadoras de moedas temáticas. A quantidade de moedas da coleção de Laura é duas vezes menor que a quantidade de moedas da coleção de Milla. Laura tem 16 moedas. Quantas moedas Milla tem em sua coleção?

Configuração retangular

1- Numa garagem, que mede 8m de comprimento e 5m de largura, precisa-se colocar cerâmica. Quantos metros quadrados de cerâmica será preciso comprar para colocar em todo o piso da garagem?

2- O quarto de Beatriz tem 2 metros de comprimento e 5 metros de largura. Ela pretende trocar o forro, quantos metros quadrados de forro ela precisa comprar?

3- O quarto de Beatriz tem 10 m^2 , sendo que sua largura mede 5 metros. Qual a medida do comprimento desse quarto?

MINI CURRÍCULO

DÉBORA CABRAL LIMA

Mestre em Educação Matemática pela UESC/BA. Professora da Escola Centro Integrado Cristo Redentor, São José da Vitória-BA. Atua na área de Educação Matemática.

E-mail: cabraldebora@yahoo.com.br

EURIVALDA RIBEIRO DOS SANTOS SANTANA

Doutora em Educação Matemática pela PUC/SP, Pós-doutorado pela Universidade de Lisboa. Professora Titular da Universidade Estadual de Santa Cruz. Atua na área de Educação Matemática com ênfase em processo de ensino, em processos de aprendizagem e produção de material didático.

E-mail: eurivalda@uesc.br

JOSÉ AIRES DE CASTRO FILHO

Ph.D em Mathematics Education pela University Of Texas At Austin. Professor Titular da Universidade Federal do Ceará (UFC).

Atua principalmente nos seguintes temas: Educação a Distância, Informática Educativa e Psicologia da Educação Matemática.

E-mail: aires@virtual.ufc.br

IRENE MAURICIO CAZORLA

Doutora em Educação Matemática pela UNICAMP e pós-doutora pela PUC/SP. Professora Titular da Universidade Estadual de Santa Cruz. Pesquisa na área de Educação Estatística.

E-mail: icazorla@uol.com.br

LUANA CERQUEIRA DE ALMEIDA

Mestre em Educação Matemática pela UESC/BA.

Atua na área de Educação Matemática.

E-mail: luanacqra@gmail.com

PEDRO HENRIQUE MILAGRE

Mestre em Educação Matemática pela UESC/BA.

Atua na área de Educação Matemática.

E-mail: phmilagre@gmail.com

SINTRIA LABRES LAUTERT

Doutora em Psicologia Cognitiva pela UFPE, com Pós-Doutorado no Poincaré Institute for Mathematics Education – Tutfs University. Professora Associada do Departamento de Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Atua na Pós-Graduação Stricto Sensu em Psicologia Cognitiva e na Graduação em Psicologia. É coordenadora do grupo de trabalho Psicologia da Educação Matemática da Associação Nacional de Pós-graduação em Psicologia (ANPEPP)

e vice-coordenadora do grupo de trabalho Processos cognitivos e linguísticos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

E-mail: sintrialautert@gmail.com

VERA LUCIA MERLINI

Doutora em Educação Matemática pela PUC/SP. Professora Adjunta da Universidade Estadual de Santa Cruz. Atua na linha de pesquisa de Concepções, processos e práticas de ensino e aprendizagem.

E-mail: vera.merlini@gmail.com

PARTICIPANTES DA REDE E-MULT

O E-Mult foi idealizado inicialmente pela Dra Sandra Magina, a ela todo nosso agradecimento. E, várias foram as mãos que construíram e desenvolveram essa Rede. Gratidão é palavra para todos que se dedicaram no planejamento e implementação da pesquisa, para simbolizar essa gratidão deixamos o nome de cada um gravado neste livro.

Professores da Educação Básica

Alda Nara Ferreira de Alencar – Centro Integrado Cristo Redentor

Alexis Martins Teixeira – IFBA

Ana Carla Amâncio Machado Dias - Escola Pública da Cidade de Fortaleza

Antonia Neta Torres Costa - Escola Pública da Cidade de Fortaleza

Lucivânia da Silva Costa Ribeiro – Centro Integrado Cristo Redentor

Maria Benevides dos Santos – Escola Municipal Guilhermina Cabral

Maria Rita Lima Santos de Almeida – Centro Educativo Fé e Alegria

Silvana Lopes da Silva Santos – Escola Municipal Guilhermina Cabral

Simone Soares De Moraes - EMEIF Monteiro Lobato

Estudantes de Graduação

Alice Zenyanne Moreira dos Santos - UECE

Ariedja de Carvalho Silva – UFPE

Brena Rabelo dos Santos – UECE

Catarina Maria de Melo Linhares – UFPE
Claire Souza da Costa Marques – UESC
Clarissa Távora Tavares Cavalcante Viana – UFPE
Dacymere da Silva Gadelha – UFPE
Daniela Brayner de Farias Xavier – UFPE
Danielle Sobral Maciel – UFPE
Danilo do Carmo de Souza – UECE
Dara Catarina Santos da Silva – UFPE
Débora Silva dos Santos – UFPE
Deborah Monte Medeiros – UFC
Fabiane Santana da Silva – UESC
Farildes da Silva de Souza – UESC
Francisca Wellingda Leal da Silva – UECE
Gerlândia Santos Silva – UFC
Gleiciane Ferreira Farias – UECE
Hanna Gisellia Nogueira Antunes - UECE
Hosana de Fátima Melo da Silva – UECE
Jacilma Barata de Lima – UESC
Joyce Maria dos Santos – UFPE
Layane Carolinne de Lima Santos – UFPE
Maria Silvânia Marques Xavier de Souza - UFC
Maria Eduarda Chaves de Mendonça Galvão – UFPE
Maritza Maria Lima de Almeida Souza – UESC
Mônica de Moraes Oliveira – UFPE
Nássara Maia Cabral Cardoso Gomes – UECE
Nerivaldo Honorato da Cruz Santos – UESC

Paulo César da Silva Batista – UECE
Priscila Alves de Paula Belo – UECE
Sarah Rayssa Silva de Azevedo – UFPE
Thaynara Dias Martins – UECE
Taynan Vitória Lima de Castro – UECE
Valeria Conceição dos Santos – UESC

Estudantes de pós-graduação

Alexis Martins Teixeira – UESC
Ana Carla Amâncio Machado Dias – UFC
Anna Bárbara Barros Leite – UFPE
Antônio César Teixeira – UESC
Caio Fábio dos Santos Oliveira – UESC
Camila Xavier Dias Souza Sena – UESC
Clara Raissa Fernandes de Melo – UFPE
Débora Cabral Lima – UESC
Dennys Leite Maia – UFC
Eliziane Rocha Castro – UECE
Elys Vânyy Fernanda Rodrigues de Oliveira - UECE
Emanuella Figueira Pereira – UESC
Emília Isabel Rabelo Souza – UESC
Jaqueline Santana de Souza Santos – UESC
Joserlene Lima Pinheiro - UECE
Larissa Elfisia de Lima Santana – UFPE
Leidy Johana Peralta Marín – UFPE
Lemerton Matos Nogueira – UESC

Luana Cerqueira de Almeida – UESC
Mariana Oliveira Santos – UESC
Pedro Henrique Milagre – UESC
Taianá Silva Pinheiro – UESC
Jaqueline Santana de Souza Santos – UESC
Rayssa Melo de Oliveira – UECE
Rodrigo Lacerda de Carvalho – UFC
Silene Cerdeira Silvino da Silva - UECE
Silvana Holanda da Silva – UECE
Tamiles da Silva Oliveira – UESC

Pesquisadores

Alex Alexandre Alves – IFBA
Alina Galvão Spinillo – UFPE
Antônio Luiz de Oliveira Barreto – UECE
Aparecido dos Santos – UNINOVE
Claudia Roberta Araújo Gomes – UFRPE
Diná da Silva Correia – UESC
Ernani Martins dos Santos – UPE
Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana – UESC
Irene Maurício Cazorla – UESC
José Aires de Castro Filho – UFC
Juscileide Braga de Castro – UFC
Juliana Ferreira Gomes da Silva – UFAL
Marcília Chagas Barreto - UECE
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba – UFPE

Sandra Maria Pinto Magina – UESC

Sintria Labres Lautert – UFPE

Vera Lúcia Merlini – UESC

Coordenadores

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana – responsável pela coordenação Geral e pelo Núcleo Ilhéus

José Aires de Castro Filho – responsável pela coordenação do Núcleo Fortaleza

Sintria Labres Lautert – responsável pela coordenação do Núcleo Recife



Primeira edição impressa em 2017



ISBN: 978-85-8151-150-4



9 788581 151150 4