

ANÁLISE DO AJUSTAMENTO POR MÍNIMOS QUADRADOS DE UMA TRILATERAÇÃO TOPOGRÁFICA COM INJUNÇÕES NOS PLANOS UTM E TOPOCÊNTRICO

FRANCISCO JAIME BEZERRA MENDONÇA
SILVIO JACKS DOS ANJOS GARNÉS
CAROLINE MARTINS PEREIRA
JOSÉ ARIMATÉIA BARROSO NETO
WEYLLER DIOGO ALBUQUERQUE MELO

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Tecnologia e Geociências - CTG
Departamento de Engenharia Cartográfica, Recife, PE
jaime@ufpe.br
silvio.jacks@ufpe.br
carol.martins49@yahoo.com.br
ze_teteia@hotmail.com
wdiogo19@gmail.com

RESUMO – No ajustamento das observações uma das etapas fundamentais é a análise dos resultados a fim de verificar a normalidade das observações. No presente trabalho o teste do qui-quadrado foi utilizado para essa análise e permitiu a identificação da inconsistência do modelo de projeção no ajuste das observações lineares obtidas com estação total. Além da preocupação com a análise em si, neste trabalho é mostrado como proceder ao ajustamento livre e como estabelecer implicitamente injunções de pontos de controle.

ABSTRACT – In the adjustment of observations is important to analyze the results to verify the goodness of the adjustment. In this work the chi-square test was used for this analysis and allowed the identification of the inconsistency of the projection model in the observations of the distances obtained with total station. Besides the concern about the analysis itself, this work showed the application of the free adjustment and of the constraints adjustment with control points implicitly.

1 INTRODUÇÃO

O ajustamento de observações pelo método dos mínimos quadrados surgiu independentemente com Gauss em 1795 e Legendre em 1805, *apud* Gemael (1974). Embora o método tenha sido difundido na Europa e nos Estados Unidos, no Brasil, essa difusão só foi iniciada a partir de meados do século passado com Publicações da Diretoria do Serviço Geográfico do Exército (DSG), por professores do Instituto Militar de Engenharia (IME). Na obra de Branco Filho (1968) raras citações são feitas na língua portuguesa datadas do início do século passado. Todavia, com a criação do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da UFPR em 1971, a convite do Prof. Camil Gemael, o Prof. Uotila da Universidade de Ohio, *Columbus*, ministrou a disciplina de ajustamento de observações e iniciou em nosso país a divulgação do ajustamento por mínimos quadrados a luz da teoria matricial - *Introduction to adjustment computatios with matrices* (UOTILA, 1967). A propagação desse conhecimento foi continuada no Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas

da UFPR, pelo Prof. Camil Gemael, com destaque a algumas de suas publicações: Gemael (1974), Gemael (1975), Gemael (1976), Gemael (1977), Gemael (1987), culminando com sua mais recente obra no tema: “Introdução ao ajustamento de observações” (GEMAE, 1994). Sob o enfoque matricial se destacam ainda como primeiros trabalhos no Brasil: Lugnani (1975), Dalmolin (1976), Abib (1976), Wandresen (1980).

Na década de 1990, o método dos mínimos quadrados passa a ser um dos métodos de ajustamento de poligonais normalizado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), por meio da NBR 13133 (1994). A partir daí, o método ganha importância também às aplicações topográficas no Brasil, cabendo, pois, a citação de alguns estudos já publicados a respeito do assunto, entre eles: Abib (1976); Monico (1989), Camargo *et al.* (1996); Moraes (1997); Assunção *et al.* (2003); Stringhini (2005) e Stringhini *et al.* (2008); Azevedo *et al.* (2006); e Carvalho *et al.* (2007).

Um fato novo e de grande relevância coloca definitivamente a necessidade do ajustamento de observações, com o método dos mínimos quadrados nos levantamentos topográficos. No dia 04 de março de 2010 foi aprovada no Diário Oficial da União, a 2ª edição da Norma Técnica do INCRA para o georreferenciamento de imóveis rurais. Essa norma deixa explícito que os ajustamentos de poligonais enquadradas devem ser pelo método dos mínimos quadrados. Os pontos de controle de saída e de chegada dessas poligonais devem ser proporcionados pelo posicionamento por satélites do grupo: *Global Navigation Satellite System* (GNSS); ver DOU (2010) ; INCRA (2010).

Atualmente é praticamente inconcebível um trabalho de mensuração totalmente isolado (sem o georreferenciamento) e desta forma, junto com o ajustamento, devem-se aprimorar cada vez mais os métodos de conexão de posicionamento GNSS e topográficos. É nesse sentido que este trabalho aponta, mostrando a inconsistência de modelo, quando simplesmente se aplica o plano UTM como se fosse topográfico. Um arrazoado de conceitos do ajustamento é apresentado, mas, o importante é voltar à atenção para o tradicional teste de hipótese qui-quadrado, na detecção de problemas no ajustamento.

Neste trabalho investigaram-se as possíveis causas quando o teste qui-quadrado rejeita a normalidade das observações. E para demonstrar, três ajustamentos foram realizados: o ajustamento livre; o ajustamento com pontos de controle injuncionados ao plano UTM; e ajustamento com pontos de controle injuncionados ao plano topocêntrico (geodésico local) - está sendo evitado chamar de plano topográfico pelo desconhecimento do desvio da vertical na origem do sistema, conforme discutido em Garnés (1998).

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Escolheu-se, para ilustrar a aplicação dos procedimentos metodológicos da trileração topográfica e ajustamento por mínimos quadrados, uma área localizada no campus Joaquim Amazonas da UFPE. Nesta área havia sido implantada em 2008, uma rede de pontos geodésicos no padrão da RIBaC/RBMC durante o projeto financiado pelo CNPq “Determinação de Limites de Imóveis para Fins Legais” coordenado pela Profa. Andrea Carneiro - UFPE. O ajustamento preliminar do rastreo GPS foi realizado por Vila Flor (2008). A estrutura do marco é ilustrada na figura 1. As coordenadas dos marcos, bem como os desvios padrão em SIRGAS 2000, são apresentadas na tabela 1. E, A configuração geométrica dos marcos no campus é ilustrada na figura 2.



Figura 1. Estrutura dos marcos geodésicos no campus Joaquim Amazonas da UFPE, padrão RIBaC/RBMC.

Tabela 1. Coordenadas geodésicas do ajustamento preliminar em SIRGAS 2000, da rede cadastral do campus Joaquim Amazonas, UFPE.

ID marco	Latitude (Sul)	2,58 σ (m)	Long. Oeste)	2,58 σ (m)	Alt. ge (m)
RECF	8°03' 03,46970"	0= fixa	34°57' 05,45910"	0=fixa	20,180
EPS 1	8°02' 53,44031"	0,001	34°56' 53,45504"	0,001	2,787
EPS 2	8°02' 50,24854"	0,001	34°57' 09,19544"	0,001	4,332
EPS 3	8°03' 07,57601"	0,001	34°56' 50,66166"	0,001	5,200
EPS 4	8°03' 05,84148"	0,001	34°57' 11,62465"	0,001	4,892
EPS 5	8°03' 23,36084"	0,001	34°56' 51,38975"	0,001	3,083
EPS 6	8°03' 21,26425"	0,001	34°57' 16,23980"	0,001	4,586
EPS 7	8°03' 08,21201"	0,002	34°57' 14,65599"	0,001	4,637

Fonte: Vila Flor (2008)

A estação RECF é integrante da RBMC sob código internacional 93.110, operando 24 horas por dias podendo ser acessada via RIBaC pelo site do INCRA ou via RBMC pelo site do IBGE.

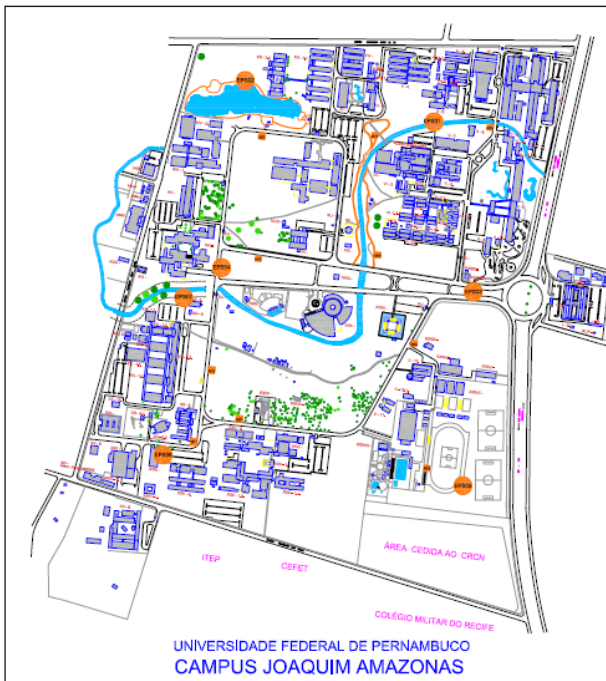


Figura 2. Em círculos alaranjados ilustra-se a configuração geométrica da rede cadastral dos marcos geodésicos, no campus Joaquim Amazonas da UFPE, Recife-PE. Fonte: Vila Flor (2008).

As coordenadas na Projeção UTM (Universal Transversa de Mercator) em SIRGAS 2000 das estações da tabela 1, são apresentadas na tabela 2. E ainda, estabelecendo-se como origem do sistema topocêntrico (coordenadas geodésicas locais) a posição horizontal da estação RECF e a posição vertical do plano topocêntrico como a média das altitudes EPS1, EPS2,...,EPS7. O sistema topocêntrico para a rede cadastral do campus Joaquim Amazonas da UFPE de Recife, fica definido, com a origem:

$$RECF \begin{cases} \text{Latitude} : 8^{\circ}03'03,46970'' S \\ \text{Longitude} : 34^{\circ}57'05,45910'' W \\ \text{altitude} : 4,217m \end{cases}$$

Tabela 2. Coordenadas na projeção UTM e no sistema topocêntrico (geodésico local) das estações da rede cadastral do campus Joaquim Amazonas da UFPE, Recife-PE.

ID marco	Projeção UTM (F=25 MC=33° Wgr.)		Coord.Topocêntricas	
	E (m)	N (m)	X (m)	Y (m)
RECF	284931,043	9109554,895	150000,000	250000,000
EPS1	285297,190	9109864,811	150367,559	250308,113
EPS2	284814,681	9109960,583	149885,595	250406,169

Tabela 2. Coordenadas na projeção UTM e no sistema topocêntrico (geodésico local) das estações da rede cadastral do campus Joaquim Amazonas da UFPE, Recife-PE.-continuação

EPS3	285384,804	9109430,884	150453,087	249873,847
EPS4	284742,576	9109481,118	149811,215	249927,136
EPS5	285364,818	9108945,773	150430,788	249388,919
EPS6	284603,506	9109006,560	149669,906	249453,330
EPS7	284650,091	9109407,837	149718,398	249854,310

Nota: As fórmulas utilizadas na transformação para o sistema topocêntrico foram as “cartesianas” conforme apresentadas em Garnés (1998) e Garnés (2005), em preferências as da NBR 14166 (1998) por causa das aproximações e simplificações nelas contidas.

Objetivando determinar as coordenadas planimétricas de três novos pontos: P₁, P₂ e P₃, foram medidas nove distâncias horizontais, entre esses pontos e dois pilares da rede cadastral do campus. Os pilares da rede utilizados foram o EPS7 e o EPS4, e as distâncias medidas foram às ilustradas na figura 3.

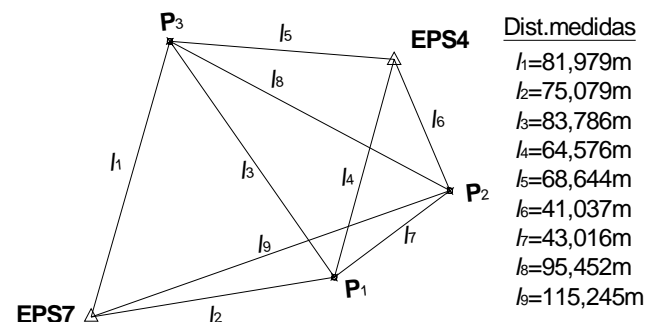


Figura3. Configuração da rede de trilateração topográfica.

As medições das distâncias foram realizadas com a estação total TC-500- Leica, de precisão angular 5” e linear 5mm+5ppm (LEICA, 2010). Utilizou-se o procedimento da centragem forçada, e em cada ponto a determinar, foi instalado um tripé com uma base nivelante. As medições foram realizadas sem que os tripés tenham sido deslocados. As observações foram distâncias horizontais, já reduzidas ao horizonte pela própria estação total, levando em conta os correspondentes valores de temperatura e pressão, no instante da observação.

2.1 O Ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.

Para cada distância medida, reduzida ao horizonte, formou-se uma equação de distância do tipo:

$$l_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (1)$$

Representando as observações de distâncias como uma variável aleatória m -dimensional, L , e colocando-as em função das coordenadas dos pontos (n -parâmetros nesse caso), pode-se escrever um sistema de equações na forma:

$$L=F(x), \quad F: R^n \rightarrow R^m, \text{ não-linear.} \quad (2)$$

2.2 Formação da geometria da rede e equações gerais do ajustamento

Antes de prosseguir para a formação das equações de mínimos quadrados cabe uma breve análise para formação da rede a que se propõe (figura 3). Partindo-se de um ponto arbitrário **A** traçam-se duas circunferências de raios l_1 (vermelha) e l_2 (verde). Escolhendo um local qualquer para **P₃** sobre a circunferência de raio l_1 , traça-se uma nova circunferência de raio l_3 (cyan). A interseção da circunferência em cyan com a circunferência em verde definem o ponto **P₁**. A partir de **P₁** traça-se a circunferência de raio l_4 (amarelo) e a partir de **P₃** traça-se a circunferência de raio l_5 (azul). A interseção dessas duas circunferências definem o ponto **B**. Do ponto **B** traça-se a circunferência de raio l_6 (magenta) e a partir do ponto **P₁** traça-se a circunferência de raio l_7 (preto). A interseção das circunferências em magenta e preto definem o ponto **P₂** e, com isso, se completa o desenho da rede sem a necessidade de pontos de controle nem de orientação.

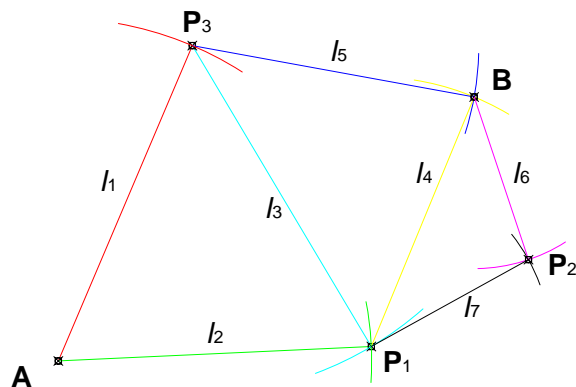


Figura 4. Formação da rede de trilateração com observações mínimas.

Cada ponto desta rede, sendo incógnita ao problema do ajustamento, iria conduzir a 10 parâmetros incógnitos (cada ponto tem duas coordenadas x e y como parâmetro). Logo a equação (2), considerando a figura 4, teria sete equações a 10 incógnitas. E, considerando a figura (3) o sistema ficaria com nove equações a 10 incógnitas. Em ambos os casos o problema é indeterminado. Antes, porém, de eliminar a indeterminação seria de fundamental importância verificar a consistência das observações em

si. Em particular isso é feito pelo chamado ajustamento livre com a solução pelas inversas generalizadas (ver seção 2.3).

Explicitando cada uma das equações (1) para a configuração usada na figura 3, e notação da figura 4, as nove equações de distância ficariam:

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{(x_3 - x_A)^2 + (y_3 - y_A)^2} \\ l_2 &= \sqrt{(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2} \\ l_3 &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\ l_4 &= \sqrt{(x_B - x_1)^2 + (y_B - y_1)^2} \\ l_5 &= \sqrt{(x_B - x_3)^2 + (y_B - y_3)^2} \\ l_6 &= \sqrt{(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2} \\ l_7 &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ l_8 &= \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \\ l_9 &= \sqrt{(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2} \end{aligned} \quad (3)$$

O desenvolvimento linear do modelo paramétrico de ajuste por mínimos quadrados na forma usual em Geodésia é (GEMAEL, 1994); (DALMOLIN, 2002) :

$$L_a = L_b + v = F(x_0) + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_0} (x - x_0) = F(x_a) \quad (4)$$

Os elementos da matriz jacobiana $A = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_0}$, quando não nulos seriam obtidos por:

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_j)}{l_{ij}}; \quad \frac{\partial l_{ij}}{\partial x_j} = \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} \quad (5)$$

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial y_i} = \frac{(y_i - y_j)}{l_{ij}}; \quad \frac{\partial l_{ij}}{\partial y_j} = \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} \quad (6)$$

Usando-se a seqüência das coordenadas no vetor dos parâmetros x , conforme segue:

$$x = [x_A \ y_A \ x_1 \ y_1 \ x_3 \ y_3 \ x_2 \ y_2 \ x_B \ y_B]^T, \quad (7)$$

A matriz **A** ficaria definida como:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial l_1}{\partial x_A} & \frac{\partial l_1}{\partial y_A} & 0 & 0 & \frac{\partial l_1}{\partial x_3} & \frac{\partial l_1}{\partial y_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\partial l_2}{\partial x_A} & \frac{\partial l_2}{\partial y_A} & \frac{\partial l_2}{\partial x_1} & \frac{\partial l_2}{\partial y_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{\partial l_3}{\partial x_1} & \frac{\partial l_3}{\partial y_1} & \frac{\partial l_3}{\partial x_3} & \frac{\partial l_3}{\partial y_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{\partial l_4}{\partial x_1} & \frac{\partial l_4}{\partial y_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial l_4}{\partial x_B} & \frac{\partial l_4}{\partial y_B} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial l_5}{\partial x_3} & \frac{\partial l_5}{\partial y_3} & 0 & 0 & \frac{\partial l_5}{\partial x_B} & \frac{\partial l_5}{\partial y_B} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial l_6}{\partial x_3} & \frac{\partial l_6}{\partial y_3} & \frac{\partial l_6}{\partial x_B} & \frac{\partial l_6}{\partial y_B} \\
 0 & 0 & \frac{\partial l_7}{\partial x_1} & \frac{\partial l_7}{\partial y_1} & 0 & 0 & \frac{\partial l_7}{\partial x_2} & \frac{\partial l_7}{\partial y_2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial l_8}{\partial x_3} & \frac{\partial l_8}{\partial y_3} & \frac{\partial l_8}{\partial x_2} & \frac{\partial l_8}{\partial y_2} & 0 & 0 \\
 \frac{\partial l_9}{\partial x_A} & \frac{\partial l_9}{\partial y_A} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial l_9}{\partial x_2} & \frac{\partial l_9}{\partial y_2} & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (8)$$

O vetor residual em (4) poderia ser colocado da seguinte forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} - [\mathbf{L}_b - F(\mathbf{x}_0)] \quad (9)$$

sendo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_0$: vetor de correção aos parâmetros aproximados.

2.3 Ajustamento livre pelo método dos mínimos quadrados.

A solução por ajustamento livre é fundamental para verificação da consistência das medições entre si, pois a solução independe de referencial.

O problema do ajustamento livre por mínimos quadrados é definido como (MITTERMAYER, 1972):

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}} \mathbf{v}^T \mathbf{Pv} \\
 & \text{sujeito a : } \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \text{mínimo} \\
 & \text{traço}(\Sigma_{\mathbf{x}}) = \text{mínimo}
 \end{aligned} \quad (10)$$

Onde \mathbf{P} é a matriz dos pesos, em que para o caso da trilateração, pode ser definida com base na precisão linear do equipamento; $\Sigma_{\mathbf{x}}$ é a matriz variância-covariância dos parâmetros a ser estimada no ajustamento.

Segundo Pacilé Netto (1990) a precisão de um medidor eletrônico de distância é especificada simbolicamente pelo fabricante como:

$$\begin{cases}
 \sigma = \pm (a + b \times D), \text{ ou} \\
 \sigma = \pm (a \text{ mm} + b \text{ ppm})
 \end{cases} \quad (11)$$

e, contudo, a variância da distancia medida deve ser obtida por:

$$\sigma_d^2 = a^2 + b^2 (D/1000)^2, \quad (12)$$

onde D na expressão (12), é a distância medida em metros. A divisão por 1000 é para transformação da distância em quilômetros.

A matriz dos pesos P é em geral uma matriz simétrica e definida positiva, e neste caso particular das distâncias medidas serem independentes umas das outras, a matriz dos pesos passa a ser diagonal e representada como:

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \text{diag}(1/\sigma_{di}^2), \quad i = 1, \dots, 9, \quad (13)$$

sendo σ_0^2 a variância da unidade peso a priori.

Em Garnés (1998) são apresentadas e discutidas três soluções equivalentes para o problema (10), a saber: *i*) solução por eliminação de inunção; *ii*) solução pelo método de Bjerhammar; e *iii*) solução pela Decomposição de Valor Singular (SVD). Não obstante em recair em uma das soluções mencionadas, pode-se usar a forma simplificada para representar essa solução pela pseudoinversa (\mathbf{N}^+) da matriz \mathbf{N} das equações normais como (GEMAEL, 1977):

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^+ \mathbf{U}, \quad (14)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \mathbf{A}^T \mathbf{PA} \\
 \mathbf{U} &= \mathbf{A}^T \mathbf{P}[\mathbf{L}_b - F(\mathbf{x}_0)].
 \end{aligned}$$

A solução (14) é chamada de solução com **inunção interna** (LEICK, 1995). O vetor estimado dos resíduos ficaria definido substituindo a solução (14) na equação (9). A estimativa para a variância da unidade peso seria calculada pelo caminho usual substituindo o número de parâmetros pelo posto da matriz ($\text{posto}(\mathbf{A}) = \text{posto}(\mathbf{N})$) conforme equação(15)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Pv}}{m - \text{posto}(\mathbf{A})}. \quad (15)$$

Nota: o posto da matriz corresponde ao mínimo entre o número de linhas ou número de colunas linearmente independentes da matriz.

A matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados também poderia ser representada por:

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{N}^+. \quad (16)$$

2.4 Ajustamento pelo método dos mínimos quadrados de equações não-lineares

Quando as equações de observação são não-lineares em relação aos parâmetros, como é o caso das distâncias, a solução até aqui apresentada, corresponde a um passo da do método de Gauss-Newton e a seqüência:

$$x_k \{k=0,1,2,3,\dots\}, \tag{17}$$

quando bem escolhidos os valores aproximados, x_0 , devem convergir para um mínimo local de $v^T P v$. Valores menos exatos deveriam usar métodos de convergência global, como exemplo, o de Marquardt e o de Gauss-Newton modificado globalizado conforme exposto em Garnés (1996) e Garnés (2001).

2.5 Teste de hipótese

O teste global qui-quadrado verifica se a função objetivo $v^T P v$ tem distribuição qui-quadrado. Em tendo, comprova-se a hipótese de que os resíduos aleatórios são provenientes de uma distribuição normal. O teste é assim formulado (Gemael, 1994):

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \text{ (hipótese nula)}$$

$$H_1 : \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2 \text{ (hipótese alternativa)}$$

H_0 não é rejeitada ao nível de significância α (em geral 5%) se a estatística do teste:

$$\chi^{2*} = \frac{v^T P v}{\sigma_0^2}$$

estiver no intervalo da região de aceitação da distribuição qui-quadrado, isto é, entre o percentil inferior e o percentil superior (figura 5). A direita ou a esquerda dos percentis a hipótese nula é rejeitada ao nível de significância adotado.

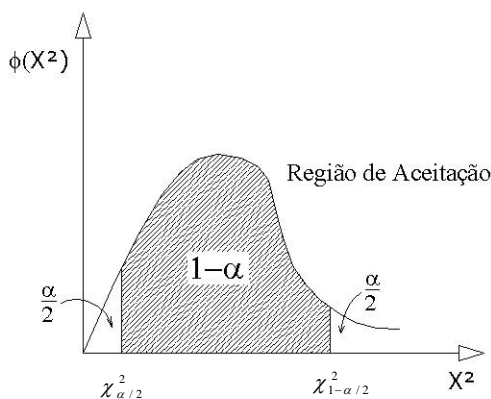


Figura 5. Regiões de aceitação e rejeição da distribuição qui-quadrado.

Caso o teste de hipótese global por qui-quadrado não rejeite a hipótese nula, significa que as observações são consistentes entre si e uma fase adiante deveria se seguir, com a introdução das injunções mínimas que estabelecem o referencial.

As injunções mínimas nesse caso seriam um ponto de controle para evitar a translação, e um azimute de controle para evitar a rotação. Assim a indeterminação do sistema seria tirada com o decréscimo de 3 parâmetros, restariam 7 parâmetros, donde: número de parâmetros = posto (A).

Neste trabalho, no entanto, foram introduzidos dois pontos de controle, os quais devem fazer aumentar os valores dos resíduos estimados, pois uma escala independente da escala do equipamento foi introduzida.

Com os pontos de injunção A=EPS7 e B=EPS4 a matriz A dos coeficientes dos parâmetros, equação (8), ficaria sem as duas primeiras colunas e sem as duas últimas colunas, sua dimensão se reduziria para 9 linhas x 6 colunas, e o posto(A)=6, o que significa posto completo, logo $N=A^T P A$ admitiria uma inversa ordinária (nesse caso a pseudoinversa também coincidiria com a inversa ordinária, $N^+ = N^{-1}$). Os efeitos das injunções afetariam o cálculo de $F(x_0)$ e conseqüentemente os elementos da matriz A. A expressão (15) e (16) por serem gerais poderiam ficar como estão. Senão, poderia ser feita a substituição nos graus de liberdade por $v=m-n$, sendo m o número de observações e n o número de parâmetros; e, N^+ poderia ser substituída por N^{-1} .

3. RESULTADOS

Os cálculos foram realizados no ambiente Matlab 6.0 em um programa desenvolvido pelos autores considerando o ajustamento livre; o ajustamento com injunções dos pontos EPS7 e EPS4 em coordenadas UTM; e, também em coordenadas topocêntricas (geodésicas locais). A tabela (3) resume os resultados dos três ajustamentos citados.

Tabela 3. Resumo dos resultados dos ajustamentos

Ajustamento livre	Ajustamento injunção em UTM	Ajustamento injunção Topocêntrica
Injunções: Nenhuma	Injunções: A $\begin{cases} x_A = 284650,091 \\ y_A = 9109407,837 \end{cases}$ B $\begin{cases} x_B = 284742,576 \\ y_B = 9109481,118 \end{cases}$	Injunções: A $\begin{cases} x_A = 149718,398 \\ y_A = 249854,310 \end{cases}$ B $\begin{cases} x_B = 149811,215 \\ y_B = 249927,136 \end{cases}$
Parâm. Aprox. A $\begin{cases} x_A = 0,000 \\ y_A = 0,000 \end{cases}$ 1 $\begin{cases} x_1 = 74,999 \\ y_1 = 3,452 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x_2 = 112,667 \\ y_2 = 24,225 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x_3 = 32,109 \\ y_3 = 75,428 \end{cases}$ B $\begin{cases} x_B = 99,645 \\ y_B = 63,141 \end{cases}$	Parâm. Aprox. 1 $\begin{cases} x_1 = 284724,318 \\ y_1 = 9109419,165 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x_2 = 284759,59 \\ y_2 = 9109443,76 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x_3 = 284674,110 \\ y_3 = 9109486,229 \end{cases}$	Parâm. Aprox. 1 $\begin{cases} x_1 = 149792,619 \\ y_1 = 249865,623 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x_2 = 149827,896 \\ y_2 = 249890,238 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x_3 = 149742,405 \\ y_3 = 249932,695 \end{cases}$

Tabela 3. Resumo dos resultados dos ajustamentos (cont)

n.º iteração para convergência k=3 mét. Gauss-Newton	n.º iteração para convergência k=3 mét. Gauss-Newton	n.º iteração para convergência k=4 mét. Gauss-Newton
Critério de parada $\ x_{k+1}-x_k\ _2=5,9E-13$	Critério de parada $\ x_{k+1}-x_k\ _2=8,1E-10$	Critério de parada $\ x_{k+1}-x_k\ _2=2,6E-11$
Parâm. Ajustados A $\begin{cases} x_A = -0,001 \\ y_A = -0,001 \end{cases}$ 1 $\begin{cases} x_1 = 74,999 \\ y_1 = 3,452 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x_2 = 112,668 \\ y_2 = 24,225 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x_3 = 32,110 \\ y_3 = 75,428 \end{cases}$ B $\begin{cases} x_B = 99,645 \\ y_B = 63,141 \end{cases}$	Parâm. Ajustados 1 $\begin{cases} x_1 = 284724,312 \\ y_1 = 9109419,151 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x_2 = 284759,596 \\ y_2 = 9109443,774 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x_3 = 284674,110 \\ y_3 = 9109486,229 \end{cases}$	Parâm. Ajustados 1 $\begin{cases} x_1 = 149792,675 \\ y_1 = 249865,274 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x_2 = 149828,070 \\ y_2 = 249889,719 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x_3 = 149742,783 \\ y_3 = 249932,582 \end{cases}$
n.º Obs. = 9 Posto(N) = 7 Graus liberdade = 2	n.º Obs. = 9 Posto(N) = 6 Graus liberdade = 3	n.º Obs. = 9 Posto(N) = 6 G. liberdade = 3
vTPV = 0,1588 $\hat{\sigma}_0^2 = 0,07938$	vTPV = 24,3027 $\hat{\sigma}_0^2 = 8,1009$	vTPV = 2,7707 $\hat{\sigma}_0^2 = 0,9236$
Teste Global $\chi^2(\alpha=5\%)$ $\chi_{a/2}^2 = 0,051$ $\chi_{1-a/2}^2 = 7,378$ Conclusão: Hipótese H_0 não rejeitada	Teste Global $\chi^2(\alpha=5\%)$ $\chi_{a/2}^2 = 0,216$ $\chi_{1-a/2}^2 = 9,348$ Conclusão: Hipótese H_0 rejeitada	T. Global $\chi^2(\alpha=5\%)$ $\chi_{a/2}^2 = 0,216$ $\chi_{1-a/2}^2 = 9,348$ Conc.: Hipótese H_0 não rejeitada
Numero condição *****	Numero condição Cond(N)=5,2419	Numero condição Cond(N)=5,2452
Máximo em x_B de $\sigma_{xB}=1,08\text{mm}$ e mínimo em x_3 de $\sigma_{x3}=0,675\text{mm}$. Com exceção de σ_{xB} , todos os demais estão na ordem do décimo do milímetro.	Desvio-padrão estimado 1 $\begin{cases} \sigma_{x_1} = 11,92\text{mm} \\ \sigma_{y_1} = 12,13\text{mm} \end{cases}$ 2 $\begin{cases} \sigma_{x_2} = 10,41\text{mm} \\ \sigma_{y_2} = 12,86\text{mm} \end{cases}$ 3 $\begin{cases} \sigma_{x_3} = 11,22\text{mm} \\ \sigma_{y_3} = 12,83\text{mm} \end{cases}$	Desvio-padrão estimado 1 $\begin{cases} \sigma_{x_1} = 4,02\text{mm} \\ \sigma_{y_1} = 4,10\text{mm} \end{cases}$ 2 $\begin{cases} \sigma_{x_2} = 3,51\text{mm} \\ \sigma_{y_2} = 4,33\text{mm} \end{cases}$ 3 $\begin{cases} \sigma_{x_3} = 3,79\text{mm} \\ \sigma_{y_3} = 4,33\text{mm} \end{cases}$

4. DISCUSSÃO

É indispensável no ajustamento de observações pelo método dos mínimos quadrados a análise dos resultados. O método pressupõe a necessidade da redundância, ou seja, o número de observações independentes deve ser sempre maior que o número mínimo de observações que definem a geometria da rede ou, do modelo a ser tratado. São também condicionantes para a qualidade dos resultados que as medições só estejam sujeitas aos inevitáveis erros acidentais, e que a estimativa de precisão das observações seja adequada. Na presença de erros grosseiros além do ajustamento em si, deve-se usar algum filtro (ou detector) para encontrar e eliminar essas observações com erros. Entre os filtros (ou detectores) os mais populares em Geodésia são o teste *Tau* por Pope (1976) e *Data Snoop* por Baarda (1968).

Os erros sistemáticos ou grosseiros podem, em geral, indicar suas presenças quando da aplicação do teste de hipótese por qui-quadrado, pois a normalidade dos resí-

duos estimados ficaria comprometida na presença destes. Todavia não são apenas erros sistemáticos ou grosseiros nas observações que são indicados nos resíduos fazendo com que a hipótese nula H_0 seja rejeitada. Gemael (1994) elenca além desses, os seguintes fatores que podem contribuir para a não normalidade destes:

- Sistema mal-condicionado;
- Modelo matemático inconsistente; e
- Estimativa da precisão das observações superestimadas ou subestimadas.

Em relação ao primeiro dos fatores, amplamente discutido em Garnés (1996), afirma-se que, pela magnitude do número de condição na norma-2 da matriz N , $\text{cond}(N)=5,2$, apresentado na Tabela (3), fica descartada essa hipótese. Com essa magnitude do número de condição, não resta qualquer dúvida sobre o condicionamento do sistema de equações normais, cuja confirmação poderia ser feita em termos da variação relativa do vetor, $[L_b - F(x_0)]$, ou mesmo da matriz A .

A possibilidade da existência de erros grosseiros também fica descartada, pois o teste de hipótese no ajustamento livre mostrou a normalidade das observações quando não rejeitou a hipótese nula ao nível de significância de 5%, isso significa que as observações entre si são consistentes.

Na estimativa da precisão das observações lineares da estação total, TC 500-Leica, a precisão nominal de (5mm+5ppm) foi levada em conta, assim como as variâncias das distâncias medidas, as quais foram obtidas pela expressão (12). Se os pesos das observações estivessem superestimados ou subestimados no ajustamento livre poderia ser detectado pela variação da precisão linear. Essa variação foi testada em ambos os casos: superestimando e subestimando as precisões. Realizando a variação para o caso de superestimar as observações, mesmo com (1mm+1ppm), a hipótese nula não é rejeitada no ajustamento livre. No caso de subestimar a precisão, somente quando a precisão é de (9mm+5ppm) é que o ajustamento livre detecta a subestimação da precisão. Logo com a precisão nominal fornecida pelo fabricante fica descartada a hipótese de sub ou superestimação da precisão. Cabe observar que essa análise só tem sucesso para o ajustamento livre. Na análise com injunções, os erros de pontos de controle mascaram os resultados.

O único ajustamento que a hipótese nula (H_0) foi rejeitada, foi o caso das injunções dos pontos de controle no plano da projeção Universal Transversa de Mercator – UTM, tabela (3). Para verificar a inconsistência desse modelo, deve-se lembrar que as coordenadas planas UTM são obtidas a partir das coordenadas geodésicas (latitude e longitude) com uma lei de projeção conforme (as projeções conforme mantêm os ângulos), mas que, no entanto, não mantêm as distâncias elipsoidais. Além de que as distâncias medidas para esse modelo deveriam ser reduzidas da superfície da Terra ao elipsóide e posteriormente ao plano UTM. Para determinação da magnitude desta correção na rede da figura 3, foram calculados os

fatores de escala UTM para os pontos EPS4 (fator de escala 1,000173019) e EPS7 (fator de escala 1,000173512). O fator de escala médio entre os dois pontos resultou 1,000173266. Então, a distância UTM $d_{AB}=117,998\text{m}$ no elipsóide corresponderia a $d_{AB-clip}=117,978\text{m}$ e corrigida do fator de elevação com fórmula apresentada na NBR14166 ($c=1+1,57\cdot 10^{-7}\cdot xHm$) $c=1,00000074803$, resultaria para a distância horizontal na superfície da Terra o valor idêntico a distância elipsoidal, face a pouca altitude dos pontos, apenas de 4,765m para a altitude média entre os dois pontos no SIRGAS2000. A discrepância entre a distância medida (topográfica) com a distância UTM seria 2cm.

Fazendo uso da tabela 2, o cálculo da distancia plana topocêntrica entre os pontos EPS4 e EPS7 é de 117,977m, discrepando 1mm com esta última e portanto consistente com a calculada via passagens mencionadas anteriormente.

Os dois centímetros que diferem a distância pelos dois diferentes modelos UTM e Topocêntrico seria o erro sistemático detectado no teste de hipótese por qui-quadrado.

5. CONCLUSÕES

O ajustamento de observação com o método dos mínimos quadrados só deve ser considerado concluído depois de validado pelo teste de hipótese qui-quadrado, caso contrário, uma investigação minuciosa em relação aos fatores que afetam a rejeição da hipótese nula deveria ser levada a cabo.

Com o exposto neste trabalho pôde-se concluir que, mesmo para pequenas distâncias (inferiores a 100m), o modelo injuncionando pontos de controle diretamente em coordenadas UTM para a região metropolitana de Recife (para outras localidades deveria ser observado o fator de escala) resultaria numa inconsistência do modelo de ajuste e faria o teste global por qui-quadrado rejeitar a hipótese nula.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao acadêmico de Engenharia Cartográfica Cláudio David Vila Flor por ter cedido o relatório contendo as coordenadas dos pontos de controle apresentados na tabela (2).

REFERÊNCIAS

ABIB, O. A. Ajustamento de poligonal pelo cálculo matricial. *Revista Brasileira de Cartografia*. n.15. ano 5. mai 76.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS- NBR 13.133 - **Execução de levantamento topográfico - Procedimnto**. Rio de Janeiro , 1994, 35 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS- NBR 14.166 - **Rede de Referência Cadastral Municipal- Procedimentos**. Rio de Janeiro , 1998, 23 p. ASSUNÇÃO, V. de S., at. al. **Comparação de métodos e softwares voltados ao ajustamento de poligonais topográficas**. Disponível em http://www.cartografia.org.br/xxi_cbc/151-G26.pdf . Acesso: 10 março 2010.

AZEVEDO, V. W. B.; CARNEIRO, A.F.T.; SILVA, D.C; BARROS, E.R.O. **Análise da teoria dos métodos de compensação e ajustamento de poligonais para delimitação de imóveis**. In: Anais 1º Simpósio de Geotecnologias no Pantanal, Campo Grande, Brasil,

BAARDA, W. **A testing procedure for use in geodetic networks**. Netherlands Geodetic Commission. **Publications on Geodesy**. Série 2. N. 5. Delft , Netherlands. 1968, 97p.

BRANCO FILHO, M. C. **Síntese do cálculo das compensações: anexo IV emprego dos computadores eletrônicos**. Ministério do Exército, Diretoria do Serviço Geográfico, 1968.

CARVALHO, A. S.; RODRIGUES, D. D.; LUZ, N. B. **Comparação dos métodos de Bowditch e MMQ no ajuste de poligonal topográfica, 2007**. Disponível em http://www.ufv.br/dec/eam/Publicacoes/2007/Comp_2007.pdf Acesso: 10 março 2010.

CAMARGO, P.O; CORDINI, J.; FABRI, S. M. Ajustamento de poligonais topográficas pelo método paramétrico. In.: II Congresso Brasileiro de Cadastro Técnico – COBRAC. **Anais**. Florianópolis – SC, 13 a 17 de outubro de 1996.

DALMOLIN, Q. **Ajustamento de observações pelo processo iterativo**. Curitiba, 1976. 96 f. Dissertação (Mestrado em Geodésia) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

DALMOLIN, Q. **Ajustamento por mínimos quadrados**. Departamento de Geomática-UFPR. Curitiba, 2002.

DIARIO OFICIAL DA UNIÃO – DOU, seção 1 - n.º 42, quinta-feira, 4 de março de 2010.

VILA FLOR, C. D. R. **Rede geodésica cadastral do campus Recife da UFPE: Fase I – planejamento e implantação da rede principal**. Trabalho final de graduação. Relatório parcial. Departamento de Engenharia Cartográfica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008.

GARNÉS, S. J. A. **Ajustamento por mínimos quadrados com análise na estabilidade da solução**. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-

- graduação em Ciências Geodésicas, UFPR, Curitiba, 1996. 148f.
- GARNÉS, S. J. A. Sistema de projeção e orientação das plantas topográficas. In.: **COBRAC 98**. Congresso Brasileiro de Cadastro Técnico Multifinalitário · UFSC Florianópolis · 18 a 22 de Outubro 1998.
- GARNÉS, S.J.A; DALMOLIN, Q. Trilateração em redes topográficas: solução do problema linear por ajustamento livre. **Cartografia e Cadastro**, Lisboa, n.9, dez. 1998.
- GARNÉS, S. J. A. **Resolução das ambigüidades GPS para linhas de base curta: análise dos algoritmos de otimização**. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, UFPR, Curitiba, 2001. 204 p.
- GARNÉS, S.J.A., SIQUEIRA, V.P.; CACHO, J.P. **Definição para implantação do sistema topográfico local de Campo Grande-MS e análise das fórmulas da NBR-14.166**. In: Anais do IV Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, CD-ROM, 2005, Curitiba-PR, 2005
- GEMAEL, C. **Aplicações do cálculo matricial em geodésia: 2ª parte: ajustamento de observações**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1974.
- GEMAEL, C. **Ajustamento de observações geodésicas: noções de estatística**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1975.
- GEMAEL, C. **Ajustamento: variação de coordenadas: 1ª parte – conceituação do método; equações de observações e normais; 2ª parte – resolução do sistema de equações normais**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1976.
- GEMAEL, C. **Inversas generalizadas**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1977.
- GEMAEL, C. **Elipse e elipsóide dos erros**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1987.
- GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: Editora da UFPR, 1994. 319p.
- INSTITUTO NACIONAL DE COLONIZAÇÃO E REFORMA AGRÁRIA – INCRA (2010), **Norma técnica para georreferenciamento de imóveis rurais**. 2ª Ed. fev., 2010.
- LUGNANI, J.B. **O problema dos sistemas de equações lineares mal condicionados e suas implicações em geodésia**. Curitiba, 1975. 106 f. Dissertação (Mestrado em Geodésia) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.
- MORAES, C.V. **Aplicação do ajustamento às poligonais**. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas, UFPR, Curitiba, 1997. 162f.
- LEICA. **Leica Instrument EDM Specifications**. Disponível em: <[www.dse.vic.gov.au/CA256F310024B628/0/B7F449C8F7F6F393CA2575A8000ADDF6/\\$File/Leica+Instrument+parameters.pdf](http://www.dse.vic.gov.au/CA256F310024B628/0/B7F449C8F7F6F393CA2575A8000ADDF6/$File/Leica+Instrument+parameters.pdf)> Acesso: mar. 2010.
- LEICK, A. **GPS satellite surveying**. 2a ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995
- MITTERMAYER, E. A generalisation of the least-squares method the adjustment of free networks. **Bulletin Géodésique**. N.104, 1972.
- MONICO, J. F. G. Ajustamento de poligonais geodésicas pelos métodos paramétrico e correlatos – análise da MVC dos parâmetros. In.: XIV Congresso Brasileiro de Cartografia. **Anais**, vol 1, de 21 a 26 de maio de 1989, Gramados –RS.
- MONICO, J. F. G. Posicionamento pelo GNSS: descrição, fundamentos e aplicações. 2 ed. Presidente Prudente : Editora UNESP, 2007.
- PACILÉO NETTO, N. **Calibração de medidores eletrônicos de distância, construção de uma base multipilar na USP e metodologia de aferição**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São de Paulo – Engenharia Civil, 1990, 187p. Tese de Doutorado.
- POPE, A. J. “The statistics of residuals and the detection of outliers.” *NOAA Technical Rep. NOS 65 NGS 1*, U.S. National Geodetic Survey, Silver Spring, Md. 1976, 136p.
- STRINGHINI, M. **Ajustamento e controles de qualidade aplicáveis às linhas poligonais**. Dissertação (Mestrado em Geomática) - Curso de Pós-graduação em Geomática, UFSM, 2005. 129f.
- STRINGHINI, M.; MORAES, C.V; FARRET, J. C. **Estimativas da qualidade de linhas poligonais topográficas**. *Ciência Rural*, set, 2008, v.38, n.6, p.1604-1609.
- UOTILA, U. A. **Introduction to adjustment computations with matrices**. The Ohio State University, Columbus, 1967.
- WANDRESEN, R. **Métodos iterativos para solução de sistemas de equações normais**. 1980. 214 f. Dissertação (Mestrado em Geodésia) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.